Definitionen, Formeln und Sätze zu den Vorlesungen Analysis I–III

Prof. Dr. M. Nieper-Wißkirchen

Wintersemester 2021/22 – Wintersemester 2022/23
an der
Universität Augsburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dieses Vorlesungsskript ist als Arbeitsmittel für die Hörer der Vorlesung gedacht, und zwar nicht nur während des Verlaufes dieses Analysiskurses, sondern auch für spätere Zeiten als Sammlung der Definitionen, Formeln und Sätze der Analysis.

Das Studium des Vorlesungsskriptes ersetzt allerdings nicht den Besuch der Vorlesung. So sind Beweise nur in seltenen Fällen angegeben, z. B. wenn sie in der Vorlesung nicht vollständig vorgeführt werden, in der Literatur schwierig zu finden sind, oder wenn der Beweis als solches wichtige zusätzliche Konzepte vermittelt. In das Skript sind viele Aufgaben aufgenommen, und zwar insbesondere dann, wenn diese wichtige zusätzliche Informationen geben oder Sachverhalte schildern.

Das Skript schneidet viele Themen, die über den Minimalstoff eines Analysis-Kurses hinausgehen, wie etwa Potenzreihen im Komplexen oder grundlegende Dinge über gewöhnliche Differentialgleichungen, an. Dieses trägt der Tatsache Rechnung, daß nach dem Absolvieren der Anfängervorlesungen aus Zeitgründen im allgemeinen nicht jede grundlegende Spezialvorlesung besucht werden kann, so daß die in den Anfängervorlesungen erworbene mathematische Allgemeinbildung umfassend genug sein sollte. Dazu gehören auch wichtige Algorithmen der numerischen Mathematik (z. B. die Simpsonsche Regel oder das Runge–Kutta-Verfahren), welche in der Programmiersprache Scheme angegeben werden; die Übersetzung in eine andere Programmiersprache sollte keine Schwierigkeiten bereiten.

Ein wesentliches Ziel dieses Analysiskurses ist, möglichst schnell an den Geist der Mathematik heranzuführen. Dadurch gestaltet sich dieser Kurs abstrakter als manch anderer. Beispielsweise wird der Stetigkeits- und der Konvergenzbegriff sofort in metrischen Räumen behandelt. Auf diese Weise steht sogleich ein größeres Beispielmaterial zur Verfügung. Es gibt aber auch einen anderen wichtigen Grund: Da (fast) alle überflüssige Struktur beseite gelassen ist, tritt das Wesen der Stetigkeit und Konvergenz schärfer hervor. Natürlich wird der metrische Raum $\mathbf{R}$ trotzdem hinreichend ausführlich behandelt.

An dieser Stelle möchte ich meinen größten Dank meinem eigenen Lehrer der Analysis aussprechen, Herrn Prof. Dr. H. Reckziegel, bei dem ich beginnend ab Wintersemester 1995/96 bis Wintersemester 1996/97 an der Universität zu Köln den Analysiskurs besuchen konnte. Dadurch ist meine Vorstellung eines guten Analysiskurses nachhaltig geprägt worden, und auch dieses Skript übernimmt große Teile des damaligen Vorlesungsskriptes.

Kapitel 0

Die grundlegenden Elemente der mathematischen Sprache

Dieses Kapitel ist völlig untypisch für die Vorlesung, welches auch durch die ungewöhnliche Numerierung angedeutet wird. Neben Literaturhinweisen werden die Bezeichnungen der für die Analysis wichtigsten Mengen aufgeführt und dann die fundamentalen logischen und mengentheoretischen Sprachelemente der Mathematik beschrieben.

0.1 Die grundlegenden Mengen der Analysis

Definition. Für die grundlegenden Mengen der Analysis verabreden wir folgende Bezeichnungen:

- $\mathbf{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots,$
- $\mathbf{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$
- $\mathbf{N}_m := \{n \in \mathbf{Z} \mid n \geq m\}$ für jedes $m \in \mathbf{Z}$,
- $\mathbf{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen,
- $\mathbf{R}$ die Menge der reellen Zahlen,
- $\mathbf{R}_+ := \{a \in \mathbf{R} \mid a > 0\}$,
- $\mathbf{R}^* := \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Hierbei bedeutet $a := \ldots$, daß das Objekt a durch die rechte Seite $\ldots$ der „Gleichung“ definiert wird; entsprechend ist $\ldots =: a$ zu verstehen.

0.2 Literatur

Die folgende Liste empfehlenswerter Literatur ist sicherlich nicht vollständig. Es schadet nicht, nicht nur mit einem Buch zu arbeiten.

- Barner, M., Flohr, F.: *Analysis I*, 4. Aufl. 1991, de Gruyter.
- Bartle, R.: *Elements of Integration*, 1966, John Wiley & Sons Inc.
- Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie*, 2. Aufl. 1992, de Gruyter.
- Cartan, H.: *Differentialrechnung*. Mannheim 1985, B. I.
- Deimling, K.: *Nonlinear Functional Analysis*. Berlin 1985, Springer.
- Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis*, 3. Aufl. Braunschweig 1985, Vieweg.
- Greenberg, M.: *Lectures on Algebraic Topology*. 1967, W. A. Benjamin.
- Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, 15. Aufl. 2003, Vieweg+Teubner.
- Hirzebruch, F., Scharlau, W.: *Einführung in die Funktionalanalysis*, 1991, Spektrum Akademischer Verlag.
- Köhler, G.: *Analysis*, 2006, Heldermann.
- Kowalski, H.-J., Michler G.: *Lineare Algebra*, 12. Aufl. 2003, Walter de Gruyter.
- Lang, S.: *Real and Functional Analysis*, 3. Aufl. 1993, Springer.
- Lang, S.: *Undergraduate Analysis*, 4. Aufl. 2005, Springer.
- Jänich, K.: *Analysis für Physiker und Ingenieure*, 4. Aufl. Berlin 2001, Springer.
- Schubert, H.: *Topologie. Eine Einführung*, 4. Aufl. 1975, Teubner.
- Storch, U., Wiebe H.: *Lehrbuch der Mathematik, Band 1: Analysis einer Veränderlichen*, 3. Aufl. 2003, Springer.
- Walter, R.: *Einführung in die lineare Algebra*, 4. Aufl. 1996, Vieweg+Teubner.
- Warner, F. W.: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, 1971, Springer.

0.3 Symbole der Logik

Tertium non datur[1]**.** Eine *Aussage* ist (entweder) wahr oder falsch.[2]

Beispiel 1. Beispiele für Aussagen sind etwa:

[1] Lat. für „ein Drittes ist nicht gegeben“

[2] Genaugenommen handelt es sich hierbei nicht um ein einzelnes Axiom, sondern um ein ganze Familie von Axiomen: Für jede einzelne Aussage A ist „A ist wahr oder falsch“ ein Axiom. Eine solche Familie heißt richtiger *Axiomenschema*.

(a) „0 ist eine natürliche Zahl."

(b) „Jede natürliche Zahl ist positiv."

Aussagen können durch *Junktoren* zu neuen Aussagen verknüpft werden:

Definition 1. Seien A und B zwei Aussagen. Dann steht

- $\neg A$ für die *Negation* „nicht A",
- $A \wedge B$ für die *Konjunktion* „A und B",
- $A \vee B$ für die *Disjunktion* „A oder B (oder beide)",
- $A \implies B$ für die *Implikation* „aus A folgt B",
- $A \iff B$ für die *Äquivalenz* „A genau dann, wenn B".

Aufgrund des „Tertium non datur" kann jede mathematische Aussage nur zwei Wahrheitswerte annehmen. Damit können wir die logischen Junktoren durch endliche Tabellen beschreiben, die sogenannten *Wahrheitstafeln.* Die folgende Tabelle beschreibt zum Beispiel die Operation der Negation:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Hierbei steht w für „wahr" und f für „falsch".

Theorem. Sind A und B zwei Aussagen, so ist

$$\neg(A \implies B) \quad \text{äquivalent zu} \quad A \wedge (\neg B).$$

Beweis. Wir stellen eine Wahrheitstafel für alle möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte von A und B auf und stellen fest, daß in allen vier Fällen die Wahrheitswerte der Aussagen $\neg(A \implies B)$ und $A \wedge (\neg B)$ gleich sind:

A	B	$A \wedge B$	$A \implies B$	$\neg(A \implies B)$	$A \wedge \neg B$
w	w	w	w	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	f
f	f	f	w	f	f

$\square$

In der Spalte „$A \wedge B$" der Wahrheitstafel des Beweises haben wir noch einmal den Wahrheitsgehalt der Konjuktion festgelegt. Insbesondere wollen wir besonders auf den Wahrheitswert der Implikation in der Spalte „$A \implies B$" hinweisen. Es gilt nämlich:

Proposition 1. Ist die Aussage A falsch, so ist die Aussage $A \implies B$ in jedem Falle wahr.

Diese Festsetzung mag zunächst nicht einleuchtend erscheinen, entspricht aber auch der Alltagslogik. Sagt etwa Adam zu Eva: „Wenn es morgen regnet, dann komme ich zu Dir.“, behauptet Adam also die Implikation

$$\text{„Morgen regnet es.“} \implies \text{„Adam geht zu Eva.“},$$

und regnet es morgen nicht, so hat Adam in keinem Fall gelogen, ob er nun zu Eva geht oder nicht.

Aufgabe. Sind A und B zwei Aussagen, so ist

$$A \implies B \quad \text{äquivalent zu} \quad \neg B \implies \neg A.$$

(Tip: Man stelle für beide Aussagen die Wahrheitstafeln auf; man vergleiche dazu den Beweis des vorangegangenen Theorems.)

Definition 2. Sei A eine Aussage, und sei M eine Menge. Dann steht

- $\forall a \in M\colon A$ für die Aussage „für alle $a \in M$ gilt die Aussage A“,
- $\exists a \in M\colon A$ für die Aussage „es existiert ein $a \in M$, für das die Aussage A gilt“,
- $\exists! a \in M\colon A$ für die Aussage „es existiert genau ein $a \in M$, für das die Aussage A gilt“.

Beispiel 2. Für die Funktion $f = x^2 - 4x + 5$ gilt

$$\forall a \in \mathbf{R}\, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+\, \exists \delta \in \mathbf{R}_+\, \forall t \in \mathbf{R}\colon \big(|t-a| < \delta \implies |f(t) - f(a)| < \varepsilon\big).$$

In Worten: Zu jedem $a \in \mathbf{R}$ und zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $t \in \mathbf{R}$ gilt: Es ist $|f(t) - f(a)| < \varepsilon$, wenn $|t - a| < \delta$. Kurz gesagt: Die Funktion f ist in allen Punkten $a \in \mathbf{R}$ stetig.

Proposition 2. Sei A eine Aussage, und sei M eine Menge.

(a) $\neg \forall a \in M\colon A \iff \exists a \in M\colon \neg A$,

(b) $\neg \exists a \in M\colon A \iff \forall a \in M\colon \neg A$.

Warnung. Die Quantoren $\forall$, $\exists$ und $\exists!$ sollten sprachlich richtig benutzt werden. Insbesondere stehen Quantoren vor der Aussage, über die quantifiziert wird. Nur bei Beachtung dieser Vorschrift können die Regeln obiger Proposition systematisch zum Negieren von Aussagen verwendet werden.

Die Reihenfolge der Quantoren ist wesentlich. Verschieben wir etwa im obigen Beispiel den Quantor „$\forall a \in M$“, so daß er hinter den Quantor „$\exists \delta \in M$“ zu stehen kommt, so erhalten wir die falsche Aussage, daß f eine gleichmäßig stetige Funktion ist.

Schließlich sei bemerkt, daß durch $A :\iff B$ ausgedrückt wird, daß die Aussage A durch die Aussage B definiert wird. Z. B. könnten wir für eine Funktion der Form $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definieren:

„f ist in a stetig“

$$:\iff \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall t \in \mathbf{R}\colon \big(|t-a| < \delta \implies |f(t)-f(a)| < \varepsilon\big).$$

0.4 Mengentheoretische Bezeichnungen

Die Mengenlehre benutzen wir weitestgehend naiv, achten aber darauf, keine unerlaubten Mengen zu bilden.

Mengen sind Zusammenfassungen von gewissen mathematischen Objekten zu einem neuen mathematischen Objekt. Ist a ein mathematisches Objekt und M eine Menge, so steht $a \in M$ (oder $M \ni a$) für die Aussage, daß a ein Element von M ist (wir sagen auch, daß a in M *liegt*). Wir definieren

$$a \notin M :\iff \neg(a \in M).$$

Die Tatsache, daß sich eine Menge durch die durch sie zusammengefaßten Elemente definiert, können wir mathematisch auch durch folgendes Axiom beschreiben:

Bestimmtheitsaxiom (R. Dedekind 1888)**.** Sind M und N zwei Mengen, so gilt

$$M = N \iff \big(\forall a \in M\colon a \in N\big) \wedge \big(\forall a \in N\colon a \in M\big).$$

Neue Mengen erhalten wir aus bekannten Mengen mit Hilfe folgender Axiome:

Elementarmengenaxiom. Sind a_1, a_2, …, a_n mathematische Objekte, so existiert eine Menge M, die genau diese Objekte als Elemente enthält. Wir schreiben dann $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. (Es sei beachtet, daß diese Menge aufgrund des vorangehenden Axioms eindeutig bestimmt ist.)

Beispiel 1. Die *leere Menge* $\emptyset := \{\}$ ist eine Menge, die wir durch Angabe ihrer Elemente (nämlich keines) angeben können.

Aussonderungsaxiom. Ist M eine Menge und A eine Aussage, so existiert eine Menge N, deren Elemente genau diejenigen Elemente von M sind, auf die die Aussage A zutrifft. Wir schreiben dann $N = \{a \in M \mid A\}$.

Beispiel 2. Das Aussonderungsaxiom ist uns schon einmal, bei der Definition von $\mathbf{R}_+ = \{a \in \mathbf{R} \mid a > 0\}$ begegnet.

Mit Hilfe des Aussonderungsaxioms können Teilmengen von Mengen konstruiert werden:

Definition 1. Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element von N auch zu M gehört. Wir schreiben dann $N \subseteq M$.

Das Bestimmtheitsaxiom liefert uns folgende Beweisstrategie für die Gleichheit zweier Mengen:

Proposition. Sind M und N zwei Mengen, so gilt

$$M = N \iff M \subseteq N \wedge N \subseteq M.$$

Potenzmengenaxiom. Ist M eine Menge, so existiert eine Menge $\mathfrak{P}(M)$, deren Elemente gerade die Teilmengen von M sind. Wir nennen die Menge $\mathfrak{P}(M)$ die *Potenzmenge* von M.

Es sei beachtet, daß die Potenzmenge immer mindestens ein Element besitzt, nämlich $\emptyset \in \mathfrak{P}(M)$.

Vereinigungsmengenaxiom. Ist N eine Menge von Mengen, so existiert eine Menge $\bigcup N = \bigcup_{A \in N} A$ mit

$$p \in \bigcup N \iff \exists A \in N \colon p \in A.$$

Wir nennen $\bigcup N$ die *Vereinigung* des Mengensystems N.

Im Falle, daß A und B zwei Mengen sind, schreiben wir

$$A \cup B \coloneqq \bigcup \{A, B\}$$

und nennen $A \cup B$ die *Vereinigung* von A und B. Es gilt dann

$$p \in A \cup B \iff p \in A \vee p \in B.$$

Produktmengenaxiom. Sind M und N zwei Mengen, so existiert die Menge $M \times N$ der *geordneten Paare* (p, q) mit $p \in M$ und $q \in N$. Wir nennen $M \times N$ das *kartesische Produkt* von M und N.

Schließlich können wir mit Hilfe der schon angegeben Axiome weitere Mengen formen:

Definition 2. Es seien M und N zwei Mengen.

(a) Es heißt
$$M \cap N \coloneqq \{a \in M \mid a \in N\} = \{a \in N \mid a \in M\}$$
der *Durchschnitt* von M und N.

(b) Schließlich ist
$$M \setminus N \coloneqq \{a \in M \mid a \notin N\}$$
das *Komplement* von N in M.

Aufgabe. Sind M und N Mengen, so gilt

$$M \setminus (M \setminus N) = M \cap N.$$

0.5 Abbildungen und Funktionen

Definition 1.

(a) Eine *Abbildung* einer Menge M in eine Menge N ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $f \subseteq M \times N$ zusammen mit der Angabe des *Bildbereiches* N, so daß

$$\forall p \in M \, \exists! q \in N \colon (p, q) \in f. \tag{1}$$

Wir schreiben dann

$$f \colon M \to N.$$

Anstelle von $(p, q) \in f$ schreiben wir $q = f(p)$ oder $f \colon p \mapsto q$. Den *Definitionsbereich* M von f bezeichnen wir auch mit D_f.

(b) Ist $f \colon M \to N$ eine Abbildung, $A \in \mathfrak{P}(M)$ und B eine beliebige Menge, so definieren wir das *Bild* von A unter f durch

$$f(A) \coloneqq \{f(p) \mid p \in A\} \coloneqq \{q \in N \mid \exists p \in A \colon q = f(p)\}$$

und das *Urbild* von B bezüglich f durch

$$f^{-1}(B) \coloneqq \{p \in M \mid f(p) \in B\}.$$

Kommentar. Wir haben in obiger Definition beschrieben, was auch als *Graph* einer Funktion bekannt ist. Aufgrund von (1) wird durch f eine *Zuordnung* definiert. Die Begriffe „Abbildung“ und „Funktion“ werden häufig synonym verwendet. Wir bevorzugen die Bezeichnung „Funktion“, wenn N ein Rechenbereich wie etwa $\mathbf{R}$ ist.

Aus der folgenden Proposition leitet sich sofort eine Beweisstrategie für Abbildungen ab:

Proposition 1. Sind f und g Abbildungen in N, so gilt

$$f = g \iff (D_f = D_g \wedge \forall p \in D_f \colon f(p) = g(p)).$$

Beispiele. Seien M, M_1, M_2, N, N_1, N_2 Mengen.

(a) Die *Identität* von M ist die Abbildung $\mathrm{id}_M \coloneqq \{(p, p) \in M \times M \mid p \in M\}$, also $\mathrm{id}_M \colon M \to M, p \mapsto p$.

(b) Ist M eine Teilmenge von N, so bezeichne $M \hookrightarrow N$ die *Inklusion* von M in N; das ist die Abbildung $M \to N, p \mapsto p$.

(c) Ist $M = \emptyset$, so ist $M \times N = \emptyset$, also ist die leere Menge die einzige Teilmenge von $M \times N$. Diese ist trivialerweise eine Abbildung; wir wollen sie die *leere Abbildung* nennen.

(d) Die *Komposition* zweier Abbildungen $f_1\colon M_1 \to N_1$ und $f_2\colon M_2 \to N_2$ ist die Abbildung $f_1 \circ f_2\colon f_2^{-1}(M_1) \to N_1, p \mapsto f_1(f_2(p))$.

(e) Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung und $A \subseteq M$, so heißt

$$f|A := f \circ (A \hookrightarrow M)\colon A \to N, p \mapsto f(p)$$

die *Restriktion* von f auf A.

Aufgabe 1. Es seien $f_1\colon M_1 \to N_1$ und $f_2\colon M_2 \to N_2$ zwei Abbildungen. Man beweise:

$$f_1 \circ f_2 \text{ ist die leere Abbildung} \iff f_2(M_2) \cap M_1 = \emptyset.$$

Proposition 2. Für jede Abbildung $f\colon M \to N$ und für jede Wahl von Teilmengen A_1, $A_2 \in \mathfrak{P}(M)$ und B, B_1, $B_2 \in \mathfrak{P}(N)$ gilt:

(a) $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$,

(b) $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$,

(c) $f^{-1}(N \setminus B) = M \setminus f^{-1}(B)$ und allgemeiner $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

Definition 2. Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung, so definieren wir:

(a) Die Abbildung f heißt *injektiv*, wenn

$$\forall p_1, p_2 \in M\colon \big(f(p_1) = f(p_2) \implies p_1 = p_2\big).$$

Im Falle der Injektivitität ist

$$\check{f} := \{(f(p), p) \mid p \in M\}$$

eine Abbildung von $f(M)$ auf M (vgl. (b)), die *Umkehrabbildung* von f.

(b) Die Abbildung f heißt *surjektiv* oder eine Abbildung *auf* N, wenn $f(M) = N$.

(c) Die Abbildung f heißt *bijektiv*, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Proposition 3. Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to K$ Abbildungen, so gilt: Sind f und g injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv), so ist auch $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv).

Die folgende Aussage liefert ein wertvolles Kriterium für die Injektivität und Surjektivität von Abbildungen:

Proposition 4. Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ Abbildungen und gilt für die Komposition $g \circ f = \mathrm{id}_M$, so ist f injektiv, g surjektiv und $\check{f} = g|f(M)$. Gilt außerdem $f \circ g = \mathrm{id}_N$, so sind daher f und g trivialerweise Bijektionen und $\check{f} = g$ und $\check{g} = f$.

Proposition 5. Ist $f\colon M \to N$ injektiv, so ist $\check{f}\colon f(M) \to M$ eine *Bijektion*, d.h. eine bijektive Abbildung, und es gelten

$$\check{f} \circ f = \mathrm{id}_M \qquad \text{und} \qquad f \circ \check{f} = (f(M) \hookrightarrow N).$$

Ist insbesondere f eine Bijektion, so ist auch $\check{f}\colon N \to M$ eine Bijektion.

Aufgabe 2. Es seien $f\colon M \to N$ eine Abbildung, $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$. Beweisen Sie:

(a) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ und Gleichheit gilt in jedem der folgenden Fälle:

  (i) f ist injektiv,

  (ii) $A = f^{-1}(B)$ für ein beliebiges $B \in \mathfrak{P}(N)$.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, und Gleichheit gilt in jedem der folgenden Fälle:

  (i) f ist surjektiv.

  (ii) $B = f(A)$ für ein beliebiges $A \in \mathfrak{P}(M)$.

(Anleitung: Man beweise zunächst die Inklusionen und dann die Teile (a)(i) und (b)(i), und folgere anschließend unter alleiniger Ausnutzung der bewiesenen Inklusionen die Teile (a)(ii) und (b)(ii).)

0.6 Mächtigkeit von Mengen

Definition. Zwei Mengen M und N heißen *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion $M \to N$ gibt. In diesem Falle schreiben wir

$$|M| = |N|\,.$$

Proposition. „Gleichmächtigkeit“ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. sind M, N und K Mengen, so gilt

(a) $|M| = |M|$,

(b) $|M| = |N| \implies |N| = |M|$,

(c) $(|M| = |N| \wedge |N| = |K|) \implies |M| = |K|$.

Aufgabe (Die Potenzmenge einer Menge ist mächtiger als die Menge)**.** Sei M eine Menge. Man zeige: Für jede Abbildung $f\colon M \to \mathfrak{P}(M)$ ist

$$N_f := \{p \in M \mid p \notin f(p)\} \in \mathfrak{P}(M) \setminus f(M).$$

Insbesondere existiert keine surjektive Abbildung $M \to \mathfrak{P}(M)$.

Diese Tatsache erklärt auch das sogenannte Paradoxon vom Barbier: Der Barbier eines Dorfes behauptet, daß er genau die Männer des Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Das kann wohl nicht wahr sein. Wieso? Wer rasiert dann den Barbier? Um dieses Paradoxon aufzuklären bezeichnen wir mit M die Menge aller Männer des Dorfes und definieren

$$f\colon M \to \mathfrak{P}(M), p \mapsto \{m \in M \mid m \text{ wird von } p \text{ rasiert}\}.$$

Die obige Aufgabe zeigt, daß kein Mann des Dorfes genau die Männer rasiert, die es nicht selbst tun.

0.7 Familien und Folgen

Definition. Sind wir bei einer Abbildung $f\colon I \to A$ weniger an den Eigenschaften der Zuordnungsvorschrift als vielmehr an den Werten $f(i)$ interessiert, so benutzen wir häufig die Indexschreibweise

$$f = (a_i)_{i\in I}, \quad a_i \coloneqq f(i)$$

und nennen $(a_i)_{i\in I}$ eine *Familie* und I ihre *Indexmenge*. Anstatt $(a_i)_{i\in\mathbf{N}_0}$ schreiben wir auch $(a_i)_{i=0,1,2,\dots}$ oder $(a_i)_{i=0}^{\infty}$. Entsprechend ist $(a_i)_{i=k,k+1,k+2,\dots} = (a_i)_{i=k}^{\infty}$, wobei $k \in \mathbf{Z}$, zu verstehen. Bei den letzen zwei Beispielen reden wir auch von *Folgen*.

Warnung. Die Folge $(a_i)_{i=0,1,2,\dots}$ ist wesentlich verschieden von der Menge ihrer Glieder $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$.

Beispiel. Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, so kann für diese die *Vereinigung*

$$\bigcup_{i\in I} M_i \coloneqq \{p \mid \exists i \in I\colon p \in M_i\} = \bigcup\{M_i \mid i \in I\}$$

und, wenn $I \neq \emptyset$, der *Durchschnitt*

$$\bigcap_{i\in I} M_i \coloneqq \{p \mid \forall i \in I\colon p \in M_i\}$$

gebildet werden.

Proposition (de-Morgansche Regeln)**.** Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen und M eine weitere Menge, so gilt

(a) $M \cap (\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I}(M \cap M_i)$ und $M \cup (\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I}(M \cup M_i)$, wenn $I \neq \emptyset$,

(b) $M \setminus (\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I}(M \setminus M_i)$ und $M \setminus (\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I}(M \setminus M_i)$, wenn jeweils $I \neq \emptyset$.

Aufgabe. Es seien $f\colon M \to N$ eine Abbildung, $(M_i)_{i\in I}$ eine nicht leere Familie von Mengen $M_i \subseteq M$, $(N_i)_{i\in I}$ eine nicht leere Familie von Mengen $N_i \subseteq N$ und A, $B \subseteq N$. Man zeige:

(a) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} N_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(N_i)$.

(b) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} N_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(N_i)$.

(c) $f(\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} f(M_i)$

(d) $f(\bigcap_{i\in I} M_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(M_i)$.

Man zeige durch Angabe eines Beispiels, daß in (d) Gleichheit im allgemeinen nicht gilt.

0.8 Die charakteristischen Eigenschaften von $\mathbf{N}_0$

Die Idee der Erzeugung der Menge der natürlichen Zahlen durch fortlaufendes Weiterzählen beginnend bei der Null wird durch folgende Eigenschaften beschrieben, wobei $S\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0, n \mapsto n+1$ die *Nachfolgerfunktion* ist:

Peanosche Axiome.

(N1) $0 \in \mathbf{N}_0$,

(N2) S ist injektiv,

(N3) $0 \notin S(\mathbf{N}_0)$,

(N4) $\forall M \in \mathfrak{P}(\mathbf{N}_0)\colon \big(0 \in M \wedge S(M) \subseteq M \implies M = \mathbf{N}_0\big)$.

Aus den Peanoschen Axiomen folgt:

Beweisprinzip der vollständigen Induktion. Sei A_0, A_1, A_2, ... eine Folge von Aussagen. Es sei A_0 wahr (*Induktionsbeginn*). Weiterhin gelte für alle $n \in \mathbf{N}_0$: Ist A_n wahr, so auch A_{n+1}. Dann ist A_n für alle $n \in \mathbf{N}_0$ wahr.

Korollar.

(a) Sei $m \in \mathbf{Z}$. Sei A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, ... eine Folge von Aussagen. Es sei A_m wahr. Weiterhin gelte für alle ganzen Zahlen $n \geq m$: Ist A_n wahr, so auch A_{n+1}. Dann ist A_n für alle ganzen Zahlen $n \geq m$ wahr.

(b) Sei A_0, A_1, A_2, ... eine Folge von Aussagen. Es gelte für alle $n \in \mathbf{N}_0$:

$$\text{Sind alle } A_k \text{ für } k = 0, \ldots, n-1 \text{ wahr, so ist auch } A_n \text{ wahr.} \tag{1}$$

Dann ist A_n für alle $n \in \mathbf{N}_0$ wahr.

Kommentar 1. Man beachte, daß in (1) der Fall $n = 0$ explizit erlaubt ist. In diesem Fall ist die Voraussetzung (nämlich, daß alle A_k für $k = 0, \ldots, n-1$ wahr sind) leer, so daß (1) für $n = 0$ gerade fordert, daß A_0 wahr ist.

Der Dedekindsche Satz über die rekursive Definition. Es seien M eine Menge, $g\colon \mathbf{N}_0 \times M \to M$ eine Abbildung und $p^* \in M$. Dann existiert genau eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ von Elementen $p_n \in M$ mit dem *Startwert* $p_0 = p^*$ und dem *rekursiven Bildungsgesetz* $p_{n+1} = g(n, p_n)$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$.

Beweis. Sei $[n] \coloneqq \{0, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbf{N}_0$ die Menge der ersten $n+1$ natürlichen Zahlen. Weiter sei $[\infty] \coloneqq \mathbf{N}_0$ die Menge aller natürlicher Zahlen. Für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ sei A_n die Aussage, daß genau eine Familie $(p_k)_{k\in[n]}$ von Elementen $p_k \in M$ mit

$$p_0 = p^* \tag{S_n}$$

und

$$\forall k \in \mathbf{N}_0 \colon k+1 \in [n] \implies p_{k+1} = g(k, p_k) \tag{R_n}$$

existiert. Wir zeigen per Induktion, daß A_n für alle $n \in \mathbf{N}_0$ wahr ist.

Induktionsanfang. Für $n = 0$ ist $[n] = \{0\}$. Damit besteht die Familie $(p_k)_{k\in[0]}$ nur aus dem Element p_0. Dieses ist eindeutig durch die Bedingung (S_0) bestimmt. Die Bedingung (R_0) an die Familie ist offensichtlich leer. Damit ist A_0 wahr.

Induktionsschritt. Sei die Aussage A_n wahr. Seien $(p_k)_{k\in[n+1]}$ und $(\tilde{p}_k)_{k\in[n+1]}$ zwei Familien, welche beide die Bedingungen (S_{n+1}) und (R_{n+1}) erfüllen. Damit erfüllen $(p_k)_{k\in[n]}$ und $(\tilde{p}_k)_{k\in[n]}$ die Bedingungen (S_n) und (R_n). Da A_n wahr ist, gilt damit $p_k = \tilde{p}_k$ für $k \leq n$. Weiter gilt $p_{n+1} = g(n, p_n) = g(n, \tilde{p}_n) = \tilde{p}_{n+1}$ wegen (R_{n+1}). Damit ist sogar $(p_k)_{k\in[n+1]} = (\tilde{p}_k)_{k\in[n+1]}$ und somit die Eindeutigkeitsaussage von A_{n+1} wahr.

Es bleibt, die Existenzaussage von A_{n+1} zu zeigen: Zunächst folgt aus der Existenzaussage von A_n, daß eine Familie $(p_k)_{k\in[n]}$ existiert, welche (S_n) und (R_n) erfüllt. Setzen wir $p_{n+1} \coloneqq g(n, p_n)$, so erhalten wir eine Familie $(p_k)_{k\in[n+1]}$, welche S_{n+1} und R_{n+1} erfüllt.

Insgesamt haben wir also gezeigt, daß A_{n+1} ebenfalls wahr ist.

Es bleibt, die Existenz und Eindeutigkeit einer Familie $(p_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$, welche (S_∞) und (R_∞) erfüllt, zu zeigen. Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ die abgeschnittene Familie $(p_k)_{k\in[n]}$ nach dem eben bewiesenen eindeutig bestimmt ist und damit insbesondere der Wert p_n eindeutig bestimmt ist. Die Existenz zeigen wir durch Konstruktion: Sei dazu für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ die Familie $(p_k^{(n)})_{k\in[n]}$ diejenige, deren Existenz durch A_n postuliert wird. Dann setze $p_n \coloneqq p_n^{(n)}$. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage von A_n ist $p_n^{(n+1)} = p_n^{(n)}$ und damit erfüllt $(p_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ die Bedingungen (S_∞) und (R_∞). □

Kommentar 2. In obigen Satz können wir $\mathbf{N}_0$ auch durch $\mathbf{N}_m$ mit $m \in \mathbf{Z}$ ersetzen, wenn wir mit $p_m = p^*$ starten.

Beispiele.

(a) Die *Fakultät* $n!$ ist charakterisiert durch $0! = 1$ und $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ (hierbei ist offensichtlich $g\colon \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0, (n, m) \mapsto (n+1) \cdot m$).

(b) Sei $a \in \mathbf{R}$ eine reelle Zahl. Die ganzzahligen, nicht negativen *Potenzen* von a sind durch $a^0 = 1$ und $a^{n+1} = a \cdot a^n$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ charakterisiert. Im Falle von $a \neq 0$ und $n > 0$ setzen wir zusätzlich $a^{-n} \coloneqq \frac{1}{a^n}$. Damit sind Potenzen mit allen ganzzahligen Exponenten definiert.

Eine exakte Formulierung der folgenden Definitionen benutzt ebenfalls den Satz von Dedekind über die rekursive Definition:

Definition. Seien m, $k \in \mathbf{Z}$. Seien weiter a_m, a_{m+1}, …, $a_k \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen. Dann ist

$$\sum_{n=m}^{k} a_n := \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \cdots + a_k, & \text{wenn } m < k \text{ oder } m = k, \\ 0, & \text{wenn } m > k, \end{cases}$$

und

$$\prod_{n=m}^{k} a_n := \begin{cases} a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_k, & \text{wenn } m < k \text{ oder } m = k, \\ 1, & \text{wenn } m > k. \end{cases}$$

0.9 Über die ganzen, rationalen und reellen Zahlen

Die negativen Zahlen -1, -2, -3, … wurden als fiktive Zahlen eingeführt, um die Gleichung

$$n + x = m, \quad n, m \in \mathbf{N}_0 \tag{1}$$

stets lösen zu können. (Ähnlich war der Grund für die Schöpfung der komplexen Zahlen — man beachte auch die Bezeichnung „imaginäre Zahlen“ für i, $2i$, usw.: Hier geht es um die uneingeschränkte Lösbarkeit quadratischer Gleichungen und Gleichungen höheren Grades wie zum Beispiel $x^2 + 1 = 0$.) Dadurch entsteht die Menge $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen, auf die in bekannter Weise die Addition und Multiplikation von $\mathbf{N}_0$ fortgesetzt werden kann. Die Addition in $\mathbf{Z}$ hat die Eigenschaft, daß die Gleichung (1) in $\mathbf{Z}$ immer lösbar ist.

Hingegen ist die Gleichung

$$qx = p, \quad p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0$$

in $\mathbf{Z}$ nicht uneingeschränkt lösbar. Erforderlich wird bekanntlich die Erweiterung zum Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen. Wie schon seit der Antike bekannt, gibt es jedoch z. B. in der Geometrie auftauchende Zahlen, wie etwa die Länge $\sqrt{2}$ der Diagonale eines Einheitsquadrates, welche nicht durch rationale Zahlen ausgedrückt werden können:

Proposition. In $\mathbf{Q}$ ist die Gleichung $x^2 = 2$ nicht lösbar.

In diesem Sinne hat der Körper $\mathbf{Q}$ „Lücken“. Aus diesem Grunde gilt in ihm beispielsweise auch nicht der Zwischenwertsatz. Um eine befriedigende Analysis betreiben zu können, muß $\mathbf{Q}$ durch Hinzunahme weiterer Zahlen zur Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen vervollständigt werden. Ausgehend von $\mathbf{Q}$ können die reellen Zahlen als Dedekindsche Schnitte oder als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen konstruiert werden. Sinn dieser Konstruktion ist, daß so die axiomatische Einführung der reellen Zahlen, wie wir sie in den beiden folgenden Kapiteln vornehmen werden, gerechtfertigt werden kann.

Kapitel 1

Der Körper R der reellen Zahlen

Eine *reelle Zahl* ist per definitionem ein Element einer Menge (mit Zusatzstruktur) $\mathbf{R}$, welche den in den folgenden beiden Kapiteln angegebenen Axiomen (R1)–(R13) genügt. Damit ist nicht konkret festgelegt, was eine einzelne reelle Zahl ist. Es wird aber genau festgelegt, welche Beziehungen zwischen den reellen Zahlen bestehen und wie wir mit reellen Zahlen umzugehen haben. Die Menge $\mathbf{R}$ ist durch die Axiome (R1)–(R13) im wesentlichen eindeutig bestimmt. Die Existenz einer solchen Menge postulieren wir als Axiom. (Es gibt Konstruktionsverfahren der Menge der reellen Zahlen die zeigen, daß es ausreicht, die Existenz der Menge der natürlichen Zahlen zu postulieren. Aus dieser läßt sich dann die Menge $\mathbf{R}$ konstruieren.)

Der Sinn der meisten Aussagen dieses Kapitels ist, dem Leser[1] zu versichern, daß die axiomatisch eingeführte Menge $\mathbf{R}$ die ihm vertrauten Eigenschaften hat. Insbesondere werden wir die Mengen $\mathbf{N}_0$ der natürlichen Zahlen, $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen und $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen in $\mathbf{R}$ als Teilmengen entdecken.

1.1 Die Axiome der Addition

Auf den Elementen der Menge $\mathbf{R}$ ist eine *Addition* definiert, d. h. eine Zuordnung, die jedem Paar (a, b) von Elementen a, $b \in \mathbf{R}$ ein Element $a + b \in \mathbf{R}$ zuordnet, welches die *Summe* von a und b heißt.

Weiter gibt es in $\mathbf{R}$ ein ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbf{R}$, welches *Null* heißt.

Zusätzlich ist auf den Elementen der Menge $\mathbf{R}$ eine Zuordnung definiert, die jedem Element $a \in \mathbf{R}$ ein Element $-a$ zuordnet, welches das *Negative* von a heißt.

Axiome der Addition. Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt:

(R1) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

[1] Es handelt sich hierbei offensichtlich um ein *generisches Maskulinum* und hat mit dem biologischen Geschlecht, dem *Sexus*, der angesprochenen Menge von Menschen nichts zu tun. Mit anderen Worten kann das biologische Geschlecht von „Leser“ männlich oder weiblich sein. Da der Mathematik das biologische Geschlecht reichlich egal ist, werde ich weiterhin die grammatikalisch jeweils einfachste Form verwenden.

(R2) $a + 0 = a = 0 + a$.

(R3) $a + (-a) = 0 = (-a) + a$.

(R4) $a + b = b + a$.

Das Axiom (R1) heißt auch das *Assoziativgesetz* der Addition, und Axiom (R4) heißt auch das *Kommutativgesetz* der Addition.

Proposition 1. In $\mathbf{R}$ existiert genau eine Null. Das bedeutet: Ist $n \in \mathbf{R}$ mit $\forall a \in \mathbf{R}$: $a + n = a$, so folgt schon $n = 0$.

Proposition 2. In $\mathbf{R}$ existiert zu jedem Element $a \in \mathbf{R}$ genau ein Negatives, d. h. ist $b \in \mathbf{R}$ mit $a + b = 0$, so folgt schon $b = -a$.

Definition. Anstatt $a + (-b)$ schreiben wir $a - b$.

Regeln. Für alle a, $b \in \mathbf{R}$ gilt:

(a) $-(-a) = a$.

(b) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

(c) $a = -a \iff a = 0$.

Warnung. Die Implikation $a = -a \implies a = 0$ folgt nicht allein aus den bisher vorgestellten Axiomen. Um sie zu beweisen, benötigen wir auch die Anordnungsaxiome (R10)–(R12).

Theorem. Für jedes Paar (a, b) von Elementen a, $b \in \mathbf{R}$ hat die Gleichung der Form $a + x = b$ genau eine Lösung $x \in \mathbf{R}$, nämlich $x = b - a$.

1.2 Die Axiome der Multiplikation

Auf den Elementen der Menge $\mathbf{R}$ ist eine *Multiplikation* definiert, d. h. eine Zuordnung, die jedem Paar (a, b) von Elementen a, $b \in \mathbf{R}$ ein Element $ab = a \cdot b \in \mathbf{R}$ zuordnet, welches das *Produkt* von a und b heißt.

Weiter gibt es in $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ein ausgezeichnetes Element $1 \in \mathbf{R}^*$, welches *Eins* heißt.

Zusätzlich ist auf den Elementen der Menge $\mathbf{R}^*$ eine Zuordnung definiert, die jedem Element $a \in \mathbf{R}^*$ ein Element a^{-1} zuordnet, welches das *Inverse* von a heißt.

Axiome der Multiplikation. Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt:

(R5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(R6) $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.

(R7) $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$, wenn $a \in \mathbf{R}^*$

(R8) $a \cdot b = b \cdot a$.

Das Axiom (R5) heißt auch das *Assoziativgesetz* der Multiplikation, und Axiom (R8) heißt auch das *Kommutativgesetz* der Multiplikation.

Proposition 1. In $\mathbf{R}^*$ existiert genau eine Eins. Das bedeutet: Ist $e \in \mathbf{R}^*$ mit $\forall a \in \mathbf{R} : a \cdot e = a$, so folgt schon $e = 1$.

Proposition 2. In $\mathbf{R}^*$ existiert zu jedem Element $a \in \mathbf{R}^*$ genau ein Inverses, d. h. ist $b \in \mathbf{R}^*$ mit $a \cdot b = 1$, so folgt schon $b = a^{-1}$.

Definition. Anstatt $a \cdot (b^{-1})$ schreiben wir ab^{-1}, $\frac{a}{b}$ oder a/b.

Regeln. Für alle a, $b \in \mathbf{R}^*$ gilt:

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$.

(b) $(ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

(c) $a = a^{-1} \iff a \in \{1, -1\}$.

Warnung. Obige Äquivalenz (c) folgt nicht allein aus den bisher vorgestellten Axiomen. Um sie zu beweisen, benötigen wir auch das Distributivgesetz (R9).

Theorem. Für jedes Paar (a, b) von Elementen $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$ hat die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung $x \in \mathbf{R}$, nämlich $x = b/a$.

1.3 Das Distributivgesetz

Das Distributivgesetz stellt die Verbindung zwischen Addition und Multiplikation her.

Distributivgesetz. Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt

(R9) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Regeln. Für alle a, $b \in \mathbf{R}$ gilt:

(a) $a \cdot 0 = 0$.

(b) $(-a) \cdot b = -(ab)$.

(c) $(-a)^2 = a^2$.

(d) $ab = 0 \iff (a = 0 \lor b = 0)$.

Die obige Regel (d) formuliert die sogenannte *Nullteilerfreiheit* von $\mathbf{R}$.

Warnung. Wegen obiger Regel (a) und $0 \neq 1$ ist 0^{-1} ein verbotener Ausdruck. Bei jeder Division müssen wir also sicherstellen, daß wir nicht durch Null teilen. Diese Vorschrift zu beherzigen ist mitunter gar nicht so einfach, z. B. wenn wir durch den Wert einer Funktion teilen wollen, deren Nullstellen wir nicht kennen.

Kommentar. Die bisher eingeführten Axiome (R1)–(R9) besagen gerade, daß $\mathbf{R}$ bezüglich der Addition und Multiplikation ein *Körper* ist.

1.4 Die Anordnungsaxiome

In $\mathbf{R}^*$ gibt es eine Teilmenge $\mathbf{R}_+$, deren Elemente die *positiven* reellen Zahlen heißen.

Anordnungsaxiome. Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt

(R10) $a \in \mathbf{R}^* \implies a \in \mathbf{R}_+ \vee -a \in \mathbf{R}_+$.

(R11) $a \in \mathbf{R}_+ \wedge b \in \mathbf{R}_+ \implies a + b \in \mathbf{R}_+$.

(R12) $a \in \mathbf{R}_+ \wedge b \in \mathbf{R}_+ \implies a \cdot b \in \mathbf{R}_+$.

Schreiben wir $\mathbf{R}_- := -\mathbf{R}_+ = \{-a \mid a \in \mathbf{R}_+\}$, so können wir Axiom (R10) auch in der Form $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}_+ \cup \mathbf{R}_-$ schreiben. Die Elemente von $\mathbf{R}_-$ heißen die *negativen* reellen Zahlen.

Proposition 1. Es gilt $\mathbf{R} = \mathbf{R}_- \,\dot\cup\, \{0\} \,\dot\cup\, \mathbf{R}_+$; in Worten: $\mathbf{R}$ ist die *disjunkte* Vereinigung von $\mathbf{R}_-$, $\{0\}$, $\mathbf{R}_+$, das heißt $\mathbf{R}$ ist die Vereinigung dieser drei Teilmengen und je zwei dieser drei Teilmengen haben einen leeren Durchschnitt.

Definition 1. Für a, $b \in \mathbf{R}$ definieren wir:

$$\begin{aligned}
a < b &:\iff b - a \in \mathbf{R}_+,\\
a \leq b &:\iff a < b \vee a = b,\\
a > b &:\iff b < a,\\
a \geq b &:\iff a > b \vee a = b.
\end{aligned}$$

Wir sehen, daß gilt: a ist positiv $\iff a > 0$ und a ist negativ $\iff a < 0$.

Theorem.

(a) Für jedes Paar (a, b) reeller Zahlen a, $b \in \mathbf{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a < b, \quad a = b, \quad \text{oder} \quad a > b.$$

Wir sagen auch, daß „$<$“ eine *vollständige* Ordnung auf $\mathbf{R}$ definiert.

(b) Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt: $a < b \wedge b < c \implies a < c$.

(c) Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt: $a < b \implies a + c < b + c$.

(d) Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt: $a < b \wedge 0 < c \implies ac < bc$.

Regeln. Für alle a, b, c, $d \in \mathbf{R}$ gilt:

(a) $a < b \wedge c < d \implies a + c < b + d$,

(b) $a < b \iff -b < -a$,

(c) $a < b \wedge c < 0 \implies bc < ac$,

(d) $0 < ab \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$,

(e) $a \neq 0 \iff 0 < a^2$; insbesondere gilt $0 < 1$,

(f) $0 < a < b \implies 0 < 1/b < 1/a$.

Definition 2. Unter der *Vorzeichenfunktion* oder dem *Signum* verstehen wir die Funktion

$$\operatorname{sign}\colon \mathbf{R} \to \{-1, 0, 1\}, t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } t \in \mathbf{R}_+, \\ 0 & \text{für } t = 0, \\ -1 & \text{für } t \in \mathbf{R}_-. \end{cases}$$

Damit ist auch definiert, was es heißt, wenn wir sagen, daß zwei reelle Zahlen das gleiche Vorzeichen haben.

Proposition 2. Für alle a, $b \in \mathbf{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\operatorname{sign}(a)) &= \operatorname{sign}(a), \\ \operatorname{sign}(-a) &= -\operatorname{sign}(a) \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{sign}(a \cdot b) = \operatorname{sign}(a) \cdot \operatorname{sign}(b).$$

Korollar. Für alle a, $b \in \mathbf{R}^*$ gilt:

$$a \cdot b > 0 \iff \operatorname{sign}(a) = \operatorname{sign}(b).$$

1.5 Der Betrag reeller Zahlen

Definition. Für jedes $a \in \mathbf{R}$ heißt

$$|a| := \operatorname{sign}(a) \cdot a$$

der *(Absolut-)Betrag* von a.

Offenbar gilt

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Regeln. Sind a, b, $r \in \mathbf{R}$ und $r \geq 0$, so gilt:

(a) $|a| \geq 0 \wedge \big(|a| = 0 \iff a = 0\big)$,

(b) $|-a| = |a|$,

(c) $|ab| = |a| \cdot |b|$,

(d) $|1/a| = 1/|a|$, falls $a \neq 0$,

(e) $-|a| \leq a \leq |a|$,

(f) $\big(|a| < r \iff -r < a < r\big) \wedge \big(|a| \leq r \iff -r \leq a \leq r\big)$,

(g) $\big(|a-b| < r \iff b-r < a < b+r\big) \wedge \big(|a-b| \leq r \iff b-r \leq a \leq b+r\big)$,

(h) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$,

(i) $\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b|$.

Obige Regel (h) heißt die *Dreiecksungleichung*.

Aufgabe. Es seien n, $m \in \mathbf{N}_0$ natürliche Zahlen, $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen mit $a_n = b_m = 1$ und P und Q die „Polynomfunktionen“

$$P\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \quad \text{bzw.} \quad Q\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot t^k.$$

Dann gilt:

(a) Es gibt eine Zahl $R \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $t \in \mathbf{R}$ mit $|t| \geq R$ gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot |t|^n \leq |P(t)| \leq 2 \cdot |t|^n.$$

(Tip: Man braucht nur $|t| \geq 1$ zu betrachten. Ist $M := \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$, so kann man $R := \max\{1, 2M\}$ wählen.)

(b) Zu der „gebrochen-rationalen“ Funktion $f := P/Q$ gibt es eine Zahl $R \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $t \in \mathbf{R}$ mit $|t| \geq R$ gilt:

$$\frac{1}{4} \cdot |t|^{n-m} \leq |f(t)| \leq 4 \cdot |t|^{n-m}.$$

1.6 Intervalle

Definition. Für reelle Zahlen a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$ definieren wir

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{t \in \mathbf{R} \mid a \leq t \leq b\},\\
[a,b[&:= \{t \in \mathbf{R} \mid a \leq t < b\},\\
]a,b] &:= \{t \in \mathbf{R} \mid a < t \leq b\},\\
]a,b[&:= \{t \in \mathbf{R} \mid a < t < b\},\\
[a,\infty[&:= \{t \in \mathbf{R} \mid a \leq t\},\\
]-\infty,b] &:= \{t \in \mathbf{R} \mid t \leq b\},\\
]a,\infty[&:= \{t \in \mathbf{R} \mid a < t\},\\
]-\infty,b[&:= \{t \in \mathbf{R} \mid t < b\}.
\end{aligned}$$

Ist $a = b$, so sind $[a,b] := \{a\}$ und $[a,b[:=]a,b] :=]a,b[:= \emptyset$ sogenannte *entartete Intervalle*; $\{a\}$ wird auch als ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall betrachtet.

1.7 Die Menge $\mathbf{N}_0$ der natürlichen Zahlen

Wir finden im angeordneten Körper $\mathbf{R}$ eine Menge $\mathbf{N}_0$, welche genau die Peano-Axiome aus 0.8 erfüllt.

Theorem 1. Sei $\tilde{S}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, a \mapsto a + 1$. Dann existiert genau eine Teilmenge $\mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{R}$ mit $\tilde{S}(\mathbf{N}_0) \subseteq \mathbf{N}_0$, so daß für das Tripel $(\mathbf{N}_0, S, 0)$, in welchem S die Einschränkung

$$S := \tilde{S}|\mathbf{N}_0 \colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0, a \mapsto a + 1$$

bezeichnet, die Aussagen (N1)–(N4) aus 0.8 gelten. Und zwar ist $\mathbf{N}_0$ der Durchschnitt aller Teilmengen $N \subseteq \mathbf{R}$ (und damit die kleinste dieser Teilmengen N), für welche gilt:

$$0 \in N \quad \text{und} \quad \tilde{S}(N) \subseteq N.$$

In Zukunft benutzen wir die Elemente dieser so konstruierten Menge natürlicher Zahlen zum Durchnumerieren von Folgen. Insbesondere verwenden wir in diesem Sinne die vollständige Induktion und rekursive Definition.

Regeln. Sind n, $m \in \mathbf{N}_0$, so gilt:

(a) $0 \le n < n + 1$,

(b) $n + m$, $n \cdot m \in \mathbf{N}_0$,

(c) $n \le m \iff m - n \in \mathbf{N}_0$,

(d) $\neg(n < m < n + 1)$.

1.8 Der Ring Z der ganzen Zahlen

Definition. Die Elemente von $\mathbf{Z} := \mathbf{N}_0 \cup (-\mathbf{N}_0)$ heißen die *ganzen* Zahlen.

Kommentar. Die Menge $\mathbf{Z}$ ist die kleinste Untergruppe der additiven Gruppe von $\mathbf{R}$, die die 1 enthält. In $\mathbf{Z}$ ist die Multiplikation uneingeschränkt ausführbar.

Wie die natürlichen Zahlen haben wir also die ganzen Zahlen nicht erfunden, sondern als spezielle reelle Zahlen gefunden.

1.9 Der angeordnete Körper Q der rationalen Zahlen

Definition. Eine Zahl $a \in \mathbf{R}$ heißt *rational*, wenn es p, $q \in \mathbf{Z}$ mit $q > 0$ gibt, so daß $a = p/q$. Mit $\mathbf{Q}$ bezeichnen wir die Menge der rationalen Zahlen.

Kommentar. Die Menge $\mathbf{Q}$ ist der kleinste Unterkörper von $\mathbf{R}$. In ihm gelten also die Axiome (R1)–(R9), wenn wir jeweils $\mathbf{R}$ durch $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}^*$ durch $\mathbf{Q}^*$ ersetzen. Weiterhin gelten in $\mathbf{Q}$ ebenfalls die Anordnungsaxiome (R10)–(R12), wenn wir $\mathbf{R}_+$ durch $\mathbf{Q}_+ := \mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+$ ersetzen. Folglich gelten mit den entsprechenden Modifikationen auch alle aus den Axiomen bisher abgeleiteten Aussagen. Außerdem können wir bisher offensichtlich nicht $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ ausschließen. Erst mit dem noch fehlenden Axiom (R13) wird erzwungen, daß $\mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$, daß also $\mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$.

1.10 Erweiterung der Zahlengeraden mit ∞ und $-\infty$

Definition. Sei $\widehat{\mathbf{R}}$ eine Menge, die aus $\mathbf{R}$ durch Hinzunahme zweier verschiedener Elemente $\infty, -\infty \notin \mathbf{R}$ entsteht. Dann erweitern wir die Rechenoperationen von $\mathbf{R}$ auf $\widehat{\mathbf{R}}$ für $a \in \mathbf{R}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
a + \infty &:= \infty + a := \infty, \\
a - \infty &:= (-\infty) + a := a + (-\infty) := -\infty, \\
\infty + \infty &:= \infty - (-\infty) := \infty, \\
-\infty + (-\infty) &:= (-\infty) - \infty := -\infty, \\
-(\infty) &:= -\infty, \\
|\infty| &:= |-\infty| := \infty, \\
\frac{a}{\infty} &:= \frac{a}{-\infty} := 0.
\end{aligned}$$

Für $a \in \mathbf{R}_+$ sei

$$\begin{aligned}
a \cdot \infty := \infty \cdot a := (-a) \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot (-a) := \infty \cdot \infty := (-\infty) \cdot (-\infty) := \infty, \\
(-a) \cdot \infty := \infty \cdot (-a) := a \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot a := \infty \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot \infty := -\infty
\end{aligned}$$

Weiterhin wird die Anordnung $<$ von $\mathbf{R}$ auf $\widehat{\mathbf{R}}$ durch die Festsetzung

$$-\infty < a < \infty \quad \text{und insbesondere} \quad -\infty < \infty$$

für $a \in \mathbf{R}$ fortgesetzt.

Schließlich definieren wir für jedes $a \in \mathbf{R}$ die unbeschränkten Intervalle

$$\begin{aligned}
[a, \infty] &:= [a, \infty[\cup \{\infty\}, \\
]a, \infty] &:=]a, \infty[\cup \{\infty\}, \\
[-\infty, a] &:= \{-\infty\} \cup]-\infty, a], \\
[-\infty, a[&:= \{-\infty\} \cup]-\infty, a[,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
]-\infty, \infty] &:= \mathbf{R} \cup \{\infty\}, \\
[-\infty, \infty[&:= \{-\infty\} \cup \mathbf{R}, \\
]-\infty, \infty[&:= \mathbf{R}, \\
[-\infty, \infty] &:= \widehat{\mathbf{R}}.
\end{aligned}$$

Kommentar. Undefiniert und damit verboten sind die Ausdrücke

$$\infty + (-\infty), (-\infty) + \infty, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

1.11 Die Einzigartigkeit des Körpers Q der rationalen Zahlen

Die Axiome (R1)–(R12) legen den Körper $\mathbf{Q}$ im wesentlichen fest. Genauer gilt folgender Satz:

Theorem. Es seien $\mathbf{R}$ und $\mathbf{R}'$ zwei Körper, für welche neben den Körperaxiomen (R1)–(R9) auch die Anordnungsaxiome (R10)–(R12) gelten. Nach den Konstruktionsverfahren der Abschnitte 1.7–1.9 werden auch in $\mathbf{R}'$ die Mengen der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen konstruiert; diese Mengen seien mit $\mathbf{N}_0'$, $\mathbf{Z}'$ und $\mathbf{Q}'$ bezeichnet.

Dann gibt es genau einen *Körperisomorphismus* $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}'$; das ist eine Bijektion mit folgenden Eigenschaften für alle a, $b \in \mathbf{Q}$:

(a) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,

(b) $f(1) = 1'$,

(c) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Aus der Aussage (a) folgt, daß

(d) $f(0) = 0'$ und $f(-a) = -f(a)$.

Aus den Aussagen (a), (b) und (d) folgt

(e) $f(\mathbf{N}_0) = \mathbf{N}_0'$.

Aus den Aussagen (b) und (c) folgt

(f) $f(a) \neq 0'$ und $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, wenn jeweils $a \neq 0$.

Aus den Aussagen (a)–(c) folgt schließlich

(g) $a < b \implies f(a) < f(b)$.

Kommentar. Es gibt viele Körper, welche die Axiome (R1)–(R12) erfüllen. Jeder dieser Körper enthält gemäß der Abschnitte 1.7–1.9 einen Unterkörper der rationalen Zahlen. Der soeben angegebene Satz besagt gerade, daß alle diese Unterkörper bis auf eindeutige *Isomorphie* gleich sind.

Beweisskizze zum Theorem.

0. Schritt. Zunächst beweist man, daß aus der Gültigkeit von (a) die Aussage (d) folgt.

1. Schritt. Durch rekursive Definition definiert man $f|\mathbf{N}_0$ durch $f(0) := 0'$ und

$$f(n+1) := f(n) + 1'$$

für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Dann beweist man durch vollständige Induktion die Aussagen (a)–(c) für alle a, $b \in \mathbf{N}_0$, daß man $f|\mathbf{N}_0$ so definieren muß, wenn die Aussagen (d), (b) und (a) gelten sollen, und daß Aussage (e) gilt.

2. Schritt. Man erweitere die Definition von f auf $\mathbf{Z}$ durch

$$f(-n) := -f(n)$$

für $n \in \mathbf{N}_1$. Dann beweist man die Aussagen (a) und (c) für alle $a, b \in \mathbf{Z}$ und daß man $f|\mathbf{Z}$ so definieren muß, wenn die Aussage (d) gelten soll.

3. Schritt. Sind $n_1,\ n_2 \in \mathbf{Z}$ und $m_1,\ m_2 \in \mathbf{N}_1$ und gilt $n_1/m_1 = n_2/m_2$, so zeigt man mit Aussage (c), daß auch $f(n_1)/f(m_1) = f(n_2)/f(m_2)$. Daher kann man eindeutig eine Funktion $\varphi\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}'$ durch

$$\varphi\Big(\frac{n}{m}\Big) = \frac{f(n)}{f(m)}$$

für $n \in \mathbf{Z}$ und $m \in \mathbf{N}_1$ definieren. Für $a \in \mathbf{Z}$ gilt $\varphi(a) = f(a)$. Daher bezeichnen wir diese Funktion φ jetzt mit f. Für sie gelten die Aussagen (a)–(c). Weiterhin folgt aus der Gültigkeit von (c) die Aussage (f), und daher muß man f so definieren, wenn die Aussagen (a)–(c) gelten sollen.

4. Schritt. Man beweist jetzt $f(a) > 0'$ für alle $a \in \mathbf{Q}_+$ und folgert hieraus die Aussage (g), anschließend die Injektivität von f. Die Surjektivität ergibt sich schließlich aus (e) und der Konstruktion von f. $\square$

Kapitel 2

Das Vollständigkeitsaxiom

In der Analysis machen wir die Vorstellung von „unendlich nahe bei“ präzise. Dazu werden wir den Begriff der ε-Umgebung von Punkten $a \in \widehat{\mathbf{R}}$ definieren. Außerdem wird in diesem Kapitel schließlich die Axiomatik der reellen Zahlen durch Angabe des noch fehlenden Vollständigkeitsaxioms (R13) abgeschlossen. Dazu benötigen wir noch den Begriff des Supremums und Infimums einer Teilmenge.

2.1 ε-Umgebungen

Definition. Für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ und $a \in \widehat{\mathbf{R}}$ definieren wir die ε-*Umgebung*

$$U_\varepsilon(a) := \begin{cases}]a-\varepsilon, a+\varepsilon[& \text{für } a \in \mathbf{R}, \\ ]1/\varepsilon, \infty] & \text{für } a = \infty, \\ [-\infty, -1/\varepsilon[& \text{für } a = -\infty. \end{cases}$$

Proposition. Seien a, $b \in \widehat{\mathbf{R}}$ und ε, $\delta \in \mathbf{R}_+$. Dann gilt:

(a) $a \in U_\varepsilon(a)$,

(b) $\delta < \varepsilon \implies U_\delta(a) \subseteq U_\varepsilon(a)$,

(c) $a \neq b \implies \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ : U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$.
Diese letzte Eigenschaft ist die sogenannte „Hausdorffsche Trennungseigenschaft“.

2.2 Maximum, Minimum, Supremum und Infimum

Definition 1. Es sei $M \in \mathfrak{P}(\widehat{\mathbf{R}})$.

(a) Eine Zahl $s \in \widehat{\mathbf{R}}$ heißt *obere* (bzw. *untere*) *Schranke* von M, wenn

$$\forall a \in M : a \leq s \quad \text{bzw. } a \geq s.$$

Insbesondere ist ∞ für jede Menge eine obere und $-\infty$ eine untere Schranke.

(b) Besitzt M eine obere (bzw. untere) Schranke $s \in \mathbf{R}$, so heißt M nach *oben* (bzw. *unten*) *beschränkt*. Wir nennen M *beschränkt*, wenn M nach oben und unten beschränkt ist.

(c) Eine obere (bzw. untere) Schranke s von M mit $s \in M$ heißt ein *Maximum* (bzw. *Minimum*) von M.

(d) Ist $M \neq \emptyset$, so heißt eine obere (bzw. untere) Schranke s von M ein *Supremum* (bzw. *Infimum*) von M, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon M \cap U_\varepsilon(s) \neq \emptyset.$$

Das Supremum und Infimum der leeren Menge wird im folgenden Zusatz definiert.

Ist s ein Maximum (bzw. Minimum) von M, so ist s offenbar auch ein Supremum (bzw. Infimum) von M.

Beispiel. Es ist 1

- ein Maximum von $[0, 1]$,
- kein Maximum von $[0, 1[$, aber
- ein Supremum von $[0, 1[$.

Proposition. Jede nicht leere Menge M besitzt höchstens ein Supremum (also erst recht höchstens ein Maximum) und höchstens ein Infimum (also erst recht höchstens ein Minimum). Daher können wir in Zukunft von *dem* Maximum, Minimum, Supremum und Infimum einer Menge (im Falle der Existenz, vgl. dazu auch das folgende Axiom (R13)) sprechen. Bezeichnungen: $\max(M)$, $\min(M)$, $\sup(M)$, $\inf(M)$.

Aufgabe. Für $-M \coloneqq \{-a \mid a \in M\}$ gilt: $-M$ hat genau dann ein Maximum (bzw. Supremum), wenn M ein Minimum (bzw. Infimum) hat. Im Falle der Existenz ist

$$\max(-M) = -\min(M) \quad \text{bzw. } \sup(-M) = -\inf(M).$$

Zusatz. Wir definieren $\sup(\emptyset) \coloneqq -\infty$ und $\inf(\emptyset) \coloneqq \infty$.

Definition 2. Ist M eine Menge und $n \in \mathbf{N}_0$, so definieren wir:

(a) $\{0, \ldots, n-1\} \coloneqq [0, n-1] \cap \mathbf{N}_0$.

(b) $|M| = n :\Longleftrightarrow |M| = |\{0, \ldots, n-1\}|$.

(c) $|M| < \infty :\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbf{N}_0 \colon\ |M| = n$. In diesem Falle sagen wir, M sei eine *endliche* Menge.

(d) $|M| = \infty :\Longleftrightarrow \neg(|M| < \infty)$. In diesem Falle sagen wir, M sei eine *unendliche* Menge.

Kommentar. In der Mengenlehre wird gezeigt: Ist M eine Menge und gilt sowohl $|M| = m$ als auch $|M| = n$ für $m, n \in \mathbf{N}_0$, so ist $m = n$ (*Dirichletscher Schubfächersatz*); in diesem Falle heißt n die *Anzahl* der Elemente von M.

Theorem (Existenz von Maxima und Minima)**.**

(a) Jede endliche, nicht leere Teilmenge von $\mathbf{R}$ hat ein Maximum und ein Minimum.

(b) Jede nicht leere Teilmenge von $\mathbf{N}_0$ hat ein Minimum.

2.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Wir kommen schließlich zum letzten Axiom, welches die Menge der reellen Zahlen erfüllen soll.

Vollständigkeitsaxiom.

(R13) Jede Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ von $\mathbf{R}$ besitzt ein Supremum (u. U. $\pm\infty$).

Ein angeordneter Körper, der wie $\mathbf{R}$ das Vollständigkeitsaxiom erfüllt, heißt ein *vollständiger angeordneter Körper*. Wir kommen später in Abschnitt 2.6 auf die Einzigartigkeit von $\mathbf{R}$ zu sprechen.

Korollar 1. Jede Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ von $\mathbf{R}$ besitzt ein Infimum.

Korollar 2. Zu jeder Zahl $a \in [0, \infty[$ existiert genau eine Zahl $b \in [0, \infty[$, so daß $b^2 = a$ gilt; diese Zahl b heißt die *Quadratwurzel* von a; sie wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.

Beweisidee. Für $a \in \mathbf{R}_+$ ist $\sqrt{a} \in \mathbf{R}_+$ das Supremum der nicht leeren Menge $\{t \in [0, \infty[\mid t^2 \leq a\}$. □

Kommentar. Es ist nicht möglich, die Existenz der Quadratwurzeln ohne das Axiom (R13) zu beweisen. Wenn dies doch ginge, könnten wir beweisen, daß der Körper $\mathbf{Q}$, in welchem ja die anderen Axiome (R1)–(R12) erfüllt sind, die Quadratwurzel $\sqrt{2}$ enthielte, was ja nach der Proposition aus 0.9 nicht der Fall ist.

Solche Unabhängigkeitsbeweise für ein Axiomensystem sind manchmal sehr schwer. So wurde 2000 Jahre lang versucht, das „Parallelaxiom" aus den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie herzuleiten, bis Anfang des 19. Jahrhunderts mit der Entdeckung der hyperbolischen Geometrie eingesehen wurde, daß das Parallelenaxiom von den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie unabhängig ist.

Aufgabe (Alternative Beschreibung des Supremums)**.**

(a) Sei Σ die Menge aller oberen Schranken einer beliebigen Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ von $\mathbf{R}$ ($M = \emptyset$ ist ausdrücklich zugelassen). Dann besitzt Σ ein Minimum, und zwar ist $\min(\Sigma) = \sup(M)$. Eine entsprechende Aussage gilt für das Infimum. Also:

- $\sup(M)$ ist die kleinste obere Schranke und
- $\inf(M)$ ist die größte untere Schranke von M.

(b) Eine nicht leere Menge $M \subseteq \mathbf{R}$ ist genau dann nach oben beschränkt, wenn $\sup(M) < \infty$ ist.

2.4 Der Satz des Archimedes

Definition. Wir sagen, eine Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ liegt *dicht* in $\mathbf{R}$, wenn

$$\forall a \in \mathbf{R}\, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ : U_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset.$$

Theorem. Die Menge $\mathbf{N}_0$ der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt[1], d. h.

$$\forall a \in \mathbf{R}\, \exists n \in \mathbf{N}_0 : a < n.$$

Daher gilt auch

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists n \in \mathbf{N}_1 : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Kommentar. Es existieren angeordnete Körper (die also die Axiome (R1)–(R12) erfüllen), z. B. die Körper der hyperreellen Zahlen der Nichtstandardanalysis, in welchen beide Teile des Satzes von Archimedes falsch sind.

Korollar. In $\mathbf{R}$ liegen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, die Menge der *irrationalen* Zahlen, dicht.

2.5 Die Mächtigkeit spezieller Mengen

Definition. Für jede Menge M definieren wir:

(a) M ist *abzählbar*, wenn $|M| = |\mathbf{N}_0|$.

(b) M ist *höchstens abzählbar*, wenn $|M| < \infty$ oder $|M| = |\mathbf{N}_0|$.

(c) M ist *überabzählbar*, wenn M nicht höchstens abzählbar ist.

Theorem 1. Die Mengen $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ und $\mathbf{Q}$ sind abzählbar.

Theorem 2. Die Menge $\mathbf{R}$ ist überabzählbar.

Der folgende Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbf{R}$, der erste Beweis dafür überhaupt, wurde 1873 von Georg Cantor gegeben.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, daß es zu je endlich vielen reellen Zahlen eine weitere von diesen verschiedene gibt. Damit kann jedenfalls $|\mathbf{R}| < \infty$ nicht gelten. Nehmen wir als nächstes an, daß $\mathbf{R}$ abzählbar ist. Dies wollen wir zum Widerspruch führen. Sei also x_0, x_1, x_2, ... eine Abzählung von $\mathbf{R}$ (das heißt, die Folge $(x_k)_{k \in \mathbf{N}_0}$ reeller $x_k \in \mathbf{R}$ vermittelt eine Bijektion $\mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß $x_0 < x_1$ (ansonsten vertauschen wir die ersten beiden Folgenglieder).

Wir konstruieren daraus zwei Folgen $(i_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ und $(j_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ natürlicher Zahlen i_n, $j_n \in \mathbf{N}_0$ vermöge rekursiver Definition wie folgt: Wir setzen $i_0 := 0$ und $j_0 := 1$, so daß insbesondere $x_{i_0} < x_{j_0}$ nach Annahme an die Folge $(x_k)_{k \in \mathbf{N}_0}$.

[1] Dieses Theorem war schon Eudoxos von Knidos, etwa 408–355 v. Chr., bekannt. Da Archimedes von 287–212 v. Chr. gelebt hat, ist die Bezeichnung des Satzes nach Archimedes eigentlich nicht korrekt.

Seien i_n und j_n schon konstruiert. Da zwischen zwei reellen Zahlen unendlich viele weitere reelle Zahlen liegen und die Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$ nach Voraussetzung alle reellen Zahlen durchläuft, existieren $i_{n+1} \in \mathbf{N}_0$ minimal mit $x_{i_n} < x_{i_{n+1}} < x_{j_n}$ und dann $j_{n+1} \in \mathbf{N}_0$ minimal mit $x_{i_{n+1}} < x_{j_{n+1}} < x_{j_n}$. Nach Konstruktion sind $(i_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ und $(j_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ jeweils streng monoton wachsende Folgen natürlicher Zahlen für die

$$\forall k \in \mathbf{N}_0 \colon k < i_n \implies x_k < x_{i_n} \vee x_k > x_{j_n} \tag{0}$$

für alle $n \in \mathbf{N}_0$ gilt.

Sei $a := \sup(\{x_{i_n} \mid n \in \mathbf{N}_0\})$. Nach Konstruktion ist

$$\forall n, m \in \mathbf{N}_0 \colon x_{i_n} < a < x_{j_m}$$

und insbesondere $a \in \mathbf{R}$. Da das Bild der Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$ die Menge aller reeller Zahlen ist, existiert somit ein $\ell \in \mathbf{N}_0$ mit $x_\ell = a$. Sei dann $n \in \mathbf{N}_0$ mit $\ell < i_n$. Wegen (2.5) gilt $a < x_{i_n}$ oder $a > x_{j_n}$. Dies ist in jedem Falle ein Widerspruch. Also kann unsere Annahme nicht stimmen und die Menge der reellen Zahlen ist folglich überabzählbar. □

Korollar. Die Menge $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ist überabzählbar.

Kommentar. Die sogenannte *Kontinuumshypothese* besagt, daß für jede überabzählbare Teilmenge M von $\mathbf{R}$ schon $|M| = |\mathbf{R}|$ gilt, daß es also keine Mächtigkeiten zwischen der Mächtigkeit von $\mathbf{N}_0$ und der Mächtigkeit des Kontinuums (das ist die Mächtigkeit von $\mathbf{R}$) gibt. Durch Arbeiten von Kurt Gödel und Paul Cohen ist inzwischen bekannt, daß die Gültigkeit dieser Hypothese nicht im Rahmen der Zermelo–Fraenkelschen Mengenlehre (und damit insbesondere auch nicht im Rahmen der bisher vorgestellten mengentheoretischen Axiome) entschieden werden kann.

2.6 Einzigartigkeit von R

Wir setzen jetzt die Untersuchung von Abschnitt 1.11 fort. Die Bezeichnungen seien wie dort. Insbesondere sei f der dort definierte Körperisomorphismus $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}'$. Zusätzlich setzen wir aber voraus, daß die Körper $\mathbf{R}$ und $\mathbf{R}'$ auch noch das Axiom (R13) erfüllen. Dann gilt:

Theorem 1. Es gibt genau einen *Isomorphismus angeordneter Körper* $g \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$; also eine Bijektion mit folgenden Eigenschaften für alle a, $b \in \mathbf{R}$:

(a) $g(a + b) = g(a) + g(b)$,

(b) $g(1) = 1'$,

(c) $g(a \cdot b) = g(a) \cdot g(b)$,

welche *streng monoton wachsend* ist, also

(d) $a < b \implies g(a) < g(b)$.

Beweisskizze. Natürlich werden im folgenden die Eigenschaften der Abbildung f aus dem Theorem aus Abschnitt 1.11 vollumfänglich ausgenutzt. Zur Konstruktion von g definieren wir für jedes $a \in \mathbf{R}$ die Mengen

$$M(a) := \{q \in \mathbf{Q} \mid q \leq a\} \qquad \text{und} \qquad N(a) := \{q \in \mathbf{Q} \mid q \geq a\}.$$

Nun zeigt man, daß

$$g(a) := \sup f(M(a)) \qquad \text{und} \qquad h(a) := \inf f(N(a))$$

dieselbe Zahl aus $\mathbf{R}'$ sind. Warum dann die unterschiedlichen Definitionen für diese Zahl? Weil man damit leicht zeigen kann:

- $g(a) = h(a) = f(a)$ für alle $a \in \mathbf{Q}$,
- $g(a) + g(b) \leq g(a+b)$ und $h(a+b) \leq h(a) + h(b)$ für alle $a, b \in \mathbf{R}$,
- $g(a) \cdot g(b) \leq g(a \cdot b)$ und $h(a \cdot b) \leq h(a) \cdot h(b)$ für alle $a, b \in \mathbf{R}_+$,
- $h(a) < g(b)$ für alle $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$.

Aus diesen Eigenschaften folgen unmittelbar die Eigenschaften (a)–(d) des Theorems. Da nach dem Theorem aus 1.11 die Abbildung $g|\mathbf{Q} = f$ durch die Bedingungen (a)–(c) eindeutig festgelegt ist, sieht man leicht, daß nur die von uns definierte Funktion g auch noch die Bedingung (d) erfüllt.

Es bleibt also nur noch die Bijektivität von g zu beweisen. Die Injektivität von g folgt natürlich sofort aus (d). Mehr Arbeit hat man mit der Surjektivität. Oder doch nicht? Hier ein einfaches, wenn auch abstraktes Argument. Entsprechend zur Konstruktion von g konstruieren wir *die* Abbildung $g' \colon \mathbf{R}' \to \mathbf{R}$, welche mutatis mutandis die Bedingungen (a)–(d) erfüllt. Dann besitzt neben $\mathrm{id}_{\mathbf{R}'}$ auch die Komposition $g \circ g' \colon \mathbf{R}' \to \mathbf{R}'$ die Eigenschaften (a)–(d). Da es aber nur eine Abbildung $\mathbf{R}' \to \mathbf{R}'$ gibt, welche die Bedingungen (a)–(d) erfüllt, ist $g \circ g' = \mathrm{id}_{\mathbf{R}'}$. Hieraus folgt die Surjektivität von g nach der Proposition 4 aus 0.5. $\square$

Proposition. Die Bedingung (d) im Theorem folgt bereits aus (a) und (c).

Beweis. Wir benutzen das Korollar 2 aus 2.3. Sind $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$, so existiert ein $c \in \mathbf{R}_+$ mit $c^2 = b - a$. Daher folgt mit (c): $g(b-a) = g(c^2) = g(c)^2 > 0$, wobei der Fall $g(c)^2 = 0$ nicht eintreten kann, weil $g(0) = 0'$ und g injektiv ist, also $g(c) \neq 0'$. Wegen (a) ist daher $g(b) - g(a) > 0$, also $g(a) < g(b)$. $\square$

Nachdem wir die Einzigartigkeit eines vollständigen angeordneten Körpers $\mathbf{R}$ festgestellt haben, stellen wir seine Existenz schließlich durch ein weiteres mengentheoretisches Axiom sicher:

Unendlichkeitsaxiom. Es existiert ein vollständiger angeordneter Körper.

Der Grund für den Namen dieses Axioms ist der, daß aus den bis dahin vorgestellten mengentheoretischen Axiomen nicht die Existenz einer unendlichen Menge gefolgert werden kann. Dagegen ist $\mathbf{R}$ eine unendliche Menge.

Kapitel 3

Metrische Räume und stetige Abbildungen

3.1 Metrische Räume

Definition 1. Seien E eine Menge und $d\colon E \times E \to \mathbf{R}$ eine Funktion. Dann heißt d eine *Metrik* oder *Distanzfunktion* auf E und das Paar (E, d) ein *metrischer Raum*, wenn für d die folgenden Axiome gelten:

(M0) $d \geq 0$, d. h. $\forall p, q \in E\colon d(p, q) \geq 0$.

(M1) $\forall p, q \in E\colon \big(d(p, q) = 0 \iff p = q\big)$,

(M2) $\forall p, q \in E\colon d(p, q) = d(q, p)$,

(M3) $\forall p, q, z \in E\colon d(p, z) \leq d(p, q) + d(q, z)$.

Die Ungleichung in (M3) heißt auch die *Dreiecksungleichung* für metrische Räume.

Anstatt zu sagen, daß (E, d) ein metrischer Raum ist, werden wir auch sagen, daß E ein metrischer Raum mit Metrik d sei oder noch kürzer, daß E ein metrischer Raum ist, dessen Metrik wir dann in der Regel mit d bezeichnen.

Beispiele.

(a) $E := \mathbf{R}$ mit $d(a, b) := |b - a|$.

(b) $E := \mathbf{R}^2$ mit $d(p, q) := \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$. Dieses ist nicht die einzige sinnvolle Metrik auf $\mathbf{R}^2$ und wir werden in Abschnitt 3.3 eine andere als diese *euklidische* Metrik auf $\mathbf{R}^2$ einführen, aber auch zeigen, daß der Stetigkeitsbegriff für beide Metriken übereinstimmt.

Definition 2. Ist E ein metrischer Raum, so definieren wir für jedes $p \in E$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ die ε*-Umgebung*

$$U_\varepsilon(p) := \{q \in E \mid d(p, q) < \varepsilon\}.$$

Offensichtlich stimmt diese Definition für $E = \mathbf{R}$ mit der Definition in Abschnitt 2.1 überein. Wie dort, gilt auch allgemeiner hier:

Hausdorffsche Trennungseigenschaft. Sei E ein metrischer Raum. Dann gilt:

$$\forall p, q \in E\colon \left(p \neq q \implies \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ : U_\varepsilon(p) \cap U_\varepsilon(q) = \emptyset\right).$$

3.2 Stetige Abbildungen

Im folgenden betrachten wir zwei metrische Räume E und $\tilde{E}$, deren ε-Umgebungen wir zur Verdeutlichung mit $U_\varepsilon(p)$ und $\tilde{U}_\varepsilon(q)$ ausnahmsweise unterschiedlich bezeichnen.

Definition. Sei $f\colon E \to \tilde{E}$ eine Abbildung, und sei $p_0 \in E$ ein Punkt in E.

(a) Es heißt f in p_0 *stetig*, falls $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ : f(U_\delta(p_0)) \subseteq \tilde{U}_\varepsilon(f(p_0))$.

(b) Es heißt f *stetig*, falls f in allen Punkten $p \in E$ stetig ist.

Anschaulich gesprochen wird in (a) folgendes formuliert: Mit $\tilde{U}_\varepsilon(f(p_0))$ wird ein „Toleranzbereich“ um den Wert $f(p_0)$ vorgegeben. Stetigkeit von f an p_0 garantiert mir, daß es hierzu einen „Toleranzbereich“ $U_\delta(p_0)$ um die Stelle p_0 gibt, so daß $f(p)$ für $p \in U_\delta(p_0)$ sicher im Toleranzbereich $\tilde{U}_\varepsilon(f(p_0))$ um $f(p_0)$ liegt.

Umformulierung der Stetigkeit in einem Punkt im Falle einer Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Es ist f genau dann in $t_0 \in \mathbf{R}$ stetig, falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall t \in \mathbf{R}\colon \big(|t - t_0| < \delta \implies |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon\big).$$

Beispiele.

(a) Jede konstante Abbildung $E \to \tilde{E}$ ist stetig.

(b) Die Identität $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ ist stetig.

Insbesondere ist die Abbildung

$$x\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto t$$

stetig.

Festsetzung. Ab sofort bezeichnen wir mit x immer die Identität von $\mathbf{R}$.

(c) Die Funktion

$$|x| : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto |t|$$

ist stetig.

Theorem (Komposition stetiger Abbildungen)**.** Es seien E, E' und E'' metrische Räume, $p_0 \in E$, $g\colon E \to E'$ eine in p_0 stetige Abbildung und $f\colon E' \to E''$ eine in $g(p_0)$ stetige Abbildung. Dann ist $f \circ g\colon E \to E''$ in p_0 stetig.

Korollar. Ist $f\colon E \to \mathbf{R}$ eine in p_0 stetige Funktion, so ist $|f| : E \to \mathbf{R}, p \mapsto |f(p)|$ auch in p_0 stetig.

3.3 Produkträume

Definition. Sei $n \in \mathbf{N}_2$. Weiter seien (E_i, d_i) für $i = 1, 2, \ldots, n$ metrische Räume. Dann wird auf dem *Produktraum*

$$E := \prod_{i=1}^{n} E_i := \{p = (p_i) = (p_i)_{i=1,2,\ldots,n} \mid p_i \in E_i \text{ für alle } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

durch

$$d(p, q) := \max\{d_i(p_i, q_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

eine Metrik definiert.

Die ε-Umgebung von $p \in E$ ist

$$U_\varepsilon(p) = \prod_{i=1}^{n} U_\varepsilon^i(p_i).$$

Im Falle $n = 2$ haben wir $\prod_{i=1}^{2} E_i = E_1 \times E_2$.

Insbesondere erhalten wir auf dem $\mathbf{R}^n$ eine Metrik durch

$$d(p, q) := \max\{|q_i - p_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Umformulierung der Stetigkeit in einem Punkt im Falle einer Funktion $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Es ist f genau dann in $a \in \mathbf{R}^n$ stetig, falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall b \in \mathbf{R}^n \colon \\ \Big((\forall i = 1, 2, \ldots, n\colon \ |b_i - a_i| < \delta) \implies |f(b) - f(a)| < \varepsilon \Big).$$

Proposition 1. In der in der Definition beschriebenen Situation ist für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die *kanonische Projektion*

$$\mathrm{pr}_k\colon E \to E_k, (p_i) \mapsto p_k$$

stetig.

Festsetzung. Im Spezialfall $E = \mathbf{R}^n$ bezeichnen wir die kanonische Projektion $\mathrm{pr}_k\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit x_k; wir nennen sie auch die k-te *Koordinatenfunktion*. Sie ist also stetig. Im Falle $n = 2$ schreiben wir auch $x := x_1$ und $y := x_2$; im Falle $n = 3$ auch $x := x_1$, $y := x_2$ und $z := x_3$.

Proposition 2. In der in der Definition beschriebenen Situation sei D ein weiterer metrischer Raum, und für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ sei $f_i\colon D \to E_i$ eine Abbildung. Dann können wir

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)\colon D \to E, p \mapsto (f_i(p))_{i=1,2,\ldots,n}$$

definieren. Damit gilt für jedes $p_0 \in D$: Es ist f genau dann in p_0 stetig, wenn für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ die Abbildung f_i in p_0 stetig ist.

Dieses Kriterium findet besonders für Abbildungen $f = (f_1, \dots, f_n)\colon D \to \mathbf{R}^n$ Verwendung.

Aufgabe 1. Es seien E' und E'' metrische Räume, $E := E' \times E''$ ihr metrischer Produktraum und $q \in E''$ ein fester Punkt. Man zeige, daß dann die Abbildung

$$i^q\colon E' \to E, p \mapsto (p, q)$$

stetig ist.

Aufgabe 2. Man zeige, daß für jeden metrischen Raum (E, d) gilt:

(a) Für jedes Quadrupel (p, q, p_0, q_0) von Punkten aus E gilt

$$|d(p, q) - d(p_0, q_0)| \leq d(p, p_0) + d(q, q_0).$$

Daher (?) ist $d\colon E \times E \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion.

(b) Es sei $A \in \mathfrak{P}(E)$ eine nicht leere Teilmenge. Für jedes $p \in E$ sei

$$\operatorname{dist}(p, A) := \inf\{d(p, q) \mid q \in A\}$$

die sogenannte *Distanz* von p zu A. Zeige, daß die Funktion

$$f\colon E \to \mathbf{R}, p \mapsto \operatorname{dist}(p, A)$$

stetig ist.

(Tip: Man überlege sich, daß $\forall a \in A\colon \operatorname{dist}(q, A) \leq d(q, p) + d(p, a)$ und $\operatorname{dist}(q, A) - \operatorname{dist}(p, A) \leq d(p, q)$.)

3.4 Verschiedene Metriken im $\mathbf{R}^n$

Aufgabe. Für $v = (v_i) \in \mathbf{R}^n$ definieren wir

$$\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\} \quad \text{und} \quad \|v\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

Offenbar ist dann

$$d(u, v) := \|v - u\|_\infty$$

die in 3.3 eingeführte Metrik des $\mathbf{R}^n$. Durch

$$\tilde{d}(u, v) := \|v - u\|_2$$

wird eine weitere Metrik des $\mathbf{R}^n$, die sogenannte *euklidische* Metrik definiert. Die ε-Umgebungen bezüglich d und $\tilde{d}$ werden im folgenden mit $U_\varepsilon(p)$ bzw. $\tilde{U}_\varepsilon(p)$ bezeichnet. Man zeige:

(a) $\forall v \in \mathbf{R}^n \colon c\,\|v\|_2 \leq \|v\|_\infty \leq C\,\|v\|_2$ mit $c := 1/\sqrt{n}$ und $C := 1$.

Sind die beiden Abschätzungen scharf, d. h. wird die Aussage falsch, wenn wir c durch eine größere bzw. C durch eine kleinere Konstante ersetzen?

(b) $\forall v \in \mathbf{R}^n\, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon \tilde{U}_\varepsilon(v) \subseteq U_\varepsilon(v) \subseteq \tilde{U}_{\varepsilon\sqrt{n}}(v)$.

(c) Sei E ein weiterer metrischer Raum. Dann gilt:

(i) Eine Abbildung $f \colon E \to \mathbf{R}^n$ ist genau dann in $p_0 \in E$ bezüglich d stetig, wenn f in p_0 bezüglich $\tilde{d}$ stetig ist.

(ii) Eine Abbildung $g \colon \mathbf{R}^n \to E$ ist genau dann in $v_0 \in \mathbf{R}^n$ bezüglich d stetig, wenn g in v_0 bezüglich $\tilde{d}$ stetig ist.

3.5 Stetigkeit der Addition und Multiplikation

Theorem. Die Addition und Multiplikation sind stetige Funktionen $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

Definition. Sei M eine Menge, und seien $f, g \colon M \to \mathbf{R}$ Funktionen und $c \in \mathbf{R}$. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned}
f + g &\colon M \to \mathbf{R}, p \mapsto f(p) + g(p),\\
f - g &\colon M \to \mathbf{R}, p \mapsto f(p) - g(p),\\
f \cdot g &\colon M \to \mathbf{R}, p \mapsto f(p) \cdot g(p),\\
f/g &\colon M \to \mathbf{R}, p \mapsto f(p)/g(p), \quad \text{falls } g(p) \neq 0 \text{ für alle } p \in M\\
c \cdot f &\colon M \to \mathbf{R}, p \mapsto c \cdot f(p),
\end{aligned}$$

und

$$-f \colon M \to \mathbf{R}, p \mapsto -f(p).$$

Natürlich ist $c \cdot f = g \cdot f$ mit der Funktion $g \equiv c$, $-f = (-1) \cdot f$, $f - g = f + (-g)$ und $f/g = f \cdot (1/g)$.

Korollar. Ist E ein metrischer Raum, und sind $f, g \colon E \to \mathbf{R}$ Funktionen, die in $p_0 \in E$ stetig sind, und ist $\alpha \in \mathbf{R}$, so sind auch die Funktionen

$$f + g, f \cdot g, \alpha \cdot f, \quad \text{und} \quad -f$$

in p_0 stetig. Folglich ist die Menge $C(E) := C(E, \mathbf{R})$ der stetigen Funktionen $E \to \mathbf{R}$ ein reeller Vektorraum, ja sogar eine $\mathbf{R}$-Algebra.

3.6 Polynomfunktionen

Theorem. Jede *Polynomfunktion* (wir sprechen oft auch — nicht ganz korrekt — von *Polynom*)

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

mit $n \in \mathbf{N}_0$ und $a_k \in \mathbf{R}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ ist stetig.

Polynomfunktionen heißen auch *ganzrationale* Funktionen.

Proposition 1. Sind P und Q Polynomfunktionen und ist $\alpha \in \mathbf{R}$, so sind auch

$$P + Q, P \cdot Q, \alpha \cdot P \quad \text{und} \quad P \circ Q$$

Polynomfunktionen.

Satz vom Koeffizientenvergleich. Die Funktionen $f = 1, x, x^2, \ldots$ sind als Elemente des $\mathbf{R}$-Vektorraumes $C(\mathbf{R})$ linear unabhängig. Anders ausgedrückt:

Sind $n, m \in \mathbf{N}_0, a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbf{R}$, ist $n \leq m$ und gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot x^k,$$

so ist $a_k = b_k$ für $k = 0, \ldots, n$ und $b_{n+1} = \cdots = b_m = 0$.

Kommentar 1. Der Satz vom Koeffizientenvergleich ist für Polynome über beliebigen Körpern im allgemeinen falsch. Genauer: Er ist falsch über endlichen Körpern. In diesem Falle müssen wir zwischen Polynomen und den durch sie definierten Polynomfunktionen unterscheiden: Unterschiedliche Polynome können die gleichen Polynomfunktionen definieren.

Der Grad einer Polynomfunktion. Ist $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, so heißt

$$\deg P \coloneqq \sup\{k \in \{0, \ldots, n\} \mid a_k \neq 0\}$$

der *Grad* von P. Wir stellen fest, daß

$$P \equiv 0 \iff \deg P = -\infty.$$

Proposition 2. Sind P und Q Polynomfunktionen und $\alpha \in \mathbf{R}^*$, so gilt:

$$\begin{aligned} \deg(\alpha \cdot P) &= \deg P, \\ \deg(P + Q) &\leq \max\{\deg P, \deg Q\}, \\ \deg(P \cdot Q) &= \deg P + \deg Q. \end{aligned}$$

Der euklidische Divisionsalgorithmus. Sind P und Q Polynomfunktionen und ist $Q \not\equiv 0$, so existiert genau ein Paar (S, R) von Polynomfunktionen mit

$$P = S \cdot Q + R \quad \text{und} \quad \deg R < \deg Q.$$

Korollar 1. Ist $\alpha \in \mathbf{R}$ eine *Nullstelle* einer Polynomfunktion P (d. h. $P(\alpha) = 0$), so existiert genau eine Polynomfunktion Q, so daß gilt

$$P = (x - \alpha) \cdot Q.$$

Korollar 2. Jede Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbf{N}_0$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Kommentar 2. Die Funktion $x^2 + 1$ vom Grad 2 hat keine „reellen" Nullstellen. Im Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen hat jedoch jede nicht konstante Polynomfunktion mindestens eine Nullstelle. Das ist die Aussage des sogenannten *Fundamentalsatzes der Algebra*.

3.7 Metrische Teilräume

Definition. Sei (E, d) ein metrischer Raum und $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge von E. Dann ist

$$d_M := d|(M \times M)$$

eine Metrik auf M. Der metrische Raum (M, d_M) heißt ein (metrischer) *Teilraum* von (E, d). Seine ε-Umgebungen sind offensichtlich durch

$$U_\varepsilon^M(p) = U_\varepsilon^E(p) \cap M$$

gegeben, wobei der oben stehende Index angibt, aus welchem Raum die jeweilige ε-Umgebung genommen wird. Daher ist die Inklusion $M \hookrightarrow E$ trivialerweise eine stetige Abbildung.

Proposition. Ist E' ein weiterer metrischer Raum, so gilt:

(a) Für jede in $p_0 \in M$ stetige Abbildung $f\colon E \to E'$ ist die Restriktion auf M, $f|M\colon M \to E'$, ebenfalls in p_0 stetig.

(b) Eine Abbildung $f\colon M \to E'$ ist genau dann in $p_0 \in M$ stetig, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \colon f(U_\delta^E(p_0) \cap M) \subseteq U_\varepsilon(f(p_0)).$$

(c) Ist $f\colon E' \to E$ eine in $p_0 \in E'$ stetige Abbildung mit $f(E') \subseteq M$, so ist f auch als Abbildung $E' \to M$ in p_0 stetig.

Aufgabe 1. Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft, d. h.: Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen E und E', $f\colon E \to E'$, ist in $p_0 \in E$ stetig, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ gibt, so daß $f|U_\varepsilon(p_0)$ in p_0 stetig ist.

Insbesondere wissen wir jetzt auch, was unter der Stetigkeit einer Funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$, die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ definiert ist, zu verstehen ist.

Aufgabe 2 (Aneinanderheften stetiger Funktionen)**.** Es seien a, b, $c \in \mathbf{R}$ Zahlen mit $a < b < c$, E ein metrischer Raum, sowie $f\colon [a,b] \to E$ und $g\colon [b,c] \to E$ stetige Abbildungen mit $f(b) = g(b)$. Man zeige, daß dann genau eine stetige Abbildung $h\colon [a,c] \to E$ mit

$$h|[a,b] = f \quad \text{und} \quad h|[b,c] = g$$

existiert.

3.8 Stetigkeit rationaler Funktionen

Theorem. Die Funktion $1/x\colon \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ ist stetig.

Korollar 1. Ist E ein metrischer Raum, sind f, $g\colon E \to \mathbf{R}$ in $p_0 \in E$ stetige Funktionen und gilt $g(p_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$f/g\colon E \setminus V(g) \to \mathbf{R}, p \mapsto f(p)/g(p)$$

in p_0 stetig. Hierbei bezeichnet $V(g)$ die *Nullstellen-* oder *Verschwindungsmenge* von g, also

$$V(g) := g^{-1}(\{0\}) = \{p \in E \mid g(p) = 0\}.$$

Korollar 2. Jede *rationale Funktion*, d. h. jede Funktion, welche sich als Quotient P/Q zweier Polynomfunktionen P und Q mit $Q \not\equiv 0$ schreiben läßt, ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich $\mathbf{R} \setminus V(Q)$ stetig.

Es sei beachtet, daß bei der Definition rationaler Funktionen auch $Q \equiv 1$ zugelassen ist; Polynomfunktionen sind also spezielle rationale Funktionen.

3.9 Der Zwischenwertsatz

Theorem. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall, und sei c ein Wert echt zwischen $f(a)$ und $f(b)$, d. h. es gilt $f(a) < c < f(b)$ oder $f(b) < c < f(a)$. Dann existiert ein $t_0 \in \,]a,b[$ mit $f(t_0) = c$.

Der erste Beweis des Zwischenwertsatzes wurde 1817 von Bernard Bolzano gegeben.

Korollar 1. Ist I ein Intervall von $\mathbf{R}$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion ohne Nullstellen und nimmt f an *einer* Stelle einen positiven Wert an, so ist f *überall* positiv.

Korollar 2. Jede Polynomfunktion ungeraden Grades besitzt mindestens eine Nullstelle.

Aufgabe 1 (Charakterisierung von Intervallen)**.** Für jede nicht leere Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}) \setminus \{\emptyset\}$ von $\mathbf{R}$ sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

(a) Für je zwei Zahlen a, $b \in M$ mit $a < b$ gilt $[a,b] \subseteq M$.

(b) Es gilt $]\inf(M), \sup(M)[\, \subseteq M$.

(c) M ist ein Intervall.

(Tip: (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) $\implies$ (a); man beachte, daß auf jeden Fall $M \subseteq [\inf(M), \sup(M)]$ gilt.)

Aufgabe 2 (Intervalltreue stetiger Funktionen)**.** Ist I ein Intervall von $\mathbf{R}$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion, so ist auch das Bild $f(I)$ von I ein Intervall.

Aufgabe 3 (Der eindimensionale Spezialfall des Brouwerschen Fixpunktsatzes)**.** Sei $n \in \mathbf{N}_1$, und sei $\mathbf{B}^n$ die *Einheitsvollkugel* des $\mathbf{R}^n$ mit Mittelpunkt 0, präzise $\mathbf{B}^n = \{p \in \mathbf{R}^n \mid \|p\|_2 \leq 1\}$. Der *Brouwersche Fixpunktsatz* besagt, daß jede stetige Abbildung $f\colon \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ mindestens einen *Fixpunkt* $p_0 \in \mathbf{B}^n$ besitzt, d. h. also, daß ein $p_0 \in \mathbf{B}^n$ mit $f(p_0) = p_0$ existiert. Für $n \geq 2$ ist der Beweis schwer; man benutzt Methoden der algebraischen Topologie. Man beweise den Fall $n = 1$.

(Tip: $g = x - f$.)

3.10 Monotone Funktionen

Definition. Sei $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ eine Teilmenge von $\mathbf{R}$. Dann heißt eine Funktion $f\colon M \to \mathbf{R}$ *streng monoton wachsend* (bzw. *fallend*), wenn gilt:

$$\forall t, s \in M\colon \big(t < s \implies f(t) < f(s) \quad (\text{bzw. } f(t) > f(s))\big).$$

Steht in dieser Defintion $f(t) \leq f(s)$ (bzw. $f(t) \geq f(s)$) anstatt der strikten Ungleichung, so sprechen wir von einer *monoton wachsenden* (bzw. *fallenden*) Funktion.

Proposition. Ist $f\colon M \to \mathbf{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend), so ist f injektiv, und die Umkehrfunktion $\check{f}\colon f(M) \to \mathbf{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Theorem 1. Ist I ein Intervall von $\mathbf{R}$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine Funktion, so gilt:

(a) Ist f stetig und injektiv, so ist f streng monoton wachsend oder fallend.

(b) Ist f streng monoton wachsend oder fallend, so ist die zugehörige Umkehrfunktion $\check{f}\colon f(I) \to \mathbf{R}$ stetig.

Korollar. Ist $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine stetige injektive Funktion auf einem Intervall I von $\mathbf{R}$, so ist die Umkehrfunktion $\check{f}\colon f(I) \to \mathbf{R}$ ebenfalls stetig.

Theorem 2. Es sei $n \in \mathbf{N}_1$ eine positive natürliche Zahl.

(a) Ist n gerade, so ist $x^n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine *gerade* Funktion, d. h.

$$\forall t \in \mathbf{R}\colon x^n(-t) = x^n(t),$$

und $x^n | [0, \infty[$ ist streng monoton wachsend mit $x^n([0, \infty[) = [0, \infty[$. Daher besitzt $x^n | [0, \infty[$ eine stetige Umkehrfunktion

$$\sqrt[n]{}\colon \; [0, \infty[\to \mathbf{R}.$$

Es gilt

$$x^n \circ \sqrt[n]{} = x | [0, \infty[\quad \text{und} \quad \sqrt[n]{} \circ x^n = |x| \,.$$

(b) Ist n ungerade, so ist $x^n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine *ungerade* Funktion, d. h.

$$\forall t \in \mathbf{R}\colon x^n(-t) = -x^n(t),$$

und ist streng monoton wachsend mit $x^n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Daher besitzt sie eine stetige Umkehrfunktion

$$\sqrt[n]{}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

Es gilt

$$\sqrt[n]{} \circ x^n = x^n \circ \sqrt[n]{} = x.$$

Kapitel 4

Konvergenz von Folgen

Wir erinnern an die Definition von

$$\mathbf{N}_m := \{n \in \mathbf{Z} \mid n \geq m\}$$

für alle ganzen Zahlen $m \in \mathbf{Z}$. Anstatt von $n \in \mathbf{N}_m$ werden wir auch $n \geq m$ schreiben, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, daß n eine ganze Zahl ist.

4.1 Konvergenz in metrischen Räumen

Sei im folgenden E ein metrischer Raum, $m \in \mathbf{Z}$ und $(p_n)_{n \geq m}$ eine Folge von Punkten $p_n \in E$.

Definition. Die Folge $(p_n)_{n \geq m}$ *konvergiert* gegen ein $q \in E$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists n_0 \geq m \, \forall n \geq n_0 \colon p_n \in U_\varepsilon(q). \tag{1}$$

In diesem Falle schreiben wir auch $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = q$. Konvergiert die Folge gegen *kein* q, so sagen wir auch, daß sie *divergiert*.

Beispiel 1. Jede konstante Folge $(p_n)_{n \geq m}$ von E konvergiert, und zwar gegen q, wenn $\forall n \geq m : p_n = q$ ist.

Proposition 1. Die Folge $(p_n)_{n \geq m}$ kann gegen höchstens einen Punkt $q \in E$ konvergieren.

Im Falle, daß $(p_n)_{n \geq m}$ gegen q konvergiert, heißt q auch der *Limes* oder, falls E ein Rechenbereich wie $\mathbf{R}$ oder ein Vektorraum ist, der *Grenzwert* der Folge $(p_n)_{n \geq m}$.

Proposition 2. Für Konvergenz sind nur die „Endstücke" der Folgen entscheidend; genauer: Sind $(p_n)_{n \geq m_1}$ und $(q_n)_{n \geq m_2}$ zwei Folgen in E und existiert ein $m_3 \geq \max\{m_1, m_2\}$, so daß $\forall n \geq m_3 : p_n = q_n$ gilt, so konvergiert die Folge $(p_n)_{n \geq m_1}$ genau dann gegen $q \in E$, wenn die Folge $(q_n)_{n \geq m_2}$ gegen q konvergiert.

(Dadurch wird im Nachhinein die Bezeichnung $\lim\limits_{n \to \infty} p_n$ gerechtfertigt, in welche nicht eingeht, für welche n genau die p_n zu betrachten sind.)

Konvergenz in $\mathbf{R}$. Da $\mathbf{R}$ ein metrischer Raum ist, wissen wir nach Obigem, was unter Konvergenz einer Folge in $\mathbf{R}$ zu verstehen ist. Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\geq m}$ reeller Zahlen a_n gegen 0, so nennen wir $(a_n)_{n\geq m}$ eine *Nullfolge*.

Beispiel 2. $(1/n)_{n\geq 1}$ ist eine Nullfolge.

Konvergenz in $\widehat{\mathbf{R}}$. Obwohl $\widehat{\mathbf{R}}$ kein metrischer Raum ist, können wir die Konvergenzdefinition (1) ohne Änderung für diesen Raum übernehmen, da wir auch $U_\varepsilon(\infty)$ und $U_\varepsilon(-\infty)$ definiert haben. Wir können also von der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq m}$ gegen ∞ bzw. gegen $-\infty$ sprechen. (Andere Autoren sprechen an dieser Stelle von Divergenz; wir nicht!)

Da auch $\widehat{\mathbf{R}}$ die Hausdorffsche Trennungseigenschaft hat, gilt auch in $\widehat{\mathbf{R}}$ die Aussage über die Eindeutigkeit des Limes. Offenbar gilt:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \forall c \in \mathbf{R}_+ \, \exists n_0 \geq m \, \forall n \geq n_0 \colon a_n > c$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall c \in \mathbf{R}_+ \, \exists n_0 \geq m \, \forall n \geq n_0 \colon a_n < -c$.

Proposition 3. Ist eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq m}$ monoton wachsend (bzw. fallend), d. h. die Funktion $f\colon \mathbf{N}_m \to \mathbf{R}, n \mapsto a_n$ ist monoton wachsend (bzw. fallend) (vgl. 3.10), so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \geq m\} \quad (\text{bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \geq m\}).$$

Insbesondere konvergiert jede beschränkte monotone Zahlenfolge in $\mathbf{R}$.

Beispiel 3. Ist a eine reelle Zahl, so erhalten wir eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ rationaler Zahlen, wenn wir mit $a_n \leq a$ die rationale Zahl bezeichnen, die entsteht, wenn die Dezimalbruchentwicklung von a an der n-ten Stelle abgebrochen wird. In diesem Falle ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zum Beispiel gilt für die Kreiszahl π:

$$\pi_0 = 3, \quad \pi_1 = 3{,}1, \quad \pi_2 = 3{,}14, \quad \pi_3 = 3{,}141, \quad \pi_4 = 3{,}1415, \quad \pi_5 = 3{,}14159,$$
$$\pi_{50} = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510$$

Mit Hilfe des folgenden Scheme-Programmes können wir prinzipiell beliebig viele Stellen von π bestimmen:

```
(define (head stream)
  (car stream))

(define (tail stream)
  (force (cdr stream)))

(define (stream->list stream n)
  (let loop ((stream stream) (n n))
    (if (zero? n)
        '()
        (cons (head stream)
              (loop (tail stream) (- n 1))))))
```

```
(define (stream/pi)
  (let loop ((q 1) (r 0) (t 1) (k 1) (n 3) (l 3))
    (if (< (+ (* 4 q) r (- t)) (* n t))
        (cons n
              (delay
                (loop (* 10 q) (* 10 (- r (* n t))) t k
                      (- (quotient (* 10 (+ (* 3 q) r))
                                   t)
                         (* 10 n))
                      l)))
                (loop (* q k)
                      (* (+ (* 2 q) r) l)
                      (* t l)
                      (+ k 1)
                      (quotient (+ (* q (+ (* 7 k) 2))
                                   (* r l))
                                (* t l))
                      (+ l 2)))))

(define (digits/pi n)
  (stream->list (stream/pi) (+ n 1)))
```

Rufen wir die Prozedur `(digits/pi n)` mit einer nicht-negativen Zahl n auf, so liefert sie eine Liste der Ziffern bis einschließlich der n-ten Nachkommastelle von π zurück. Der im Programm verwendete Algorithmus ist in Jeremy Gibbons: *Unbounded Spigot Algorithms for the Digits of Pi*, American Mathematical Monthly, Vol. 113 (4), 2006, S. 318–328 zu finden.

4.2 Konvergenz von Teilfolgen

Definition. Ist $(p_n)_{n \geq m}$ eine Folge irgendwelcher Elemente und $i\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_m$ eine streng monoton wachsende Funktion, so heißt $(p_{i(n)})_{n \in \mathbf{N}_0}$ eine *Teilfolge* von $(p_n)_{n \geq m}$. Häufig schreiben wir auch p_{i_k} anstatt $p_{i(k)}$.

Da die Funktion i streng monoton wachsend ist, gilt: $\forall n \in \mathbf{N}_0\colon i(n) \geq m + n$.

Proposition. Konvergiert eine Folge $(p_n)_{n \geq m}$ von Punkten $p_n \in E$ eines metrischen Raumes E gegen einen Punkt $q \in E$, so konvergiert auch jede Teilfolge von $(p_n)_{n \geq m}$ gegen q. Die Aussage bleibt richtig, wenn E durch $\widehat{\mathbf{R}}$ ersetzt wird.

Korollar. Ist $q \in \mathbf{R}$, so gilt:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{für } q > 1, \\ 1 & \text{für } q = 1, \\ 0 & \text{für } |q| < 1. \end{cases}$$

Im Falle $q \leq -1$ existiert der Grenzwert nicht.

4.3 Das Heine–Kriterium für Stetigkeit

Theorem. Es seien E und E' metrische Räume, $f\colon E \to E'$ eine Abbildung und $q \in E$ ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) f ist in q stetig.

(b) Für jede gegen q konvergente Folge $(p_n)_{n\geq m}$ von Punkten $p_n \in E$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(q). \tag{1}$$

Anstelle von (1) können wir auch

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(\lim_{n\to\infty} p_n)$$

schreiben; anders ausgedrückt: Limesbildung und Operieren stetiger Abbildungen sind miteinander vertauschbar.

Kommentar.

(a) Die Implikation $\neg$(b) $\implies$ $\neg$(a), welche ja zur Implikation (a) $\implies$ (b) äquivalent ist, beschreibt eine Strategie, um die Nicht-Stetigkeit von Abbildungen nachzuweisen.

(b) Zum Beweis von (b) $\implies$ (a) wird das sogenannte *Auswahlaxiom* der Mengenlehre benötigt.

Auswahlaxiom (E. Zermelo 1904)**.** Sei I eine Menge und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie nicht leerer Mengen. Dann existiert eine Familie $(p_i)_{i\in I}$ von Elementen p_i mit der Eigenschaft:

$$\forall i \in I : p_i \in M_i.$$

Diese Aussage wurde bis zum Ende des 19. Jahrhunderts mit der größten Selbstverständlichkeit benutzt, und zwar solange bis auffiel, daß sich ohne diese Aussage einige überhaupt nicht selbstverständliche Sätze (wie der *Wohlordnungssatz* oder das *Zornsche Lemma*) nicht beweisen lassen. Im Jahre 1963 gelang P. H. Cohen der Beweis, daß das Auswahlaxiom nicht aus den anderen Axiomen der Mengenlehre abgeleitet werden kann; vorher war schon durch Arbeiten von K. Gödel bekannt, daß das Auswahlaxiom verträglich mit den anderen Axiomen der Mengenlehre ist.

Das folgende Korollar ist eine Folgerung aus dem Heine–Kriterium für Stetigkeit:

Korollar. $\forall a \in \mathbf{R}_+\colon \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

4.4 Konvergenz in Teilräumen

Aufgabe. Sei M ein Teilraum eines metrischen Raumes E, $(p_n)_{n\geq m}$ eine Punktfolge in M und $q \in M$. Dann gilt:

Die Folge $(p_n)_{n\geq m}$ konvergiert genau dann in dem Teilraum M gegen q, wenn sie in E gegen q konvergiert.

4.5 Konvergenz in Produkträumen

Proposition. Seien $E_1, \ldots, E_N$ metrische Räume und E der Produktraum $\prod_{i=1}^{N} E_i$ (vgl. 3.3). Weiterhin sei jeweils $(p_{i,n})_{n \geq m}$ für $i = 1, \ldots, N$ eine Folge in E_i, und für alle $n \geq m$ setzen wir $p_n := (p_{i,n})_{i=1,\ldots,N}$. Dann konvergiert die Folge $(p_n)_{n \geq m}$ in E genau dann gegen einen Punkt p^*, wenn für jedes $i = 1, \ldots, N$ die „Komponentenfolge" $(p_{i,n})_{n \geq m}$ in E_i gegen den Punkt $\mathrm{pr}_i(p^*)$ konvergiert (vgl. 3.3).

Korollar. Es seien $(a_n)_{n \geq m}$ und $(b_n)_{n \geq m}$ reelle Zahlenfolgen, α, a, $b \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen, und es gelte $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \to \infty} b_n = b$. Dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim_{n \to \infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot a, \qquad \lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

und im Falle $a \neq 0$ auch

$$\lim_{n \to \infty} 1/a_n = 1/a.$$

Aufgabe (Weitere Rechenregeln für Zahlenfolgen)**.** Seien $(a_n)_{n \geq m}$, $(b_n)_{n \geq m}$ und $(c_n)_{n \geq m}$ reelle Zahlenfolgen, a, $b \in \widehat{\mathbf{R}}$, und es gelte $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \to \infty} b_n = b$. Man zeige:

(a) Ist $a = \infty$, so ist $\lim_{n \to \infty} 1/a_n = 0$.

(b) Ist $a = 0$ und $(c_n)_{n \geq m}$ eine beschränkte Zahlenfolge, so gilt $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot c_n) = 0$.

(c) Ist $a = \infty$ und existiert ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, so daß $\forall n \geq m\colon c_n \geq \varepsilon$ gilt, so gilt auch $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot c_n) = \infty$.

(d) Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$, so gilt auch $a \leq b$.

(e) Und schließlich:

Das Sandwich-Theorem.

(i) Gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$ und ist $a = b$, so gilt auch $\lim_{n \to \infty} c_n = a$.

(ii) Gilt $a_n \leq c_n$ für alle $n \geq m$ und ist $a = \infty$, so gilt auch $\lim_{n \to \infty} c_n = \infty$.

(iii) Gilt $c_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$ und ist $b = -\infty$, so gilt auch $\lim_{n \to \infty} c_n = -\infty$.

4.6 Häufungspunkte von Punktfolgen

Definition. Seien E ein metrischer Raum, $(p_n)_{n \geq m}$ eine Punktfolge in E und $p \in E$ ein Punkt. Dann heißt der Punkt p *Häufungspunkt* der Folge $(p_n)_{n \geq m}$, wenn p der Limes einer Teilfolge von $(p_n)_{n \geq m}$ ist.

Proposition. Jede konvergente Punktfolge besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Limes.

Kommentar. Im Raum $E = \widehat{\mathbf{R}}$ können wir Häufungspunkte genauso definieren; hier gilt die letzte Aussage ebenfalls unverändert. Wir wissen also, was es bedeutet, daß ∞ oder $-\infty$ Häufungspunkt einer reellen Zahlenfolge ist.

4.7 Limes superior und Limes inferior einer Zahlenfolge

Es sei $(a_n)_{n \geq m}$ eine Folge reeller Zahlen.

Definition. Für jedes $n \in \mathbf{N}_m$ setzen wir

$$\underline{a}_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\} \quad \text{und} \quad \overline{a}_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbf{N}_m$:

$$\underline{a}_n \leq \underline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_n, \quad \underline{a}_n \in [-\infty, \infty[\quad \text{und} \quad \overline{a}_n \in]-\infty, \infty]\,.$$

Damit ist $(\underline{a}_n)_{n \geq m}$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen, und wir können

$$\liminf_{n \to \infty} a_n := \lim_{n \to \infty} \underline{a}_n \in [-\infty, \infty]$$

setzen. Weiter ist $(\overline{a}_n)_{n \geq m}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen, und wir können

$$\limsup_{n \to \infty} a_n := \lim_{n \to \infty} \overline{a}_n \in [-\infty, \infty]$$

setzen. Die „Zahlen“ $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n$ heißen der *Limes inferior* bzw. *Limes superior* der Folge $(a_n)_{n \geq m}$.

Ist $(a_n)_{n \geq m}$ nach unten beschränkt, so ist $(\underline{a}_n)_{n \geq m}$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen und daher $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n > -\infty$. Andernfalls ist $\underline{a}_n = -\infty$ für alle $n \geq m$ und daher $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$.

Ist $(a_n)_{n \geq m}$ nach oben beschränkt, so ist $(\overline{a}_n)_{n \geq m}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen und daher $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n < \infty$. Andernfalls ist $\overline{a}_n = \infty$ für alle $n \geq m$ und daher $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$.

Proposition. In jedem Falle ist

$$\liminf_{n \to \infty} a_n \leq \limsup_{n \to \infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \limsup_{n \to \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \to \infty} a_n.$$

Satz von Bolzano–Weierstraß. Jede reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq m}$ besitzt in $\widehat{\mathbf{R}}$ mindestens einen Häufungspunkt; genauer: $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n$ sind Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \geq m}$, und für jeden weiteren Häufungspunkt a der Folge gilt:

$$\liminf_{n \to \infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n \to \infty} a_n.$$

Mit anderen Worten sind der Limes inferior und der Limes superior der kleinste bzw. größte Häufungspunkt einer Folge.

Theorem. Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq m}$ konvergiert genau dann, wenn

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

ist. Im Falle der Konvergenz stimmen diese beiden Häufungspunkte mit $\lim_{n\to\infty} a_n$ überein.

4.8 Abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raumes

Es seien E ein metrischer Raum und $A \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge von E.

Definition 1.

(a) Unter der *abgeschlossenen Hülle* von A verstehen wir die Menge $\overline{A}$ aller Punkte $p \in E$, welche Limes einer (in E) konvergenten Folge $(p_n)_{n\geq m}$ von Punkten $p_n \in A$ sind.

Sicherlich ist $A \subseteq \overline{A}$.

(b) Die Teilmenge A heißt *abgeschlossen* (in E), wenn $\overline{A} = A$.

Beispiele.

(a) Die leere Menge und der ganze Raum E sind abgeschlossene Teilmengen von E.

(b) Jede einpunktige Menge $\{p\} \subseteq E$ ist in E abgeschlossen.

(c) Sind a, $b \in \mathbf{R}$ Zahlen mit $a < b$, so ist das Intervall $[a, b]$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbf{R}$ im Sinne dieses Abschnittes.

(d) Sind $f_1, f_2, \dots, f_n \colon E \to \mathbf{R}$ stetige Funktionen, so sind die Mengen

$$\{p \in E \mid f_1(p) = f_2(p) = \cdots = f_n(p) = 0\}$$

und

$$\{p \in E \mid f_1(p) \geq 0, \cdots, f_n(p) \geq 0\}$$

abgeschlossene Teilmengen von E. Wir sprechen bei diesen Beispielen von Mengen, die von stetigen Gleichungen bzw. Ungleichungen definiert werden. Insbesondere ist für jeden Punkt $p^* \in E$ und jeden Radius $r \in [0, \infty[$ der *Ball*

$$B_r(p^*) := \{p \in E \mid d(p^*, p) \leq r\}$$

abgeschlossen.

Proposition. Für jeden Punkt $p \in E$ gilt: $p \in \overline{A} \iff \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon A \cap U_\varepsilon(p) \neq \emptyset$.

Hieraus entnehmen wir, daß aufgrund der Definition 1(d) aus 2.2 für jede beschränkte Menge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ gilt $\inf(M) \in \overline{M}$ und $\sup(M) \in \overline{M}$.

Korollar 1. Es ist $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, d. h. die abgeschlossene Hülle ist — wie der Name vermuten läßt — tatsächlich abgeschlossen.

Korollar 2. In $\mathbf{R}$ gilt $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ und $\overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

Beweis. Man kombiniere die Dichtheitsaussage aus dem Korollar von 2.4 mit obiger Proposition. □

Eingedenk dieses Beweises können wir in Übereinstimmung mit der Dichtheitsdefinition aus 2.4 für beliebige metrische Räume definieren:

Definition 2. In einem metrischen Raum E heißt $A \in \mathfrak{P}(E)$ eine *dichte* Teilmenge (von E), wenn $\overline{A} = E$.

Es gilt: A dicht in $E \iff \forall p \in E \, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ : A \cap U_\varepsilon(p) \neq \emptyset$.

Aufgabe.

(a) Sind A, $B \in \mathfrak{P}(E)$ Teilmengen von E und gilt $A \subseteq B$, so gilt auch $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(b) Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(E)$, so gilt $\overline{\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu} = \bigcup_{\nu=1}^{n} \overline{A_\nu}$; insbesondere ist daher jede endliche Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen von E wieder eine abgeschlossene Teilmenge.

(c) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen $A_i \in \mathfrak{P}(E)$ mit $I \neq \emptyset$, so gilt für den Durchschnitt $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$. Man zeige an einem Beispiel, daß im allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Trotzdem ist der Durchschnitt von (beliebig vielen) abgeschlossenen Teilmengen von E wieder eine abgeschlossene Teilmenge von E.

(d) Es seien E' ein weiterer metrischer Raum und $f : E \to E'$ eine stetige Abbildung. Dann ist das Urbild $f^{-1}(B)$ einer jeden abgeschlossenen Teilmenge B von E' eine abgeschlossene Teilmenge von E. Man beachte dagegen: Das Bild $f(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge A von E ist im allgemeinen nicht in E' abgeschlossen.

(e) Man bestimme für alle Intervalle von $\mathbf{R}$ die abgeschlossene Hülle und entscheide damit, welche Intervalle im Sinne dieses Abschnittes abgeschlossene Teilmengen von $\mathbf{R}$ sind.

4.9 Folgenkompakte Mengen

Definition. Sei E ein metrischer Raum.

(a) Der Raum E heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge $(p_n)_{n\geq m}$ von Punkten aus E einen Häufungspunkt (in E) besitzt, d. h. also, wenn jede Folge $(p_n)_{n\geq m}$ von Punkten aus E eine konvergente Teilfolge besitzt.

(b) Eine Teilmenge $K \in \mathfrak{P}(E)$ von E heißt eine *folgenkompakte Teilmenge* von E, wenn der metrische Teilraum K folgenkompakt ist, wenn also jede Folge $(p_n)_{n\geq m}$ von Punkten aus K einen Häufungspunkt in K besitzt.

Kommentar. Die Folgenkompaktheit einer Teilmenge K ist per definitionem eine Eigenschaft des metrischen Teilraumes K; hingegen ist der Begriff der Abgeschlossenheit nur relativ zu einem fixierten Gesamtraum sinnvoll.

Beispiele.

(a) Die leere Menge ist folgenkompakt.

(b) Jede einpunktige Teilmenge $\{p\}$ eines metrischen Raumes ist folgenkompakt.

(c) Jedes Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ ist folgenkompakt.

(d) Der metrische Raum $\mathbf{R}$ ist *nicht* folgenkompakt.

Proposition. Für jede folgenkompakte Teilmenge K eines metrischen Raumes E gilt:

(a) K ist abgeschlossen in E.

(b) Jede abgeschlossene Teilmenge A von E, die in K liegt, ist auch folgenkompakt.

Aufgabe. Man zeige:

(a) Jede Vereinigung endlich vieler folgenkompakter Mengen ist folgenkompakt.

(b) Jeder (nicht-triviale) Durchschnitt (beliebig vieler) folgenkompakter Mengen ist folgenkompakt.

(c) Es seien E' ein weiterer metrischer Raum und $f\colon E \to E'$ eine stetige Abbildung. Dann ist das Bild $f(K)$ einer jeden folgenkompakten Teilmenge $K \in \mathfrak{P}(E)$ wieder folgenkompakt. Man gebe weiter ein Beispiel dafür an, daß das Urbild $f^{-1}(B)$ einer folgenkompakten Teilmenge B von E' im allgemeinen *nicht* folgenkompakt ist.

(d) Schließlich bestimme man alle folgenkompakten Intervalle von $\mathbf{R}$.

4.10 Über die Existenz von Extremwerten

Theorem. Sei E ein nicht leerer folgenkompakter metrischer Raum. Dann nimmt jede stetige Funktion $f\colon E \to \mathbf{R}$ ihr Maximum und ihr Minimum an, d. h.: Es existieren Punkte p_1, $p_2 \in E$, so daß gilt:

$$\forall p \in E\colon f(p_1) \leq f(p) \leq f(p_2).$$

Korollar. Jede folgenkompakte Teilmenge K eines nicht leeren metrischen Raumes E ist *beschränkt*, d. h.: Es existiert ein $r \in \mathbf{R}_+$ und ein $p_0 \in E$, so daß $K \subseteq U_r(p_0)$.

4.11 Der Satz von Heine–Borel

Theorem (Produkte folgenkompakter Mengen)**.** Seien $E_1, \ldots, E_N$ metrische Räume und E der Produktraum $\prod_{i=1}^{N} E_i$ (vergleiche 3.3). Weiterhin sei für jedes $i = 1, \ldots, N$ eine folgenkompakte Teilmenge $K_i \in \mathfrak{P}(E_i)$ gegeben. Dann ist deren Produkt $\prod_{i=1}^{N} K_i$ eine folgenkompakte Teilmenge von E.

Korollar. Im $\mathbf{R}^n$ ist jeder *Quader* $Q = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ mit $-\infty < a_i < b_i < \infty$ für $i = 1, \ldots, n$ eine folgenkompakte Teilmenge.

Satz von Heine–Borel (Charakterisierung der folgenkompakten Teilmengen des $\mathbf{R}^n$)**.** Eine Teilmenge $K \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}^n)$ des $\mathbf{R}^n$ ist genau dann folgenkompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

4.12 Gleichmäßige Stetigkeit

Es seien (E, d) und (E', d') metrische Räume und $f\colon E \to E'$ eine Abbildung.

Definition. Die Abbildung f heißt *gleichmäßig stetig*, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall p_0 \in E\colon f(U_\delta(p_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(p_0)),$$

wenn also auf ganz E das δ zum ε unabhängig vom speziellen Punkt p_0 gewählt werden kann. Mit Hilfe der Metriken d und d' drückt sich dieser Tatbestand folgendermaßen aus:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall p, q \in E\colon \big(d(p,q) < \delta \implies d'(f(p), f(q)) < \varepsilon\big).$$

Proposition. Ist $f\colon E \to E'$ gleichmäßig stetig, so ist f (in allen Punkten von E) stetig.

Beispiel. Es seien $E_1, \ldots, E_N$ metrische Räume und E der Produktraum $\prod_{i=1}^{N} E_i$. Dann sind die kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_i\colon E \to E_i$ (vergleiche 3.3) gleichmäßig stetig.

Aufgabe. Die Funktion $\sqrt[2]{\ }\colon [0, \infty[\, \to \mathbf{R}$ ist gleichmäßig stetig; hingegen ist die Funktion $x^2\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nicht gleichmäßig stetig.

Theorem. Ist E folgenkompakt und $f\colon E \to E'$ stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.

4.13 Cauchyfolgen

Es sei (E, d) ein metrischer Raum.

Definition. Eine Punktfolge $(p_n)_{n \geq m}$ von E heißt eine *Cauchyfolge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists n_0 \geq m \, \forall k, n \geq n_0 \colon d(p_k, p_n) < \varepsilon.$$

Proposition 1. Jede konvergente Punktfolge von E ist eine Cauchyfolge.

Wie es mit der Umkehrung dieser Aussage steht, sehen wir im nächsten Abschnitt.

Proposition 2. Besitzt eine Cauchyfolge einen Häufungspunkt, so ist sie konvergent.

Proposition 3. Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

Im Falle von Cauchyfolgen gibt es ein Analogon zum ersten Teil des Heine-Kriteriums:

Proposition 4. Sind E und E' metrische Räume, $f \colon E \to E'$ eine gleichmäßig stetige Abbildung und $(p_n)_{n \geq m}$ eine Cauchyfolge, so ist auch $(f(p_n))_{n \geq m}$ eine Cauchyfolge.

4.14 Vollständige metrische Räume

Definition. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.

Kommentar 1. In vollständigen metrischen Räumen läßt sich also die Konvergenz von Punktfolgen ohne Kenntnis des Limes feststellen.

Beispiel. Es ist $\mathbf{R}$ ein vollständiger metrischer Raum. Hingegen ist der Teilraum $\mathbf{Q}$ nicht vollständig.

Die Aussage über die Vollständigkeit von $\mathbf{R}$ ist (unter Annahme der übrigen Axiome) zum Vollständigkeitsaxiom (R13) äquivalent. Cauchyfolgen wurden von A.-L. Cauchy 1821 in seinem Werk *„Course d'Analyse"* wesentlich benutzt. Allerdings setzte er die Vollständigkeit von $\mathbf{R}$ stillschweigend voraus. Erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde den Mathematikern die Vollständigkeitsproblematik bewußt. G. Cantor benutzte 1883 Cauchyfolgen, die er Fundamentalfolgen nannte, zur Konstruktion der reellen Zahlen.

Proposition. Seien $E_1, \ldots, E_n$ vollständige metrische Räume, so ist auch deren Produktraum $\prod_{i=1}^{n} E_i$ vollständig.

Korollar. Der $\mathbf{R}^n$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Kommentar 2. Jeder metrische Raum E kann durch Hinzunahme geeigneter weiterer Punkte in natürlicher Weise *vervollständigt* werden. In diesem Sinne ist $\mathbf{R}$ die Vervollständigung von $\mathbf{Q}$.

Theorem (Vollständigkeit von Teilräumen)**.** Es seien E ein metrischer Raum und $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge von E. Dann gilt:

(a) Ist der metrische Teilraum M vollständig, so ist M eine abgeschlossene Teilmenge von E.

(b) Ist E vollständig und M eine abgeschlossene Teilmenge von E, so ist der metrische Teilraum M ebenfalls vollständig.

Aufgabe (Der Cantorsche Durchschnittssatz)**.** Es seien (E, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n \geq m}$ eine Folge nicht-leerer abgeschlossener Teilmengen von E, für welche gelte:

(a) $\forall n \geq m\colon A_{n+1} \subseteq A_n$ und

(b) die Folge $(\operatorname{diam}(A_n))_{n \geq m}$ der *Durchmesser* $\operatorname{diam}(A_n) := \sup\{d(p,q) \mid p, q \in A_n\}$ ist eine Nullfolge.

Dann enthält der Durchschnitt $\bigcap\limits_{n \geq m} A_n$ genau einen Punkt, und zwar gilt: Jede Folge $(p_n)_{n \geq m}$ von Punkten $p_n \in A_n$ konvergiert gegen diesen einzigen Punkt $p^* \in \bigcap\limits_{n \geq m} A_n$.

In dieser Version hat der Satz viele Anwendungen.

Kommentar 3. Ein berühmter Spezialfall des Cantorschen Durchschnittssatzes ist der *Satz über die Intervallschachtelung.* In ihm ist E der metrische Raum $\mathbf{R}$ und die A_n sind abgeschlossene Intervalle $[a_n, b_n] \subseteq \mathbf{R}$, welche — wie in (a) beschrieben — ineinander geschachtelt sind und deren Längen $b_n - a_n$ eine Nullfolge bilden. Zum Beweis der Existenz eines Elementes in $\bigcap\limits_n [a_n, b_n]$ wird die Vollständigkeit von $\mathbf{R}$ gebraucht. Tatsächlich ist diese zur Gültigkeit über die Intervallschachtelung äquivalent. K. Weierstrass benutzte Intervallschachtelungen 1880/81 in Vorlesungen zur Einführung der reellen Zahlen und zum Beispiel auch zum Beweis des Satzes von Bolzano–Weierstraß. Tatsächlich wurde aber mit Intervallschachtelungen schon vor über 2000 Jahren gearbeitet. So stellt Archimedes' Approximation von 2π durch die Länge von dem Einheitskreis eingeschriebenen Sehnenzügen bzw. umbeschriebenen Tangentenzügen eine Intervallschachtelung dar.

4.15 Der Banachsche Fixpunktsatz

Es sei E eine beliebige nicht-leere Menge und $f\colon E \to E$ eine „Selbstabbildung“ von E. Ist dann $p_0 \in E$ irgendein Punkt, so können wir durch die rekursive Definition

$$\forall n \in \mathbf{N}_0\colon p_{n+1} := f(p_n)$$

eine Folge $(p_n)_{n \geq 0}$ in E definieren. Im folgenden nennen wir diese Punktfolge die Banachfolge bezüglich f (oder kurz f-Banachfolge) mit Startpunkt p_0.

Aufgabe.

(a) Seien E ein metrischer Raum und $f\colon E \to E$ eine stetige Abbildung. Man zeige: Wenn eine f-Banachfolge gegen einen Punkt $p \in E$ konvergiert, so ist p ein *Fixpunkt* von f, d. h. $f(p) = p$.

(b) Im HERON*schen Verfahren* zur Bestimmung von $\sqrt{a}$ für $a \in \mathbf{R}_+$ werden Banachfolgen bezüglich der Funktion $f = (x + a/x)/2|\mathbf{R}_+$ benutzt. Man zeige, daß jede f-Banachfolge konvergiert, und zwar gegen $\sqrt{a}$.

(c) Man versuche mittels eines Rechners unter Benutzung des ersten Aufgabenteils Fixpunkte für die Funktionen

$$\cos, \quad \exp(-x), \quad \text{und} \quad \sqrt{}$$

zu ermitteln und jeweils das *Einzugsgebiet* der Fixpunkte zu bestimmen, d. h. die Menge derjenigen Zahlen a_0, für welche die Banachfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ bezüglich der jeweiligen Funktion gerade gegen den Fixpunkt konvergiert. (Die Kosinus-Funktion betrachte man dabei als Funktion des Bogenmaßes.) Man prüfe seine experimentellen Ergebnisse an den Graphen der verschiedenen Funktionen.

Der Banachsche Fixpunktsatz. Seien (E, d) ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und $f\colon E \to E$ eine *kontrahierende* Abbildung, d. h. es existiert eine Konstante $L \in [0, 1[$ (also $0 \leq L < 1$), so daß gilt:

$$\forall p, q \in E\colon d(f(p), f(q)) \leq L \cdot d(p, q).$$

(Insbesondere ist f also gleichmäßig stetig.) Dann besitzt f genau einen Fixpunkt p^*; und zwar ist p^* Limes einer jeden f-Banachfolge $(p_n)_{n\geq 0}$, denn es gilt:

$$\forall n \geq 1\colon d(p_n, p^*) \leq \frac{d(p_1, p_0)}{1 - L} \cdot L^n.$$

Kommentar. Banachfolgen wurden schon im 19. Jahrhundert benutzt. Im Jahre 1903 bewies É. GOURSAT den Banachschen Fixpunktsatz für den $\mathbf{R}^n$. Im Jahre 1920 wurde er von dem Amerikaner K. LAMSON allgemeiner bewiesen; seine Untersuchung war aber in Europa nicht bekannt. Im Jahre 1922 erschien er in der Dissertation des polnischen Mathematikers S. BANACH, formuliert für die später nach ihm benannten Banachräume. Der richtige Rahmen für den Banachschen Fixpunktsatz ist jedoch — wie bald erkannt worden ist — die Theorie der vollständigen metrischen Räume.

Kapitel 5

Normierte Vektorräume und unendliche Reihen

5.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Definition. Versehen wir den reellen Vektorraum $\mathbf{R}^2$, in dem wir Vektoren bekanntlich addieren können, mit der durch

$$(a, b) \cdot (a', b') := (a \cdot a' - b \cdot b', a \cdot b' + a' \cdot b)$$

für alle $(a, b), (a', b') \in \mathbf{R}^2$ definierten Multiplikation, so wird er zu einem Körper, dem Körper $\mathbf{C}$ der *komplexen Zahlen*. Mit anderen Worten gelten in $\mathbf{C}$ die Axiome (R1)–(R9) aus Kapitel 1, wenn wir in ihnen stets $\mathbf{R}$ durch $\mathbf{C}$ und $\mathbf{R}^*$ durch $\mathbf{C}^* := \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ersetzen. Desgleichen gelten mutatis mutandis die Sätze aus den Abschnitten 1.1–1.3.

Die komplexe Zahl $(0, 1)$ wird mit i bezeichnet und *imaginäre Einheit* genannt. Es gilt $i^2 = (-1, 0)$. Mit Hilfe der imaginären Einheit läßt sich jede komplexe Zahl z in der Form

$$(a, b) = (a, 0) + i \cdot (b, 0)$$

schreiben. Es heißt a der *Realteil* von z und b der *Imaginärteil.* (Eine komplexe Zahl, deren Realteil verschwindet, heißt *rein imaginär.*) Damit bezeichnen wir die beiden Koordinatenfunktionen x, $y\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ auch mit $\Re$ und $\Im$.

Die Abbildung $\mathbf{R} \to \mathbf{C}, a \mapsto (a, 0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus. Daher identifizieren wir die reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $(a, 0)$; damit betrachten wir $\mathbf{R}$ als eine Teilmenge, genauer als einen Unterkörper von $\mathbf{C}$. Insbesondere schreiben wir

$$(a, b) = a + i \cdot b.$$

Die Abbildung $\mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto \overline{z} := \Re(z) - i \cdot \Im(z)$ heißt die *Konjugation* in $\mathbf{C}$.

Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + i \cdot b$ wird durch

$$|z| := \|z\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

definiert. Für reelle Zahlen stimmt dieser Betrag mit dem unter 1.5 eingeführten überein.

Proposition.

(a) Die Konjugation $\mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto \overline{z}$ ist ein Körperhomomorphismus, d. h. es gelten die folgenden Regeln:

$$\overline{0} = 0, \qquad \overline{1} = 1, \qquad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \text{und} \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

für alle z, $w \in \mathbf{C}$, woraus insbesondere $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$ für alle $z \neq 0$ folgt. Außerdem gilt $\overline{\overline{z}} = z$; damit ist die Konjugation sogar ein Isomorphismus von Körpern, denn sie ist ihre eigene Umkehrung.

(b) Für Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z gelten die Formeln

$$\Re(z) = (z + \overline{z})/2 \qquad \text{und} \qquad \Im(z) = (z - \overline{z})/2i.$$

(c) Für den Betrag einer komplexen Zahl z gilt

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Regeln. Sind z, $w \in \mathbf{C}$, so gilt:

(a) $|z| \geq 0$,

(b) $z \neq 0 \implies |z| > 0$,

(c) $|\overline{z}| = |z|$,

(d) $|\Re(z)| \leq |z|$ und $|\Im(z)| \leq |z|$,

(e) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,

(f) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Obige Regel (f) heißt auch die (komplexe) *Dreiecksungleichung*.

Festsetzung. In Zukunft bezeichne $\mathbf{K}$ stets einen der beiden Körper $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Ein Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K}$ wird kurz ein $\mathbf{K}$-Vektorraum genannt. Jeder $\mathbf{C}$-Vektorraum kann auch als $\mathbf{R}$-Vektorraum betrachtet werden, indem die Multiplikation mit Skalaren auf die reellen Zahlen beschränkt wird.

5.2 Normierte Vektorräume

Definition 1. Sei E ein $\mathbf{K}$-Vektorraum. Dann heißt eine Funktion $\|\cdot\| : E \to \mathbf{R}$ eine *Norm* auf E, wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:

(N0) $\forall v \in E\colon\ \|v\| \geq 0$,

(N1) $\forall v \in E\colon (v = 0 \iff \|v\| = 0)$,

(N2) $\forall v \in E\, \forall a \in \mathbf{K}\colon\ \|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$,

(N3) $\forall v, w \in E\colon\ \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Das Axiom (N3) heißt auch *Dreiecksungleichung.*

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf E, so nennen wir $(E, \|\cdot\|)$ einen *normierten* **K**-Vektorraum. Wie im Falle von metrischen Räumen werden wir auch sagen, daß E ein normierter **K**-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$ sei oder noch kürzer, daß E ein normierter **K**-Vektorraum ist, dessen Norm wir dann in der Regel mit $\|\cdot\|$ bezeichnen.

Regel. In normierten **K**-Vektorräumen gilt: $\forall v, w \in E\colon\ |\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$.

Beispiel 1. Der Betrag auf dem Körper **K** ist aufgrund der angegebenen Regeln eine Norm. Somit können wir **K** als einen normierten Vektorraum über sich selbst auffassen.

Beispiel 2. Sind $(E_1, \|\cdot\|_1)$, …, $(E_n, \|\cdot\|_n)$ normierte **K**-Vektorräume, so erhalten wir auf dem *Produktvektorraum* $E := \prod_{k=1}^{n} E_k$ eine Norm durch

$$\|v\| := \max\{\|\mathrm{pr}_k(v)\|_k \mid k = 1, \ldots, n\}.$$

Wenn nichts anderes gesagt wird, betrachten wir den Produktvektorraum E stets in dieser Weise als normierten **K**-Vektorraum.

Es sei beachtet, daß auf $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ die Addition und die Multiplikation mit Skalaren „komponentenweise“ definiert sind. Das bedeutet gerade, daß die kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_k\colon E \to E_k$ lineare Abbildungen sind, die bekanntlich folgendermaßen definiert sind:

Definition 2. Eine Abbildung $A\colon E \to E'$ zwischen zwei **K**-Vektorräumen heißt *linear*, wenn gilt

$$\forall u, v \in E\, \forall a \in \mathbf{K}\colon (A(u + v) = Au + Av \wedge A(a \cdot v) = a \cdot Av).$$

Ist A linear, so folgt aus der Definition insbesondere, daß dann auch $A(0) = 0$ und $A(-u) = -Au$.

Beispiel 3. Indem wir in Beispiel 2 die Setzung $E_1 = \cdots = E_n = \mathbf{K}$ vornehmen, erhalten wir insbesondere den $\mathbf{K}^n$ als normierten **K**-Vektorraum. In diesem Falle bezeichnen wir die Norm von Beispiel 2 meist mit $\|\cdot\|_\infty$.

Beispiel 4. Sei M eine beliebige nicht leere Menge, und sei E ein normierter **K**-Vektorraum. Dann heißt eine Funktion $f\colon M \to E$ beschränkt, wenn die reellwertige Funktion $\|f\| : p \mapsto \|f(p)\|$ beschränkt ist. Die Menge $B(M, E)$ der beschränkten Funktionen ist eine **K**-Vektorraum, wenn die Addition und die Multiplikation mit Zahlen aus **K** punktweise definiert werden, d. h.

$$\forall p \in M\, \forall a \in \mathbf{K}\colon \big((f + g)(p) = f(p) + g(p) \wedge (a \cdot f)(p) = a \cdot f(p)\big).$$

Dieser wird durch die Definition

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(p)\| \mid p \in M\}$$

zu einem normierten **K**-Vektorraum. Für jedes $p \in M$ ist die Abbildung

$$\hat{p}\colon B(M,E) \to E, f \mapsto f(p)$$

linear.

5.3 Normierte Vektorräume als metrische Räume

Proposition 1. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter **K**-Vektorraum. Dann wird auf E eine Metrik durch

$$d(v,w) := \|w - v\|$$

für alle v, $w \in E$ definiert. Für die diesbezüglichen ε-Umgebungen gilt:

$$U_\varepsilon(v) = v + U_\varepsilon(0) := \{v + u \mid u \in U_\varepsilon(0)\}$$

und

$$U_\varepsilon(0) = \varepsilon \cdot U_1(0) := \{\varepsilon \cdot v \mid v \in U_1(0)\}.$$

Normierte **K**-Vektorräume werden stets in dieser Weise als metrische Räume betrachtet. Damit stehen uns in Zukunft alle Begriffe, die wir für metrische Räume eingeführt haben, auch für normierte **K**-Vektorräume zur Verfügung.

Definition 1. Ein **K**-*Banachraum* ist ein normierter **K**-Vektorraum, der (bezüglich seiner kanonischen Metrik) ein vollständiger metrischer Raum ist.

Für die folgende Aufgabe benötigen wir noch eine Definition:

Definition 2. Eine Teilmenge M eines **K**-Vektorraumes E heißt *konvex*, wenn für je zwei Vektoren v, $w \in M$ auch deren *Verbindungsstrecke*

$$[v,w] := \{v + t \cdot (w - v) = (1-t) \cdot v + t \cdot w \mid t \in [0,1]\}$$

ganz in M liegt.

Aufgabe 1. In jedem normierten **K**-Vektorraum sind die ε-Umgebungen konvex.

Beispiel 1. Die Metrik des normierten Raumes **R** aus Beispiel 1 in Abschnitt 5.2 ist genau die in Kapitel 3 eingeführte; daher ist **R** das einfachste Beispiel eines Banachraumes. Die Metrik des normierten Raumes **C** ist die euklidische Metrik; sie stimmt nicht mit der in Abschnitt 3.3 eingeführten Metrik des $\mathbf{R}^2$ überein; man vergleiche dazu Abschnitt 3.4. Dieser besagt aber, daß die Begriffe „Stetigkeit", „gleichmäßige Stetigkeit", „Konvergenz", „Abgeschlossenheit bezüglich Limesbildung", „Folgenkompaktheit", „Cauchyfolge", „Vollständigkeit" für die beiden eingeführten Metriken von $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ übereinstimmen. Insbesondere ist **C** ein Banachraum. Weiterhin gilt: Eine Folge $(z_n)_{n \geq m}$ von **C** konvergiert genau dann, wenn die beiden Folgen $(\Re(z_n))_{n \geq m}$ und $(\Im(z_n))_{n \geq m}$ konvergieren.

Beispiel 2. Die Metrik des normierten Produktvektorraumes $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ aus Beispiel 2 in Abschnitt 5.2 stimmt mit der Metrik überein, die wir nach Abschnitt 3.3 bei der Bildung des metrischen Produktraumes erhalten, wenn wir von den *metrischen* Räumen $E_1, \ldots, E_n$ ausgehen. Insbesondere konvergiert daher eine Folge $(v_i)_{i \geq m}$ des normierten Produktvektorraumes E genau dann, wenn die n Komponentenfolgen $(\mathrm{pr}_k(v_i))_{i \geq m}$ jeweils in E_k konvergieren.

Beispiel 3. Auf Beispiel 3 aus Abschnitt 5.2 können wir natürlich die Ergebnisse aus den vorangegangenen Beispielen anwenden, weswegen insbesondere $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{C}^n$ für alle $n \in \mathbf{N}_1$ Banachräume sind.

Beispiel 4. In Beispiel 4 aus Abschnitt 5.2 ist für alle $p \in M$ die Abbildung $\hat{p}\colon B(M, E) \to E, f \mapsto f(p)$ gleichmäßig stetig.

Für die erste Aussage der folgenden Proposition benötigen wir noch eine Definition:

Definition 3. Sind (E, d) und (E', d') zwei metrische Räume, so heißt eine Bijektion $f\colon E \to E'$ eine *Isometrie*, wenn gilt:

$$\forall p, q \in E\colon d'(f(p), f(q)) = d(p, q).$$

Proposition 2. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum.

(a) Die Konjugation $\mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto \overline{z}$ ist eine lineare Isometrie und somit eine gleichmäßig stetige Abbildung.

(b) Die Abbildungen $\|\cdot\| : E \to \mathbf{R}$ und $E \times E \to E, (v, w) \mapsto v + w$ sind gleichmäßig stetig. (Dies gilt natürlich insbesondere für $E = \mathbf{K}$.)

(c) Die Abbildung $\mathbf{K}^* \to \mathbf{K}, a \mapsto 1/a$ ist stetig.

Aufgabe 2. Seien E und F zwei normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume und $A\colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden drei Aussagen zueinander äquivalent:

(a) A ist in $0 \in E$ stetig.

(b) A ist gleichmäßig stetig.

(c) Es existiert eine Konstante $M \in [0, \infty[$, so daß

$$\forall v \in E\colon \; \|A(v)\| \leq M \cdot \|v\| .$$

Gilt (c), so ist $M \coloneqq \sup\{\|A(v)\| \mid \|v\| \leq 1\}$ die kleinste Konstante, für welche die Abschätzung ((c)) gültig ist. Wir werden die Konstante M als *Operatornorm* von A kennenlernen.

Aufgabe 3. Ist E ein normierter Vektorraum und U ein Untervektorraum von E, so ist die abgeschlossene Hülle $\overline{U}$ ebenfalls ein Untervektorraum von E.

5.4 Produkte in normierten Vektorräumen

Festsetzung. Sind M, N und L irgendwelche Mengen und ist $f\colon M \times N \to L$ eine Abbildung, so definieren wir für jeden Punkt $p \in M$ die Abbildung

$$f_p := f(p, \cdot)\colon N \to L, q \mapsto f(p, q)$$

und für jeden Punkt $q \in N$ die Abbildung

$$f^q := f(\cdot, q)\colon M \to L, p \mapsto f(p, q).$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir leicht formulieren, was wir unter einer *bilinearen* Abbildung verstehen wollen:

Definition. Sind E, E' und F drei $\mathbf{K}$-Vektorräume, so heißt eine Abbildung

$$B\colon E \times E' \to F$$

bilinear, wenn für jedes $u \in E$ und jedes $v \in E'$ die Abbildungen $B_u\colon E' \to F$ und $B^v\colon E \to F$ linear sind.

Theorem. Seien E, E' und F normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume und $B\colon E \times E' \to F$ eine bilineare Abbildung. Dann sind die folgenden drei Aussagen zueinander äquivalent:

(a) B ist in $(0, 0) \in E \times E'$ stetig.

(b) B ist auf ganz $E \times E'$ stetig.

(c) Es existiert eine Konstante $M \in [0, \infty[$, so daß

$$\forall (u, v) \in E \times E'\colon\ \|B(u, v)\| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\| . \tag{1}$$

Beispiele. Sei E ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum. Die folgenden Abbildungen sind bilineare Abbildungen, welche die Bedingung (1) mit der Konstanten $M = 1$ erfüllen:

(a) das *normale Produkt* $\mathbf{K} \times \mathbf{K} \to \mathbf{K}, (a, b) \mapsto a \cdot b$,

(b) die *skalare Multiplikation* $\mathbf{K} \times E \to E, (a, v) \mapsto a \cdot v$,

(c) das *Skalarprodukt* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, (u, v) \mapsto \langle u, v\rangle := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k$ und

(d) das *Kreuzprodukt* $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (u, v) \mapsto u \times v := (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.

Dabei sind in den Beispielen (c) und (d) die Vektorräume $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{R}^3$ mit der euklidischen Norm zu versehen, damit die Konstante M tatsächlich als 1 gewählt werden kann. Daß dies im Falle (c) so ist, ist gerade die Aussage der *Cauchy–Schwarzschen Ungleichung*.

Später werden wir weitere wichtige bilineare Abbildungen kennenlernen.

Proposition 1. Seien E, E' und F normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume, sei $B\colon E \times E' \to F$ eine stetige bilineare Abbildung, seien M ein metrischer Raum, $p_0 \in M$, $a \in \mathbf{K}$, f, $g\colon M \to E$ und $h\colon M \to E'$ in p_0 stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g, \qquad a \cdot f, \qquad \|f\| \qquad \text{und} \qquad B(f,h) \coloneqq B \circ (f,h)$$

in p_0 stetig. Insbesondere ist daher die Menge $C(M,E)$ der stetigen Funktionen $M \to E$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum. Dies gilt natürlich auch für $E = \mathbf{K}$. Im Falle von $E = \mathbf{C}$ ist auch $\overline{f}$ in p_0 stetig, und im Falle $E = \mathbf{K}$ und $f(p_0) \neq 0$ ist auch $1/f$ in p_0 stetig.

Korollar. Jede (komplexe) Polynomfunktion

$$P\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k,$$

wobei $n \in \mathbf{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ ist stetig, und daher sind auch alle (komplexen) rationalen Fuktionen, d. h. alle Funktionen, die sich als Quotient P/Q zweier komplexer Polynomfunktionen P und Q scheiben lassen, überall dort stetig, wo sie definiert sind. Infolge dessen gilt mutatis mutandis für komplexe Polynomfunktionen der Satz vom Koeffizientenvergleich aus Abschnitt 3.6; es ist deren Grad eindeutig definiert; es gilt der Satz über den euklidischen Divisionsalgorithmus, weswegen wir in Korollar 1 aus Abschnitt 3.6 bei Vorliegen einer Nullstelle $\alpha \in \mathbf{C}$ einer Polynomfunktion P den Linearfaktor $z - \alpha$ von P abspalten können; daher gilt auch Korollar 2 aus Abschnitt 3.6. Hier ist jedoch folgender wichtiger Satz hinzuzufügen:

Fundamentalsatz der Algebra. Jede komplexe Polynomfunktion P vom Grad $n \geq 1$ besitzt mindestens eine Nullstelle. Daher besitzt sie eine eindeutige Produktdarstellung der Form

$$P(z) = c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)$$

mit $c \in \mathbf{C}^*$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C}$.

Proposition 2. Seien E, E' und F normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume, sei $B\colon E \times E' \to F$ eine stetige bilineare Abbildung, seien $a \in \mathbf{K}$, $(u_n)_{n \geq m}$ und $(v_n)_{n \geq m}$ konvergente Folgen in E und $(w_n)_{n \geq m}$ eine konvergente Folge in E'. Es gelte:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u, \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = v \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} w_n = w.$$

Dann gilt auch

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) &= u + v, \\ \lim_{n\to\infty} (a \cdot v_n) &= a \cdot v, \\ \lim_{n\to\infty} B(v_n, w_n) &= B(v, w), \\ \lim_{n\to\infty} \|v_n\| &= \|v\|, \\ \lim_{n\to\infty} \overline{v_n} &= \overline{v} \qquad\qquad \text{falls } E = \mathbf{C}, \end{aligned}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}(1/v_n) = 1/v \qquad \text{falls } E = \mathbf{K} \text{ und } v \neq 0.$$

Weiterhin gilt: Ist $(v_n)_{n\geq m}$ eine *Nullfolge* in E, d. h. $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ und $(w_n)_{n\geq m}$ eine beschränkte Folge in E', so ist auch $(B(v_n, w_n))_{n\geq m}$ eine Nullfolge in F.

5.5 Konvergenz von Folgen von Abbildungen

In diesem Abschnitt seien (E, d) ein metrischer Raum, M eine beliebige Menge, $(f_n)_{n\geq m}$ eine Folge von Abbildungen $f_n\colon M \to E$ und $f\colon M \to E$ eine weitere Abbildung.

Definition.

(a) Die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ konvergiert *punktweise* gegen f, wenn für jeden Punkt $p \in M$ die Punktfolge $(f_n(p))_{n\geq m}$ von E gegen $f(p)$ konvergiert, wenn also gilt:

$$\forall p \in M\, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+\, \exists n_0 \geq m\, \forall n \geq n_0\colon d(f_n(p), f(p)) < \varepsilon.$$

(b) Die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+\, \exists n_0 \geq m\, \forall n \geq n_0\, \forall p \in M\colon d(f_n(p), f(p)) < \varepsilon.$$

Offensichtlich (?) impliziert gleichmäßige Konvergenz punktweise Konvergenz.

1. Vererbungssatz. Ist M ein metrischer Raum, ist $p_0 \in M$, sind alle Abbildungen f_n in p_0 stetig und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ gleichmäßig gegen f, so ist auch f in p_0 stetig.

Aufgabe. Seien M eine Menge, E und E' metrische Räume, $(f_n)_{n\geq m}$ eine Folge von Abbildungen $f_n\colon M \to E$, $f\colon M \to E$ eine weitere Abbildung und $g\colon E \to E'$ eine stetige Abbildung. Dann gilt:

(a) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ punktweise gegen f, so konvergiert auch die Folge $(g \circ f_n)_{n\geq m}$ punktweise gegen $g \circ f$.

(b) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ gleichmäßig gegen f und ist g sogar gleichmäßig stetig, so konvergiert auch die Folge $(g \circ f_n)_{n\geq m}$ gleichmäßig gegen $g \circ f$.

(c) Ist E das Produkt metrischer Räume $E_1, \ldots, E_N$, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ genau dann punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen f, wenn für jedes $k = 1, \ldots, N$ die Folge $(\mathrm{pr}_k \circ f_n)_{n\geq m}$ punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen $\mathrm{pr}_k \circ f$ konvergiert.

5.6 Der normierte Raum $B(M, E)$

In diesem Abschnitt seien M eine nicht leere Menge und E ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum. Wir bezeichnen wie in Beispiel 4 aus Abschnitt 5.2 mit $B(M, E)$ den normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum der beschränkten Funktionen $f: M \to E$.

Theorem 1. Eine Folge $(f_n)_{n \geq m}$ von $B(M, E)$ konvergiert genau dann bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gegen ein $f \in B(M, E)$, wenn die Folge gleichmäßig gegen f konvergiert.

Theorem 2. Ist E ein Banachraum, so ist auch $B(M, E)$ ein Banachraum.

Korollar. Für jede nicht leere Menge M und jedes $n \in \mathbf{N}_1$ sind $B(M, \mathbf{R}^n)$ und $B(M, \mathbf{C}^n)$ Banachräume über $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$. Hat M unendlich viele Punkte, so sind diese Banachräume unendlich-dimensional.

5.7 Der Vektorraum $C(K, E)$

Theorem. Sei K ein folgenkompakter metrischer Raum, und sei E ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum. Dann ist die Menge $C(K, E)$ der stetigen Funktionen $f: K \to E$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $B(K, E)$. Ist E ein Banachraum, so ist daher auch $C(K, E)$ ein $\mathbf{K}$-Banachraum. Insbesondere sind $C(K, \mathbf{R}^n)$ und $C(K, \mathbf{C}^n)$ für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ Banachräume über $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$.

Kommentar. Mit einer genaueren Untersuchung von Funktionenräumen — wie den Räumen $B(M, E)$ und $C(K, E)$ — beschäftigt sich die *Funktionalanalysis*. Die dort gewonnenen Erkenntnisse sind z. B. für die Behandlung partieller Differentialgleichungen und für den Aufbau der Quantenphysik von grundlegender Bedeutung.

5.8 Der Begriff der unendlichen Reihe

In diesem Abschnitt sei $(v_n)_{n \geq m}$ eine Folge in einem normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum E.

Definition.

(a) Für jedes $n \geq m$ definieren wir $s_n := \sum\limits_{k=m}^{n} v_k$. Die Folge $(s_n)_{n \geq m}$ heißt die *unendliche Reihe* zur Folge $(v_n)_{n \geq m}$; sie wird mit $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ bezeichnet. Der Vektor s_n heißt die n-te *Partialsumme* dieser unendlichen Reihe.

(b) Anstatt zu sagen, daß die Folge $(s_n)_{n \geq m}$ der Partialsummen gegen einen Vektor $v \in E$ konvergiert, sagen wir, daß die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ gegen v konvergiert; anstatt $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = v$ schreiben wir dann $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k = v$. Ist $E = \mathbf{R}$, so sind wie bei der Konvergenz reeller

Zahlenfolgen auch für Reihen die Grenzwerte ∞ und $-\infty$ zugelassen. Divergiert die Folge $(s_n)_{n\geq m}$, so sprechen wir natürlich auch von der Divergenz der Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$.

Proposition (Ein notwendiges Konvergenzkriterium)**.** Falls die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ im normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum E konvergiert, so ist $(v_n)_{n\geq m}$ eine Nullfolge.

Diese Aussage kann nicht umgekehrt werden, wie z. B. die harmonische Reihe weiter unten zeigt.

Beispiel 1. Ist $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ auf jeden Fall in $\widehat{\mathbf{R}}$, wobei natürlich der Grenzwert ∞ sein kann.

Beispiel 2 (Die geometrische Reihe)**.** Ist $z \in \mathbf{C}$, so konvergiert die *geometrische* Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

für $|z| < 1$, und zwar gegen $1/(1-z)$, und divergiert in $\mathbf{C}$ für $|z| \geq 1$; hingegen konvergiert die Reihe für reelle $z \geq 1$ in $\widehat{\mathbf{R}}$, nämlich gegen ∞.

Beispiel 3 (Die Dirichletsche Reihe zur Riemannschen Zeta-Funktion)**.** Für jedes $s \in \mathbf{N}_1$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ in $\widehat{\mathbf{R}}$ gegen ein $\zeta(s) \in \widehat{\mathbf{R}}$. Es ist

$$\zeta(1) = \infty \qquad \text{und} \qquad \forall s \in \mathbf{N}_2\colon \left(\zeta(s) \in \,]1,2] \wedge \zeta(s+1) \leq \zeta(s) - (1/2)^{s+1}\right).$$

Für gerade s sind die Werte $\zeta(s)$ bekannte rationale Vielfache von π^s, so ist zum Beispiel

$$\zeta(2) = \pi^2/6, \quad \zeta(4) = \pi^4/90, \quad \zeta(6) = \pi^6/945 \quad \text{und} \quad \zeta(12) = 691\pi^{12}/638\,512\,875.$$

Über die Werte zu ungeradem s ist viel weniger bekannt. So hat R. Apéry in den Jahren 1978/79 bewiesen, daß $\zeta(3)$ irrational ist. Außerdem ist seitdem bewiesen worden, daß unendlich viele Werte der Form $\zeta(s)$ mit s ungerade irrational sein müssen.

Für $s = 1$ heißt die fragliche Reihe die *harmonische* Reihe.

Aufgabe (Cauchysches Verdichtungslemma)**.** Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Folge nicht negativer reeller Zahlen, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann in $\mathbf{R}$, wenn die „verdichtete“ Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ in $\mathbf{R}$ konvergiert.

5.9 Alternierende Reihen

Das Leibnizsche Konvergenzkriterium. Ist $(a_n)_{n\geq m}$ eine monoton fallende Nullfolge nicht negativer reeller Zahlen, so konvergiert die *alternierende* Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

gegen eine reelle Zahl.

Beispiel (Die alternierende harmonische Reihe)**.** Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ konvergiert in $\mathbf{R}$, und zwar gegen $-\ln(2)$.

5.10 Rechnen mit Reihen

Proposition. Seien E und F normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume, und seien $A\colon E \to F$ eine stetige lineare Abbildung, $a \in \mathbf{K}$ und $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ und $\sum\limits_{k=m}^{\infty} w_k$ zwei konvergente Reihen in E, und zwar gelte

$$\sum_{k=m}^{\infty} v_k = v \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=m}^{\infty} w_k = w.$$

Dann gilt auch

$$\sum_{k=m}^{\infty} (v_k + w_k) = v + w, \qquad \sum_{k=m}^{\infty} a \cdot v_k = a \cdot v, \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=m}^{\infty} A(v_k) = A(v).$$

Ist $E = \mathbf{R}$ und gilt $v_k \leq w_k$ für alle $k \geq m$, so gilt auch $v \leq w$. Die letzte Aussage bleibt auch richtig, wenn $v \in \{-\infty, \infty\}$ oder $w \in \{-\infty, \infty\}$.

5.11 Absolute Konvergenz

Es seien E ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum und $(v_n)_{n \geq m}$ eine Folge in E.

Das Konvergenzkriterium von Cauchy für Reihen. Ist E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists n_0 \geq m \, \forall n \geq n_0 \, \forall i \in \mathbf{N}_0 \colon \left\| \sum_{k=n}^{n+i} v_k \right\| < \varepsilon,$$

Definition. Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ heißt *absolut* konvergent, wenn die reelle Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \|v_k\|$ in $\mathbf{R}$ konvergiert.

Theorem 1. Ein normierter Vektorraum ist genau dann ein Banachraum, wenn in ihm jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

In Banachräumen können wir aufgrund dieses Satzes auf die Konvergenz unendlicher Reihen aus der Konvergenz geeigneter reeller Reihen mit nicht negativen Gliedern schließen. Daher hat das folgende Theorem ein weites Anwendungsfeld:

Theorem 2. Ist $(a_n)_{n \geq m}$ eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, so konvergiert die Folge $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ in $\mathbf{R}$, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

Majorantenkriterium. Es existiert eine Folge $(b_n)_{n\geq m}$ nicht negativer reeller Zahlen b_n und ein $n_0 \geq m$, so daß gilt:

$$(\forall k \geq n_0 \colon a_k \leq b_k) \wedge \sum_{k=m}^{\infty} b_k < \infty.$$

Quotientenkriterium. Es existiert ein $n_0 \geq m$ und ein $q \in \,]0,1[$, so daß gilt:

$$\forall n \geq n_0 \colon \Big(a_n \neq 0 \wedge \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\Big).$$

Wurzelkriterium. Es existiert $n_0 \geq \max\{2, m\}$ und ein $q \in \,]0,1[$, so daß gilt:

$$\forall n \geq n_0 \colon \sqrt[n]{a_n} \leq q.$$

Kommentar. Zum Nachweis der Bedingung des Quotienten- oder Wurzelkriteriums ist unter Umständen die folgende Aussage nützlich: Ist $(c_n)_{n\geq m}$ eine reelle Zahlenfolge mit $c := \limsup\limits_{n\to\infty} c_n < 1$, so existiert zu jeder Zahl $q \in \,]c,1[$ ein $n_0 \geq m$, so daß gilt:

$$\forall n \geq n_0 \colon c_n \leq q.$$

Beispiele.

(a) Ist $(v_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge in einem Banachraum und $s \in \mathbf{N}_2$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-s} \cdot v_k$.

(b) Für jedes $z \in \mathbf{C}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n$; ihr Grenzwert wird mit e^z oder $\exp(z)$ bezeichnet. Die Funktion

$$\exp \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto e^z$$

heißt die *Exponentialfunktion* zur Basis $e := \exp(1)$, der sogenannten *Eulerschen Zahl*.

Aufgabe. Man zeige: Die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ eines normierten Vektorraumes E konvergiert sicherlich nicht, wenn für die Folge der reellen Zahlen $a_n := \|v_n\|$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) Es existiert ein $n_0 \geq m$, so daß $\forall n \geq n_0 \colon (a_n \neq 0 \wedge a_{n+1}/a_n \geq 1)$.

(b) Für unendlich viele $n \geq \max\{2, m\}$ gilt $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$.

5.12 Der Umordnungssatz

Theorem. Sei $\sigma\colon \mathbf{N}_m \to \mathbf{N}_m$ eine Bijektion.

(a) Ist $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, so konvergieren die beiden Reihen $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ in $\widehat{\mathbf{R}}$ gegen denselben Grenzwert.

(b) Ist E ein $\mathbf{K}$-Banachraum und ist $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ eine absolut konvergente Reihe, so konvergiert auch die *umgeordnete* Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_{\sigma(k)}$ absolut, und es gilt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} v_{\sigma(k)} = \sum_{k=m}^{\infty} v_k.$$

Kommentar. Ist $(a_n)_{n\geq m}$ eine reelle Zahlenfolge, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ in $\mathbf{R}$, ist diese Reihe aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jedem $a \in \widehat{\mathbf{R}}$ eine Bijektion $\sigma\colon \mathbf{N}_m \to \mathbf{N}_m$, so daß die umgeordnete Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ gegen a konvergiert. Das ist die Aussage des *Riemannschen Umordnungssatzes* (zu finden etwa in Harro Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*). Durch derartige Umordnungen lassen sich auch divergente Reihen erzeugen. Ein Beispiel für eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe ist offenbar die alternierende harmonische Reihe.

Das Problem der Umordnung von Reihen bzw. der „Anordnung“ von Reihen entsteht ganz natürlich bei der Multiplikation von Reihen, die in dem nächsten Abschnitt behandelt wird.

5.13 Produkte von Reihen

Seien E, E' und F drei $\mathbf{K}$-Banachräume, und sei $B\colon E \times E' \to F$ eine stetige bilineare Abbildung (vgl. Abschnitt 5.4). Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ zwei unendliche Reihen in E bzw. E'.

Definition. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$ mit

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} B(u_k, v_{n-k})$$

heißt das *Cauchy-Produkt* der Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ bezüglich des „Produktes“ B.

Es seien jetzt $u \in E$ und $v \in E'$ und gelte $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k = u$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k = v$.

Theorem 1. Sind die beiden Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ absolut konvergent, so konvergiert für jede „Abzählung", d. h. Bijektion, $\mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0, n \mapsto (i_n, k_n)$ die unendliche Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B(u_{i_n}, v_{k_n})$ gegen $B(u, v)$.

Theorem 2. Ist mindestens eine der beiden Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ absolut konvergent, so konvergiert das Cauchy-Produkt dieser beiden Reihen gegen $B(u, v)$.

Kommentar. Die Theoreme bleiben richtig, wenn im Falle $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ für B ein Hermitesches Produkt eingesetzt wird.

5.14 Die Dezimaldarstellung reeller Zahlen

Aufgabe. Man zeige:

(a) Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zahlen $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so konvergiert die unendliche Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$
gegen eine reelle Zahl $a \in [0, 1]$. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ nennen wir eine *Dezimaldarstellung* von a.

(b) Jede reelle Zahl $a \in [0, 1]$ besitzt eine Dezimaldarstellung $(a_n)_{n\geq 1}$. Für $a \neq 1$ kann sie mittels der *Gauß-Klammer* $\lfloor t \rfloor := \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq t\}$ für $t \in \mathbf{R}$ rekursiv definiert werden:
$$a_1 := \lfloor 10 \cdot a \rfloor \qquad \text{und} \qquad \forall n \in \mathbf{N}_1 \colon a_{n+1} := \left\lfloor 10^{n+1} \cdot \Big(a - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 10^{-k}\Big) \right\rfloor .$$

(c) Jedes $a \in [0, 1[$ besitzt höchstens zwei Dezimaldarstellungen: Ist $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Dezimaldarstellung von a, die von der in (b) angegebenen abweicht, so existiert genau ein $m \in \mathbf{N}_1$, so daß

(i) $\forall n < m \colon a_n = b_n$,

(ii) $a_m = b_m + 1$,

(iii) $\forall n > m \colon \big(a_n = 0 \wedge b_n = 9\big)$.

Insbesondere ist die Dezimaldarstellung irrationaler Zahlen $a \in]0, 1[$ eindeutig.

(d) Besitzt $a \in [0, 1]$ eine *periodische* Dezimaldarstellung $(a_n)_{n\geq 1}$, d. h. gilt
$$\exists p \in \mathbf{N}_1 \, \forall n \in \mathbf{N}_1 \colon a_{n+p} = a_n,$$
so ist $a \in \mathbf{Q}$.

Kapitel 6

Erster Teil der Differentialrechnung in einer Veränderlichen

6.1 Offene Teilmengen eines metrischen Raumes

Es sei E ein metrischer Raum.

Definition. Eine Teilmenge $G \in \mathfrak{P}(E)$ heißt *offen* (in E), wenn zu jedem Punkt $p \in G$ ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq G$ existiert.

Beispiel. In jedem metrischen Raum sind die ε-Umgebungen offen. Die „offenen" Intervalle $]a, b[$ mit $\infty \leq a \leq b \leq \infty$ sind in dem Sinne dieser Definition offene Teilmengen des metrischen Raumes $\mathbf{R}$.

Aufgabe. Man zeige:

(a) E und $\emptyset$ sind offene Teilmengen von E.

(b) Für jede Familie $(G_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen G_i von E ist auch die Vereinigung $\bigcup_i G_i$ eine offene Teilmenge von E.

(c) Für je endlich viele offene Teilmengen $G_1, \ldots, G_n$ von E ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ eine offene Teilmenge von E.

(d) Für jede Teilmenge G von E gilt:

$$G \text{ ist offen in } E \iff E \setminus G \text{ ist abgeschlossen in } E.$$

6.2 Häufungspunkte von Teilmengen

Definition. Es seien E ein metrischer Raum, $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge und $p_0 \in E$.

(a) Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$. Die *gelochte* ε-Umgebung von p_0 ist

$$\dot{U}_\varepsilon(p_0) := U_\varepsilon(p_0) \setminus \{p_0\}.$$

(b) Der Punkt p_0 heißt ein *Häufungspunkt* der Teilmenge M, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon \dot{U}_\varepsilon(p_0) \cap M \neq \emptyset.$$

(c) Der Punkt p_0 heißt ein *isolierter* Punkt der Teilmenge M, wenn $p_0 \in M$ und

$$\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon \dot{U}_\varepsilon(p_0) \cap M = \emptyset.$$

Beispiele. (a) Ist G eine offene Teilmenge eines normierten Vektorraumes $E \neq \{0\}$ (z. B. $E = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$), so ist jeder Punkt von $\overline{G}$ ein Häufungspunkt von G.

(b) Ist $M = \bigcup_k I_k$ die Vereinigung einer Familie *nicht entarteter* Intervalle I_k von $\mathbf{R}$ (d. h. $\inf I_k < \sup I_k$), so ist jeder Punkt von M ein Häufungspunkt von M.

Kommentar. Die Mengen $M \subseteq \mathbf{R}$ des letzten Beispieles und die offenen Mengen $G \subseteq \mathbf{C}$ sind die natürlichen Definitionsbereiche der Funktionen, die wir auf Differenzierbarkeit untersuchen.

Aufgabe. Es seien E ein metrischer Raum, $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge und $p_0 \in E$. Man zeige:

(a) Ist p_0 ein Häufungspunkt von M, so ist p_0 auch ein Häufungspunkt einer jeden Teilmenge $N \in \mathfrak{P}(E)$ mit $N \supseteq M$.

(b) Es gibt metrische Räume E jeder Mächtigkeit, so daß jeder Punkt von E ein isolierter Punkt von E ist.

6.3 Grenzwerte von Abbildungen

Seien E und E' metrische Räume, $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine nicht leere Teilmenge, $p_0 \in E$, $q \in E'$ und $f \colon M \to E'$ eine Abbildung.

Definition. Wir sagen, die Abbildung f *konvergiert* in p_0 gegen q (oder q ist der *Grenzwert* von f in p_0), wenn p_0 ein Häufungspunkt von M ist und

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \colon f(\dot{U}_\delta(p_0) \cap M) \subseteq U_\varepsilon(q).$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{p_0} f = \lim_{p \to p_0} f(p) = q.$$

Proposition. Gilt $\lim_{p_0} f = q_1$ und $\lim_{p_0} f = q_2$, so folgt $q_1 = q_2$.

Theorem. Ist p_0 ein Häufungspunkt von M, so gilt: Die Abbildung f konvergiert in p_0 genau dann gegen q, wenn die Abbildung

$$h\colon M \cup \{p_0\} \to E', p \mapsto \begin{cases} f(p) & \text{für } p \neq p_0, \\ q & \text{für } p = p_0 \end{cases}$$

in p_0 stetig ist. Ist $p_0 \in M$, so ist f daher genau dann stetig in p_0, wenn gilt $\lim_{p_0} f = f(p_0)$.

Aufgabe. Ist p_0 ein Häufungspunkt einer Teilmenge $A \in \mathfrak{P}(M)$ (vgl. Aufgabenteil (a) aus 6.2), und ist $\lim_{p_0} f = q$, so gilt auch $\lim_{p_0}(f|A) = q$.

Festsetzung. Wenn jeweils nichts anderes gesagt ist, gelte für den Rest des Kapitels: Sei $\mathbf{K}$ einer der Körper $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, sei E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, sei $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{K})$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathbf{K}$, sei $f\colon D \to E$ eine Funktion und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D.

6.4 Differenzierbarkeit

Definition. Eine Funktion $f\colon D \to E$ heißt in a *differenzierbar*, wenn a ein Häufungspunkt von D ist und die Funktion

$$D \setminus \{a\} \to E, t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

in a gegen einen Vektor aus E konvergiert. Im Falle der Differenzierbarkeit wird dieser Vektor die *Ableitung* von f in a genannt und mit $f'(a)$ bezeichnet. Deuten wir f als „Kurve", so wird $f'(a)$ auch der *Geschwindigkeitsvektor* oder der *Tangentenvektor* an die Kurve zum Zeitpunkt a genannt.

Ist D' die Menge aller Punkte von D, in denen f differenzierbar ist, so heißt die Funktion $f'\colon D' \to E, t \mapsto f'(t)$ die *Ableitung* von f. Ist $D' = D$, so sagen wir, daß f eine (auf ganz D) differenzierbare Funktion ist. Ist die Ableitung $f'\colon D \to E$ auch noch stetig, so heißt f *stetig differenzierbar*. Im Falle $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ heißen die auf offenen Mengen definierten, differenzierbaren Funktionen *holomorphe* Funktionen.

Den Begriff „holomorph" sollte der Leser durch „von einheitlicher Gestalt" oder „aus einem Guß" übersetzen. Holomorphe Funktionen besitzen sehr schöne Eigenschaften. Ihrem ausführlichen Studium widmet sich die Funktionentheorie.

Beispiele.

(a) Ist f eine konstante Funktion, so ist sie überall differenzierbar mit Ableitung $f' = 0$.

(b) Für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ ist die Funktion $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto z^n$ holomorph, und ihre Ableitung ist
$$f'\colon z \mapsto n \cdot z^{n-1}.$$

(c) Die Funktion $f\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}, z \mapsto 1/z$ ist holomorph, und ihre Ableitung ist

$$f'\colon z \mapsto -\frac{1}{z^2}.$$

(d) Die Funktionen $|x|$ und $\surd$ sind in 0 nicht differenzierbar.

Proposition. Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbf{C}$ mit $D := G \cap \mathbf{R} \neq \emptyset$, und sei $f\colon G \to E$ eine holomorphe Funktion mit Werten in einem $\mathbf{C}$-Banachraum E. Betrachten wir E dann als Banachraum über $\mathbf{R}$, indem wir den Skalarbereich einschränken, so ist die Einschränkung $f|D\colon D \to E$ eine differenzierbare Funktion und $(f|D)' = f'|D$.

Korollar. Die Funktionen $x^n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ für $n \in \mathbf{N}_1$ und $1/x\colon \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ sind differenzierbar.

6.5 Was bedeutet Differenzierbarkeit?

Theorem. Ist $a \in D$ ein Häufungspunkt von D, so ist die Funktion $f\colon D \to E$ genau dann in a differenzierbar, wenn es eine in a stetige Funktion $h\colon D \to E$ gibt, so daß gilt:

$$\forall t \in D\colon f(t) = f(a) + h(t) \cdot (t - a).$$

Im Falle der Differenzierbarkeit gilt notwendigerweise

$$\forall t \in D\colon h(t) = \begin{cases} (f(t) - f(a))/(t - a) & \text{für } t \neq a, \\ f'(a) & \text{für } t = a; \end{cases}$$

setzen wir $m := f'(a) \in E$ und $R := h - m\colon D \to E$, so erhalten wir

$$\forall t \in D\colon f(t) = f(a) + m \cdot (t - a) + R(t) \cdot (t - a).$$

Wir nennen $f(a) + m \cdot (t - a)$ die *affine Approximation* an f in a und $R(t) \cdot (t - a)$ das zugehörige *Restglied*. Da R eine in a stetige Funktion mit $R(a) = 0$ ist, sagen wir auch, das Restglied konvergiere (mindestens) von zweiter Ordnung gegen 0 in a.

Korollar. Ist f in a differenzierbar, so ist f in a auch stetig.

Diesen Abschnitt schließen wir mit der Bemerkung, daß Differenzierbarkeit eine *lokale* Eigenschaft ist:

Proposition. Es seien $f\colon D \to E$ und $r \in \mathbf{R}_+$ gegeben. Die Funktion f ist genau dann in a differenzierbar, wenn $f|(D \cap U_r(a))$ in a differenzierbar ist.

6.6 Kettenregel

Theorem. Seien D und $\tilde{D}$ Teilmengen von $\mathbf{K}$, und seien Funktionen $f\colon D \to E$ und $g\colon \tilde{D} \to \mathbf{K}$ gegeben. Es sei $a \in g^{-1}(D)$ ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches $g^{-1}(D)$ der Komposition $f \circ g$. Dann gilt: Ist g in a und ist f in $g(a)$ differenzierbar, so ist auch $f \circ g$ in a differenzierbar und

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Korollar. Ist $f\colon D \to \mathbf{K}$ in a differenzierbar und ist $f(a) \neq 0$, so ist auch $1/f$ in a differenzierbar und

$$(1/f)'(a) = -f'(a)/f^2(a).$$

6.7 Elementare Operationen mit differenzierbaren Funktionen

Linearität. Seien $f\colon D \to E$ und $g\colon D \to E$ in a differenzierbare Funktionen, und sei $c \in \mathbf{K}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $c \cdot f$ in a differenzierbar, und es ist

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \qquad \text{und} \qquad (c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a).$$

Vertauschbarkeit von Differentiation und linearen Operatoren. Seien E, F Banachräume und $A\colon E \to F$ eine stetige lineare Abbildung. Ist $f\colon D \to E$ in $a \in D$ differenzierbar, so ist ebenfalls $A \circ f$ in a differenzierbar und es gilt $(A \circ f)'(a) = A(f'(a))$.

Differenzierbarkeit von Abbildungen in einen Produkvektorraum. Sind E_1, …, E_n Banachräume und ist $E := \prod_{k=1}^{n} E_k$ der Produktbanachraum, so ist eine Funktion $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon D \to E$ genau dann in einem Punkt a differenzierbar, wenn jede der Komponentenfunktionen $f_k\colon D \to E_k$ in a differenzierbar ist. Im Falle der Differenzierbarkeit ist

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_n'(a)).$$

Insbesondere wissen wir also, wie wir Funktionen $f\colon D \to \mathbf{K}^n$ zu differenzieren haben.

Produktregel. Es seien E, E' und F Banachräume und $B\colon E \times E' \to F$ eine stetige, bilineare Abbildung (vgl. Abschnitt 5.4). Sind dann $f\colon D \to E$ und $g\colon D \to E'$ in $a \in D$ differenzierbare Funktionen, so ist auch deren „Produkt“

$$B(f,g)\colon D \to F, t \mapsto B(f(t), g(t))$$

eine in a differenzierbare Funktion, und es ist

$$B(f,g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

Quotientenregel. Sind $f\colon D \to E$ und $g\colon D \to \mathbf{K}$ in a differenzierbare Funktionen und ist $g(a) \neq 0$, so ist auch der Quotient

$$\frac{f}{g} := \frac{1}{g} \cdot f$$

eine in a differenzierbare Funktion, und es ist

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - g'(a) \cdot f(a)}{g^2(a)}.$$

Korollar. Die (komplexen) rationalen Funktionen (vgl. Abschnitt 5.4) sind auf ihrem Definitionsbereich holomorphe Funktionen, und ihre Ableitungen sind wieder rationale Funktionen. Insbesondere gilt

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k\Big)' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot a_{k+1} \cdot z^k.$$

6.8 Lokale Extrema

Definition. Sind E ein metrischer Raum, $f\colon E \to \mathbf{R}$ eine Funktion und $p_0 \in E$, so definieren wir:

(a) f besitzt in p_0 ein *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn

$$\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+\colon f(p_0) = \max(f(U_\varepsilon(p_0))) \quad (\text{bzw. } \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+\colon f(p_0) = \min(f(U_\varepsilon(p_0)))).$$

Gilt zusätzlich $\forall p \in \dot{U}_\varepsilon(p_0)\colon f(p) \neq f(p_0)$ für ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, so sprechen wir von einem *strengen* lokalen Maximum (bzw. Minimum).

(b) Ein (strenges) lokales *Extremum* ist ein (strenges) lokales Maximum oder Minimum. Ein (lokales) Extremum einer reellen Funktion f ist ein Funktionswert von f, nicht die Stelle, in welcher dieser Funktionswert angenommen wird.

Ein notwendiges Kriterium. Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ eine Teilmenge, $f\colon D \to \mathbf{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein *innerer Punkt* von D, d. h. $\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+\colon U_\varepsilon(a) \subseteq D$. Besitzt dann f in a ein lokales Extremum und ist f in a differenzierbar, so ist $f'(a) = 0$.

Kommentar. (a) Aus $f'(a) = 0$ folgt noch nicht notwendigerweise die Existenz eines lokalen Extremums in a. Zum Beispiel gilt $f'(0) = 0$ für $f = x^3$, obwohl diese Funktion in 0 kein lokales Extremum besitzt.

(b) Das Kriterium kann tatsächlich nur in inneren Punkten von D angewendet werden; in „Randpunkten“ von D kann ein lokales Extremum vorliegen, ohne daß dort die Ableitung der Funktion verschwindet.

6.9 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Theorem (Mittelwertsatz)**.** Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$, a, $b \in D$, $a < b$ und $[a,b] \subseteq D$. Dann existiert für jede auf $[a,b]$ stetige und auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbf{R}$ ein $t_0 \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(t_0).$$

Der Satz besagt offensichtlich, daß unter den formulierten Voraussetzungen die Steigung der „Sekanten" (d. h. der Geraden) durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ (die linke Seite der Gleichung) mit der Steigung der Tangenten an den Graphen von f in einem geeigneten Punkt $(t_0, f(t_0))$ mit $a < t_0 < b$ (die rechte Seite der Gleichung) übereinstimmt.

Als Spezialfall des Mittelwertsatzes erhalten wir offenbar:

Satz von Rolle. Gilt unter den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes zusätzlich $f(a) = f(b)$, so ist $f'(t_0) = 0$ für ein geeignetes $t_0 \in]a,b[$.

Warnung. Im Mittelwertsatz dürfen wir den Wertebereich $\mathbf{R}$ nicht durch einen $\mathbf{R}$-Banachraum E mit $\dim E > 1$ ersetzen. In diesem Falle existieren nämlich differenzierbare Funktionen $f\colon [a,b] \to E$ mit $f(a) = f(b)$ (d. h. f parametrisiert eine geschlossene Kurve in E) mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Das einfachste Beispiel hierfür ist die Kreisparametrisierung

$$f\colon [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t)).$$

6.10 Über das globale Verhalten differenzierbarer Funktionen

Theorem. Sei $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall in $\mathbf{R}$, und sei I° das offene Intervall $]\inf(I), \sup(I)[$. Für eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$, die auf I° differenzierbar ist, gelten dann die folgenden Äquivalenzen und Implikationen:

(a) $(\forall t \in I^{\circ}\colon f'(t) = 0) \iff f$ ist konstant.

(b) $(\forall t \in I^{\circ}\colon f'(t) \geq 0) \iff f$ ist monoton wachsend.

(c) $(\forall t \in I^{\circ}\colon f'(t) \leq 0) \iff f$ ist monoton fallend.

(d) $(\forall t \in I^{\circ}\colon f'(t) > 0) \implies f$ ist streng monoton wachsend.

(e) $(\forall t \in I^{\circ}\colon f'(t) < 0) \implies f$ ist streng monoton fallend.

(f) $(\forall t \in I^{\circ}\colon f'(t) \neq 0) \implies f$ ist streng monoton (wachsend oder fallend).

Der Zwischenwertsatz von Darboux für Ableitungen. Sind a, $b \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$ und ist $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion, so existiert zu jedem zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ liegenden Wert m (d. h. $\min(f'(a), f'(b)) < m < \max(f'(a), f'(b))$) ein $t_0 \in]a,b[$ mit $f'(t_0) = m$.

Beweis. [1]Zunächst dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $f'(a) < m < f'(b)$, denn ansonsten können wir einfach von f zu $-f$ und von m zu $-m$ übergehen.

Aufgrund der Definition der Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten, existiert ein $h \in]0, (b-a)/2[$, so daß

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < m < \frac{f(b-h)-f(b)}{-h} = \frac{f(b)-f(b-h)}{h} \tag{1}$$

gilt.

Die Idee ist nun, daß wir die „Randterme" der Ungleichung (1) als „stetige Deformation" eines Differenzenquotienten interpretieren. Dazu definieren wir zunächst den affinen Weg

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbf{R}, t \mapsto (1-t)\cdot a + t\cdot (b-h)$$

von a nach $b-h$. Wenn wir dann

$$g\colon [0,1] \to \mathbf{R}, t \mapsto \frac{f(\gamma(t)+h)-f(\gamma(t))}{h}$$

setzen, bekommen wir, daß $g(0)$ und $g(1)$ die beiden Randterme von (1) sind.

Aufgrund des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen existiert daher ein $t_1 \in]0,1[$, so daß

$$m = g(t_1) = \frac{f(\gamma(t_1)+h)-f(\gamma(t_1))}{h} \tag{2}$$

ist. Nach dem Mittelwertsatz aus Abschnitt 6.9 gibt es weiter eine Stelle $t_0 \in]\gamma(t_1), \gamma(t_1)+h[\subseteq]a,b[$, an der f' den Wert des Differenzenquotienten auf der rechten Seite von (2) annimmt:

$$\frac{f(\gamma(t_1)+h)-f(\gamma(t_1))}{h} = f'(t_0).$$

Zusammen mit (2) folgt dann die Behauptung $f'(t_0) = m$. □

Kommentar. Aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist der Zwischenwertsatz von Darboux eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen Zwischenwertsatzes.

6.11 Das Kriterium für strenge absolute Extrema

Theorem. Sei $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall, und sei $I^{\circ} :=]\inf(I), \sup(I)[$. Weiterhin sei $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine auf I stetige und auf I° differenzierbare Funktion, für deren Ableitung gelte:

(a) f' hat in I° genau eine Nullstelle; diese bezeichnen wir mit a.

(b) Es existieren Stellen t_1, $t_2 \in I^{\circ}$ mit $f'(t_1) < 0 < f'(t_2)$.

Dann trifft genau einer der beiden folgenden Fälle zu:

[1]Dieser Beweis für den Zwichenwertsatz von Darboux ist mir vor kurzem von Herrn Prof. Reckziegel mitgeteilt worden.

(a) Es ist $t_1 < a < t_2$. In diesem Falle hat f in a ein *strenges absolutes Minimum*, d. h.:

$$\forall t \in I \setminus \{a\} \colon f(t) > f(a).$$

(b) Es ist $t_2 < a < t_1$. In diesem Falle hat f in a ein *strenges absolutes Maximum*, d. h.:

$$\forall t \in I \setminus \{a\} \colon f(t) < f(a).$$

6.12 Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Theorem. Es seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall und $f \colon I \to \mathbf{R}$ eine streng monotone Funktion mit Umkehrfunktion $\check{f} \colon f(I) \to \mathbf{R}$. Weiterhin sei $a \in I$ und $b := f(a)$. Ist dann f in a differenzierbar und ist $f'(a) \neq 0$, so ist $\check{f}$ in b differenzierbar, und es gilt:

$$\check{f}'(b) = 1/f'(a).$$

Kommentar. Über die Umkehrbarkeit holomorpher Funktionen $f \colon G \to \mathbf{C}$ läßt sich folgendes sagen: In der Funktionentheorie wird gezeigt, daß holomorphe Funktionen beliebig oft differenzierbar sind. Insbesondere ist daher f stetig differenzierbar. Nach dem „lokalen Umkehrsatz“ der mehrdimensionalen Analysis folgt dann: Ist $f'(a) \neq 0$ für ein $a \in G$, so existiert eine Umgebung $U_\varepsilon(a) \subseteq G$, so daß $U := f(U_\varepsilon(a))$ eine offene Teilmenge von $\mathbf{C}$ ist, und daß die Abbildung $f|U_\varepsilon(a) \colon U_\varepsilon(a) \to U$ eine stetige Umkehrung $\check{f}$ besitzt. Mit denselben Überlegungen wie im reellen Fall können wir dann auch hier die Differenzierbarkeit von $\check{f}$ in $b := f(a)$ und die Formel $\check{f}'(b) = 1/f'(a)$ folgern.

Beispiel. Für jedes $n \in \mathbf{N}_2$ ist $\sqrt[n]{\ }$ außerhalb von 0 differenzierbar, und es gilt

$$\sqrt[n]{\ }' = \frac{1}{n} \cdot (x^{1-n} \circ \sqrt[n]{\ }).$$

6.13 Anziehende und abstoßende Fixpunkte

Seien (E, d) ein metrischer Raum, D eine nicht leere Teilmenge von E, $f \colon D \to E$ eine Abbildung und p^* ein Fixpunkt von f.

Definition.

(a) Der Punkt p^* heißt ein *anziehender* Fixpunkt oder ein *Attraktor* von f, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ gibt, so daß $U_\varepsilon(p^*) \subseteq D$ und für alle $p \in \dot{U}_\varepsilon(p^*)$ gilt:

  (i) $d(f(p), p^*) < d(p, p^*)$, und

  (ii) die Banachfolge bezüglich f mit Startpunkt p (die ja wegen (i) existiert) konvergiert gegen p^*.

(b) Der Punkt p^* heißt ein *abstoßender* Fixpunkt oder ein *Repeller* von f, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ gibt, so daß für alle $p \in \dot{U}_\varepsilon(p^*)$ gilt:

$$d(f(p), p^*) > d(p, p^*).$$

Kommentar. In der Theorie dynamischer Systeme auf topologischen Räumen muß ein allgemeinerer Begriff von anziehenden und abstoßenden Fixpunkten eingeführt werden, weil dort keine Metriken zur Verfügung stehen. Für die meisten Zwecke reicht aber unsere „einfache“ Definition aus.

Aufgabe. Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{K})$ eine nicht leere offene Teilmenge von $\mathbf{K}$ und $f\colon D \to \mathbf{K}$ eine in $a \in D$ differenzierbare Funktion. Wir setzen voraus, daß a ein Fixpunkt von f ist, und definieren $q := (1 + |f'(a)|)/2$. Man zeige:

(a) Ist $f'(a) \neq 1$, so ist a ein *isolierter Fixpunkt*, d. h. a ist ein isolierter Punkt der Menge $\operatorname{Fix}(f)$ aller Fixpunkte von f. (Vergleiche die Definition (c) aus Abschnitt 6.2.)

(b) Ist $|f'(a)| < 1$, also $0 < q < 1$, so existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $U_\delta(a) \subseteq D$ und

$$\forall t \in \dot{U}_\delta(a)\colon\ |f(t) - a| < q \cdot |t - a|$$

(d. h. insbesondere $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\delta(a)$). Für jedes $t_0 \in U_\delta(a)$ konvergiert daher (?) die Banachfolge bezüglich f mit Startpunkt t_0 gegen a; also ist a ein Attraktor von f.

(c) Ist $|f'(a)| > 1$, also $1 < q$, so existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $U_\delta(a) \subseteq D$ und

$$\forall t \in \dot{U}_\delta(a)\colon\ |f(t) - a| > q \cdot |t - a|\,;$$

also ist a ein abstoßender Fixpunkt von f.

Existiert zu $t_0 \in \dot{U}_\delta(a)$ die Banachfolge $(t_n)_{n\geq 0}$ bezüglich f mit Startpunkt t_0, so verläßt diese daher (?) irgendwann $U_\delta(a)$.

6.14 Das Newtonsche Nullstellenverfahren

Aufgabe. Seien I ein nicht leeres, offenes Intervall in $\mathbf{R}$, $a \in I$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung keine Nullstelle besitzt. Also ist f streng monoton (vgl. 6.10) und besitzt somit höchstens eine Nullstelle. Es sei $g := x - f/f'$. Man zeige:

(a) Für jedes $a \in I$ ist $g(a)$ die Nullstelle der affinen Approximation

$$t \mapsto f(a) + f'(a) \cdot (t - a)$$

von f im Punkt a, deren Graph bekanntlich die Tangente an den Graphen von f im Punkte $(a, f(a))$ ist.

(b) Es ist a genau dann Nullstelle von f, wenn a ein Fixpunkt von g ist.

(c) Ist a eine Nullstelle von f und ist f' in a stetig, so ist g in a differenzierbar mit Ableitung $g'(a) = 0$, und somit (?) ist a ein anziehender Fixpunkt von g

(vgl. Abschnitt 6.13); insbesondere existiert also ein $r \in \mathbf{R}_+$, so daß für jedes $t_0 \in U_r(a)$ die „Newton-Folge“ $(t_n)_{n\geq 0}$ mit

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$$

gegen a konvergiert.

(d) Das Heronsche Verfahren zur Ermittlung von Quadratwurzeln kann als Newtonsches Nullstellenverfahren für eine geeignete Funktion betrachtet werden. Für welche?

(e) Ein Nachteil des Newtonschen Nullstellenverfahrens besteht darin, daß die Ableitung der zu untersuchenden Funktion bekannt sein muß. Dieser Mangel läßt sich dadurch beheben, daß die Ableitung $f'(t_n)$ durch den Differenzenquotienten $(f(t_n) - f(t_{n-1}))/(t_n - t_{n-1})$ ersetzt wird. In diesem Falle müssen natürlich zwei Startwerte t_0 und t_1 vorgegeben werden. Dadurch (?) gelangen wir zur rekursiven Definition

$$t_{n+1} = \frac{t_{n-1} \cdot f(t_n) - t_n \cdot f(t_{n-1})}{f(t_n) - f(t_{n-1})}$$

für $n \geq 1$. Das hierdurch beschriebene Nullstellenverfahren heißt das *Sekantenverfahren*, oder auch die Nullstellenbestimmung nach der *regula falsi*. Man zeige, daß in Analogie zu (a) gilt: Das Folgeglied t_{n+1} wird durch den Schnittpunkt der x-Achse mit der Sekante durch die Punkte $(t_{n-1}, f(t_{n-1}))$ und $(t_n, f(t_n))$ festgelegt.

Man mache sich die Wirkungsweise des Newtonschen Nullstellenverfahrens und des Sekantenverfahrens an Skizzen klar.

Wegen seiner Wichtigkeit sei für das Sekantenverfahren eine Scheme-Prozedur angegeben:

```
(define (secant f t0 t1 eps)
  (let loop ((i 0) (x0 t0) (x1 t1) (y0 (f t0)))
    (let* ((y1 (f x1))
           (d (- y1 y0)))
      (cond
       ((< (abs y1) eps)
        x1)
       ((= i 50)
        (error "secant: aborted after 50 iterations"))
       ((< (abs d) 1e-10)
        (error "secant: aborted due to divergence" d))
       (else
        (loop (+ i 1)
              x1
              (/ (- (* x0 y1) (* x1 y0)) d)
              y1))))))
```

Rufen wir die Prozedur `(secant f t0 t1 eps)` mit einer Prozedur f auf, welche reelle Zahlen auf reelle Zahlen abbildet, so liefert sie eine approximative Nullstelle von f, an der der Wert von 0 um weniger als eps abweicht, nach dem Sekantenverfahren mit den Startpunkten t_0 und t_1. Die Prozedur bricht mit einem Fehler ab, wenn entweder mehr als 50 Schritte benötigt werden oder die Sekante fast waagerecht ist, so daß unsinnige Ergebnisse auftreten können.

6.15 Das Theorem von der kontrollierten Schwankung

Theorem 1 (Theorem von der kontrollierten Schwankung)**.** Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$, sowie a, $b \in D$ mit $a < b$ und $[a, b] \subseteq D$, und sei E ein Banachraum. Sind dann $f\colon D \to E$ und $g\colon D \to \mathbf{R}$ auf $[a, b]$ stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit

$$\forall t \in \,]a, b[\,:\ \|f'(t)\| \leq g'(t),$$

so folgt

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Beweis. Für jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ beweisen wir im folgenden die Aussage

$$\forall t \in [a, b]\colon\ \|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + (1 + t - a) \cdot \varepsilon. \tag{1}$$

Damit sind wir fertig, denn danach gilt insbesondere

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \lambda(\varepsilon)$$

mit der stetigen Funktion $\lambda := (1 + b - a) \cdot x$. Aus der Stetigkeit in 0 folgt sogar

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \lambda(0) = g(b) - g(a),$$

also die Behauptung des Theorems.

Um (1) zu beweisen, definieren wir die stetige Funktion

$$\varphi\colon [a, b] \to \mathbf{R}, t \mapsto g(t) - g(a) + (1 + t - a) \cdot \varepsilon - \|f(t) - f(a)\|.$$

Dann ist (1) äquivalent zu $\varphi \geq 0$. In jedem Falle ist $\varphi(a) = \varepsilon > 0$.

Wir nehmen jetzt an, daß $\varphi \geq 0$ nicht gilt und führen dies zu einem Widerspruch. Unter der Annahme ist jedenfalls

$$B := \{t \in [a, b] \mid \varphi(t) < 0\} \neq \emptyset,$$

und damit $s := \inf(B) \in [a, b]$. Wegen $\varphi(a) > 0$ und der Stetigkeit von φ in a ist $s > a$. Nach Definition von B damit sogar $\varphi|\,[a, s[\, \geq 0$. Da φ in s stetig ist, folgt daraus $\varphi(s) \geq 0$, also $s \notin B$. Da nach Annahme $B \neq \emptyset$, muß folglich $s < b$ gelten. Insgesamt haben wir also $a < s < b$ bewiesen.

Insbesondere sind f und g in s differenzierbar. Aufgrund der Definition der Ableitung existiert damit ein $\delta \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\delta(s) \subseteq [a, b]$ und

$$\forall t \in \dot{U}_\delta(a)\colon \left(\|f'(s)\| \geq \left\|\frac{f(t) - f(s)}{t - s}\right\| - \frac{\varepsilon}{2} \wedge g'(s) \leq \frac{g(t) - g(s)}{t - s} + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Da nach Voraussetzung $\|f'(s)\| \leq g'(s)$ ist, folgt daraus für alle $t \in \,]s, s + \delta[$, daß

$$\frac{\|f(t) - f(s)\|}{t - s} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{g(t) - g(s)}{t - s} + \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$g(t) - g(s) + (t - s) \cdot \varepsilon \geq \|f(t) - f(s)\|.$$

Andererseits gilt wegen $\varphi(s) \geq 0$, daß

$$g(s) - g(a) + (1 + s - a) \cdot \varepsilon \geq \|f(s) - f(a)\|.$$

Durch Addition der letzten beiden Ungleichungen erhalten wir

$$g(t) - g(a) + (1 + t - a) \cdot \varepsilon \geq \|f(t) - f(s)\| + \|f(s) - f(a)\| \geq \|f(t) - f(a)\|,$$

also $\varphi(t) \geq 0$. Damit ist $U_\delta(s) \cap B = \emptyset$, ein Widerspruch zur Definition von s als Infimum von B. □

Kommentar 1.

(a) Dieses Theorem ist der Ersatz des Mittelwertsatzes aus Abschnitt 6.9 für Banachraum-wertige Funktionen; es ist für diese Funktionen ähnlich fundamental wie der Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen.

(b) Bei J. Dieudonné heißt dieses Theorem aus historischen Gründen auch „Mittelwertsatz“, H. Cartan spricht vom „Satz vom beschränkten Wachstum“.

(c) Der Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen läßt sich auch auf andere Weise auf Banachraum-wertige Funktionen verallgemeinern. Zum Beispiel gilt das folgende Theorem:

Mittelwertabschätzungssatz. Ist $f\colon [a, b] \to E$ eine auf einem Intervall definierte stetige Funktion in einen $\mathbf{K}$-Banachraum E, welche auf $]a, b[$ differenzierbar ist, so existiert ein $t_0 \in\,]a, b[$, so daß gilt:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(t_0)\| \cdot (b - a). \tag{2}$$

Wie wir im Kommentar am Ende von Abschnitt 6.9 gesehen haben, können wir für $\dim E \geq 2$ nicht erwarten, ein $t_0 \in\,]a, b[$ zu finden, für das in (2) Gleichheit gilt.

Der Mittelwertabschätzungssatz wird mit der folgenden Folgerung aus dem „Fortsetzungssatz von Hahn–Banach“, einem Theorem der Funktionalanalysis, bewiesen:

Folgerung des Fortsetzungssatzes von Hahn–Banach. Ist E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, so existiert zu jedem Vektor $v_0 \in E$ eine *Linearform* (d. h. eine $\mathbf{K}$-wertige lineare Abbildung) $\lambda\colon E \to \mathbf{K}$ mit

$$\lambda(v_0) = \|v_0\| \wedge \forall v \in E\colon\ |\lambda(v)| \leq \|v\|.$$

Beweis für den Mittelwertabschätzungssatz. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ annehmen (indem wir im Falle von $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ den Banachraum E als Banachraum über $\mathbf{R}$ betrachten). Sei $v_0 := f(b) - f(a)$. Wir wählen eine Linearform $\lambda\colon E \to \mathbf{R}$ nach der Folgerung, und definieren damit die Funktion $\psi := \lambda \circ f\colon [a, b] \to \mathbf{K}$. Da λ nach Aufgabe 2 aus Abschnitt 5.3 stetig ist, ist auch ψ stetig und wegen der Vertauschbarkeit von Differentiation und linearen Operationen (vgl. 6.7) auf dem Intervall $]a, b[$ differenzierbar. Nach dem klassischen Mittelwertsatz existiert daher ein $t_0 \in\,]a, b[$ mit $\psi(b) - \psi(a) = \psi'(t_0) \cdot (b - a)$. Wegen $\psi' = \lambda \circ f$ folgt dann

$$\begin{aligned}\|f(b) - f(a)\| &= \|v_0\| = \lambda(v_0) = \lambda(f(b) - f(a)) = \lambda(f(b)) - \lambda(f(a)) = \psi(b) - \psi(a) \\ &= \psi'(t_0) \cdot (b - a) = \lambda(f'(t_0)) \cdot (b - a) \leq \|f'(t_0)\| \cdot (b - a).\end{aligned}$$ □

Theorem 2 (Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen)**.** Sei $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall, und sei $f\colon I \to E$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung folgendermaßen durch eine Konstante $L \in [0, \infty[$ abgeschätzt werden kann:

$$\forall t \in I\colon \ \|f'(t)\| \leq L.$$

Dann gilt:

$$\forall t, s \in I\colon \ \|f(t) - f(s)\| \leq L \cdot |t - s| \,;$$

insbesondere ist f gleichmäßig stetig.

Kommentar 2. Ist f stetig differenzierbar (vgl. 6.4) und I folgenkompakt, so ist $L := \sup\{\|f'(t)\| \mid t \in I\} < \infty$, und das letzte Theorem kann mit dieser Konstanten angewendet werden.

Korollar. Ist $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall und $f\colon I \to E$ eine stetige Funktion, die auf $I^{\circ} :=]\inf(I), \sup(I)[$ differenzierbar mit Ableitung $f' \equiv 0$ ist, so ist f konstant (vgl. (a) des Theorems aus Abschnitt 6.10).

6.16 Über Fehlerfortpflanzung

In den Naturwissenschaften wird laufend folgendes Verfahren zur Bestimmung einer Größe, sagen wir G, benutzt: Eine Funktion $G = f(A)$ ist bekannt, es wird A gemessen und vermittels f die interessierende Größe bestimmt. (Beispiel: Zur Bestimmung der Temperatur wird die Höhe einer Quecksilber-/Alkohol-/Wassersäule abgelesen.) Da sich die Größe A aber nur bis auf einen gewissen Meßfehler ermitteln läßt, ist es wichtig zu wissen, wie sich dieser Meßfehler auf die Berechnung von $G = f(A)$ auswirkt. Dazu wird das in folgender Aufgabe beschriebene Verfahren angewendet.

Aufgabe.

(a) Seien D eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}$, $f\colon D \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion, $t_0 \in D$ und $\delta \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\delta(t_0) \subseteq D$. Man zeige: Existieren m, $M \in \mathbf{R}$ mit

$$\forall t \in U_\delta(t_0)\colon m \leq |f'(t)| \leq M,$$

so gilt für alle $h \in \mathbf{R}$ mit $|h| < \delta$, daß

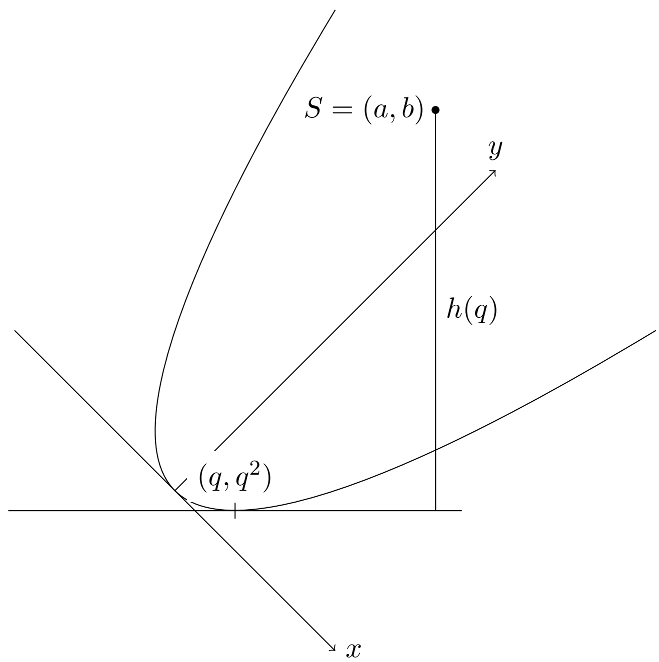
$$m \cdot |h| \leq |f(t_0 + h) - f(h)| \leq M \cdot |h| \,.$$

(b) Man schätze den Fehler ε ab, wenn man bei der Berechnung von π^7 den Näherungswert $\pi \approx 3{,}14$ benutzt? Wie groß ist der auf diese Weise approximativ bestimmte Wert von π^7 und von welcher Größe ist der relative Fehler ε/π^7?

6.17 Gleichgewichtslagen eines inhomogenen Parabelsegmentes

Aufgabe. Ein aus starkem Blech gearbeitetes Parabelsegment der Masse m werde mit der Randkante auf einer waagerechten Ebene aufgesetzt, so daß es sich dort (auf der Kante abrollend) frei bewegen kann. Wir lassen variable Dicke des Bleches zu, so daß wir über die Lage des Schwerpunktes S keine Angaben machen können (außer der, daß S ein Punkt des Segmentes ist). Es soll untersucht werden, wie die Zahl der stabilen Gleichgewichtslagen (siehe unten) des Parabelsegmentes von der Lage des Schwerpunktes abhängt.

Mathematisierung des Problems: Mit dem Parabelsegment verbinde man fest ein kartesisches Koordinatensystem und nehme an, daß in diesem die Parabel die Gleichung $y = x^2$ hat. Die möglichen Lagen (gemeint sind auch die Nicht-Gleichgewichtslagen) des Segmentes sind dann durch den jeweiligen Berührungspunkt (q, q^2) des Segmentes mit der Ebene, das heißt durch den Parameter q, charakterisiert. Der Schwerpunkt möge die Koordinaten (a, b) haben:



(a) Man bestimme mit Methoden der Linearen Algebra in Abhängigkeit von q die Höhe $h(q)$ von S über der Ebene.

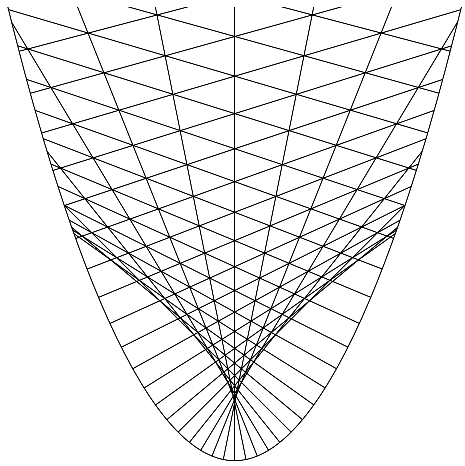
(b) Damit ist $V(q) := m \cdot g \cdot h(q)$ die potentielle Energie (wobei die Ebene das Nullniveau definiert) des vorliegenden mechanischen Systems (hierbei ist $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ die Erdbeschleunigung). Bekanntlich befindet sich dieses in einer *stabilen Gleichgewichtslage*, wenn V für den zugehörigen Parameter q ein strenges lokales Minimum hat.

Man beweise folgende Reihe von Äquivalenzen:

$$V'(q) = 0 \iff P_{(a,b)}(q) := 2 \cdot q^3 - (2b-1) \cdot q - a = 0$$
$$\iff \text{Der Schwerpunkt } S \text{ liegt auf der Normalen der Parabel im Punkte } (q, q^2).$$

(c) Man berechne mit Hilfe der letzten Teilaufgabe die Positionen von S, für welche es nur eine stabile Gleichgewichtslage des Systems gibt. Insbesondere bestimme man die Trennlinie zu dem Bereich der Positionen von S, für welche es mehrere stabile Gleichgewichtslagen des Systems gibt (wieviele sind es?).

(Tip: Zunächst untersuche man die Gestalt des Graphen $P_{(a,b)}$ durch eine „klassische Kurvendiskussion“ und ermittle dadurch die Anzahl der Nullstellen von $P_{(a,b)}$.)



Kapitel 7

Spezielle Funktionen

7.1 Konvergenz von Reihen von Funktionen

Seien M eine beliebige Menge, E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, $(f_n)_{n\geq m}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon M \to E$ und $f\colon M \to E$ eine weitere Funktion. Dann können wir die Folge $(s_n)_{n\geq m}$ der „Partialsummen“

$$s_n := \sum_{k=m}^{n} f_k\colon M \to E$$

definieren. Wir sagen, daß die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f_k$ *punktweise* bzw. *gleichmäßig* gegen f konvergiert, wenn die Funktionenfolge $(s_n)_{n\geq m}$ punktweise bzw. gleichmäßig gegen f konvergiert (vgl. Abschnitt 5.5).

Aus dem 1. Vererbungssatz aus Abschnitt 5.5 folgt unmittelbar:

Proposition. Ist M ein metrischer Raum, ist $p_0 \in M$, sind alle Abbildungen f_n in p_0 stetig und konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f_k$ gleichmäßig gegen f, so ist auch f in p_0 stetig.

Theorem. Existieren ein $n_0 \geq m$ und eine Folge $(b_n)_{n\geq n_0}$ reeller Zahlen $b_n \geq 0$ mit $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n < \infty$, so daß für alle $n \geq n_0$ und $p \in M$ gilt, daß

$$\|f_n(p)\| \leq b_n, \tag{1}$$

so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f_n$ auf ganz M gleichmäßig gegen eine Funktion f. Ist in diesem Falle M ein metrischer Raum und sind alle Abbildungen f_n stetig, so ist auch die Grenzfunktion stetig.

Beweis. Nach (1) ist $(f_n)_{n\geq m}$ eine Folge im Banachraum $B(M,E)$ (vgl. Abschnitt 5.6). Nach dem Majorantenkriterium und (1) konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f_n$ absolut, und damit konvergiert sie auch im Banachraum $B(M,E)$ gegen eine Funktion $f \in B(M,E)$ nach Abschnitt 5.11. Damit folgt nach dem ersten Theorem aus Abschnitt 5.6, daß die Reihe auch gleichmäßig gegen f konvergiert. Die Aussage über die Stetigkeit ist eine Folge der vorangegangenen Proposition. □

Aufgabe (Beispiel einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion)**.** Sei die periodische Funktion $f_0\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit der Periode 1 diejenige, die auf dem Intervall $[-1/2, 1/2]$ mit der Betragsfunktion übereinstimmt. Damit definieren wir eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ stetiger Funktionen $f_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ durch

$$f_n(t) \coloneqq 2^{-n} \cdot f_0(2^n \cdot t).$$

Dann gilt: Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion f, und diese Funktion ist stetig, aber nirgends differenzierbar.

7.2 Hauptsatz über die Konvergenz von Potenzreihen

Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine komplexe Zahlenfolge. Für die definieren wir

$$\kappa \coloneqq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \widehat{\mathbf{R}}$$

und

$$\rho \coloneqq \begin{cases} \infty & \text{für } \kappa = 0, \\ 1/\kappa & \text{für } \kappa \in \mathbf{R}_+, \\ 0 & \text{für } \kappa = \infty. \end{cases}$$

Weiterhin setzen wir $U_\infty(0) \coloneqq \mathbf{C}$ und sprechen auch in diesem Falle von einer Kreisscheibe.

Theorem (Hauptsatz über die Konvergenz von Potenzreihen)**.** Für die *Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

gilt:

(a) Für jedes $z \in U_\rho(0)$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ absolut. Mehr noch: Auf jeder folgenkompakten Teilmenge $K \subseteq U_\rho(0)$ ist die Konvergenz gleichmäßig.

(b) Für alle $z \in \mathbf{C}$ mit $|z| > \rho$ divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ (d. h. sie konvergiert gegen keine komplexe Zahl).

(c) Für $z \in \mathbf{C}$ mit $|z| = \rho$ läßt sich keine allgemeine Aussage über Konvergenz bzw. Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ treffen.

(d) Ist $\rho = 0$, so liegt der Fall vor, daß die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ nur in $z = 0$ gegen einen Wert konvergiert, und zwar gegen a_0.

Wegen (a) und (b) heißt ρ der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$. Im Falle $\rho > 0$ definiert die Reihe über der offenen Kreisscheibe $U_\rho(0)$ eine Funktion $f\colon U_\rho(0) \to \mathbf{C}$, die wegen (a) stetig ist; es ist $f(0) = a_0$.

Der *Konvergenzkreis* von Potenzreihen wurde von N. H. Abel entdeckt, die in der Voraussetzung angegebene Berechnung des Konvergenzradius' geht auf J. Hadamard zurück.

Aufgabe 1. Existiert für eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ in $[0, \infty]$, so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Beispiele. Die Potenzreihen

$$\exp(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n, \qquad \text{die } \textit{Exponentialfunktion},$$

$$\cos(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n}, \qquad \text{die } \textit{Kosinusfunktion},$$

$$\sin(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}, \qquad \text{die } \textit{Sinusfunktion},$$

$$\cosh(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \cdot z^{2n}, \qquad \text{die } \textit{Hyperbelkosinusfunktion},$$

$$\sinh(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}, \qquad \text{die } \textit{Hyperbelsinusfunktion},$$

besitzen den Konvergenzradius ∞; daher sind die durch sie definierten *elementaren* Funktionen auf ganz $\mathbf{C}$ definiert. Anstatt $\exp(z)$ wird häufig auch e^z geschrieben. Weitere Beispiele von Potenzreihen mit den durch sie definierten Funktionen sind

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\Big| U_1(0) \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}\Big| U_1(0).$$

Proposition. Es gilt $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$.

Aufgabe 2. Für alle $z \in \mathbf{C}$ gilt:

(a) $\exp(i \cdot z) = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$,

(b) $\cos(-z) = \cos(z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$,

(c) $\cos(z) = (\exp(i \cdot z) + \exp(-i \cdot z))/2$ und $\sin(z) = (\exp(i \cdot z) - \exp(-i \cdot z))/(2 \cdot i)$, die *Eulerschen Formeln*,

(d) $\cosh(z) = \cos(i \cdot z)$ und $\sinh(z) = -i \cdot \sin(i \cdot z)$,

(e) $\cosh(-z) = \cosh(z)$ und $\sinh(-z) = -\sinh(z)$,

(f) $\cosh(z) = (\exp(z) + \exp(-z))/2$ und $\sinh(z) = (\exp(z) - \exp(-z))/2$.

Die Aussagen dieser Aufgabe zeigen insbesondere, daß und wie die Funktionen cos, sin, cosh und sinh durch die Exponentialfunktion ausgedrückt werden können.

7.3 Der Identitätssatz für Potenzreihen

Theorem. Es seien $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ und $\tilde{f}(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \cdot z^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradius ρ bzw. $\tilde{\rho}$, und es gelte $0 < \rho \leq \tilde{\rho}$. Existiert dann in $\dot{U}_\rho(0)$ eine gegen 0 konvergierende Folge $(z_n)_{n\geq 0}$, so daß

$$\forall n \geq 0 \colon f(z_n) = \tilde{f}(z_n)$$

gilt, so ist $a_n = \tilde{a}_n$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$, also insbesondere $\rho = \tilde{\rho}$ und $f \equiv \tilde{f}$.

7.4 Der Abelsche Grenzwertsatz

Theorem. Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe mit einem Konvergenzradius $\rho \in \mathbf{R}_+$, die in einem Punkt w auf dem Rand des Konvergenzkreises (d. h. $|w| = \rho$) auch noch konvergiert. Dann konvergiert diese Potenzreihe auf jeder der folgenkompakten Teilmengen

$$D_M := \{z \in \mathbf{C} \mid |w - z| \leq M \cdot (|w| - |z|)\}$$

mit $M \in [1, \infty[$ gleichmäßig. Insbesondere ist daher die Grenzfunktion auf jedem D_M, also erst recht auf $[0, w]$ stetig.

Beweisskizze zum Theorem.

0. Schritt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß $\rho = 1$ und $w = 1$.

1. Schritt. Als nächstes zeigt man die Aussage über die „Abelsche partielle Summation“: Seien $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbf{C}$ komplexe Zahlen und $A_m := \sum\limits_{k=0}^{m} a_k$ für $m = 0, \ldots, n$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot (b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n.$$

2. Schritt. Schließlich wendet man Abelsche partielle Summation auf $a_m, \ldots, a_n, z^m, \ldots, z^n$ $(n \geq m)$ an und benutzt die Konvergenz der Reihe für $z = 1$ und die Definition von D_M, um zu zeigen, daß $(P_n)_{n \geq 0}$ mit $P_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k | D_M$ eine Cauchyfolge in $B(D_M, \mathbf{C})$ ist. (Warum ist die Behauptung damit bewiesen?) $\square$

Kommentar. Durch Anwendung des Abelschen Grenzwertsatzes lassen sich die folgenden wichtigen Ergebnisse

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = -\ln(2) \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

erhalten. Hierzu werden allerdings Kenntnisse gebraucht, die wir erst in den folgenden Abschnitten herleiten.

7.5 Holomorphie von Potenzreihen

Theorem. Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Dann besitzen die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot z^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot a_n \cdot z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot a_{n-1} \cdot z^n$$

ebenfalls den Konvergenzradius ρ. Ist $\rho > 0$, so ist die durch die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ dargestellte Funktion $f \colon U_\rho(0) \to \mathbf{C}$ holomorph, und für ihre Ableitung gilt

$$\forall z \in U_\rho(0) \colon f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot z^n.$$

Weiterhin ist die durch die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot a_n \cdot z^{n+1}$ dargestellte Funktion $F \colon U_\rho(0) \to \mathbf{C}$ eine *Stammfunktion* von f, d. h. per definitionem $F' = f$.

Beweis.

1. Schritt. Wir zeigen als erstes, daß die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}\cdot z^n$ den Konvergenzradius ρ hat:

Für jedes $z \in \mathbf{C}^*$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}\cdot z^n$ genau dann konvergent, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}\cdot z^{n+1}$ konvergent ist. Daher ist wegen

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

der Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}\cdot z^n$ durch

$$\Bigl(\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot|a_n|}\Bigr)^{-1} = \Bigl(\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\Bigr)^{-1} = \rho$$

gegeben.

2. Schritt. Wir behaupten, daß für jedes $r \in\,]0,\rho[$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot|a_n|\cdot r^{n-1}$ konvergiert: Dies folgt aus dem ersten Schritt und Teil (a) des Theorems aus Abschnitt 7.2.

3. Schritt. Wir zeigen, daß die Abbildung f in jedem $a \in U_\rho(0)$ differenzierbar ist: Für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ definieren wir das Polynom

$$Q_n\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}, z\mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a^k\cdot z^{n-k-1}.$$

Dann gilt bekanntlich für alle $z \in \mathbf{C}$, daß

$$z^n - a^n = (z-a)\cdot Q_n(z),$$

und daher für alle $z \in U_\rho(0)$, daß

$$f(z) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot(z^n - a^n) = (z-a)\cdot h(z)$$

mit

$$h\colon U_\rho(0)\to\mathbf{C}, z\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot Q_n(z).$$

Nach Abschnitt 6.5 genügt es, die Stetigkeit von h in a zu beweisen. Dazu wählen wir ein $r \in\,]|a|\,,\rho[$. Dann gilt für alle $n \in \mathbf{N}_1$ und $z \in U_r(0)$, daß $|Q_n(z)| \le n\cdot r^{n-1}$, also $|a_n\cdot Q_n(z)| \le n\cdot|a_n|\cdot r^{n-1}$. Aufgrund des zweiten Schrittes und des Theorems aus Abschnitt 7.1 ist daher $h|U_r(0)$ stetig. Insbesondere ist h in a stetig und damit f in a differenzierbar.

4. Schritt. Weil jeweils $Q_n(a) = n\cdot a^{n-1}$ ist, erhalten wir nach Abschnitt 6.5, daß

$$f'(a) = h(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot Q_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot a^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}\cdot a^n.$$

5. Schritt. Um schließlich die Aussage über die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot a_n \cdot z^{n+1}$ zu beweisen, wenden wir das Vorangegangene einfach auf die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n$ mit $b_0 := 0$ und $b_n := \frac{1}{n} \cdot a_{n-1}$ für $n \geq 1$ an. $\square$

Beispiele. $\exp' = \exp$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\cosh' = \sinh$, und $\sinh' = \cosh$.

7.6 Potenzreihen mit beliebigen Entwicklungspunkten

Definition. Unter einer Potenzreihe mit *Entwicklungspunkt* $z_0 \in \mathbf{C}$ verstehen wir einen formalen Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n,$$

wobei $a_n \in \mathbf{C}$ für $n = 0, 1, \ldots$.

Offensichtlich konvergiert diese komplexe Reihe für $z = z_1$ genau dann, wenn die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ für $z = z_1 - z_0$ konvergiert. Damit können wir aus den vorangegangenen Ergebnissen sofort die analogen Ergebnisse für Potenzreihen mit einem Entwicklungspunkt $z_0 \neq 0$ herleiten. Definieren wir ρ wie in Abschnitt 7.2, so erhalten wir insbesondere, daß die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ auf der Kreisscheibe $U_\rho(z_0)$ gegen eine holomorphe (also erst recht stetige) Funktion $f\colon U_\rho(z_0) \to \mathbf{C}$ konvergiert.

Häufig sind wir an der umgekehrten Frage interessiert, ob nämlich eine gegebene Funktion in einer Potenzreihe entwickelbar ist. Dazu bemerken wir: Besitzt eine Funktion in der Nähe eines Entwicklungspunktes z_0 eine *Potenzreihendarstellung*, so ist diese aufgrund des Identitätssatzes durch die Funktion festgelegt. Ein einfaches Beispiel gibt die folgende Aufgabe:

Aufgabe. Die Funktion $f\colon z \mapsto 1/(1-z)$ kann um jeden Punkt $z_0 \neq 1$ in eine Potenzreihe entwickelt werden. Man bestimme diese und ihren Konvergenzradius.

(Tip: Rückführung auf die Entwicklung um $z_0 = 0$.)

7.7 Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Betrachten wir den radioaktiven Zerfall eines Elementes, etwa von Uran 238 in Thorium 234. Die triviale Beobachtung, daß in einer festen Zeitspanne die Zerfallsmenge proportional zur am Anfang vorhandenen Menge M ist, führt auf die Existenz einer Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, so daß folgendes gilt:

> Ist zu einem Zeitpunkt t_0 eine Menge M an U 238 in einer Probe enthalten, so ist zu einem späteren Zeitpunkt $t_0 + t$ aufgrund des radioaktiven Zerfalls in dieser Probe nur noch eine Menge von $M \cdot f(t)$ an U 238 enthalten.

Setzen wir $M(t) := M \cdot f(t)$, so besagt die oben formulierte Beobachtung, daß für jede weitere Zeitspanne $s \in \mathbf{R}$ gilt:

$$M(t+s) = M(t) \cdot f(s) = (M \cdot f(t)) \cdot f(s).$$

Da andererseits $M(t+s) = M \cdot f(t+s)$ ist, sehen wir, daß die fragliche Funktion f die folgende *Funktionalgleichung* erfüllt:

$$\forall t, s \in \mathbf{R} \colon f(t+s) = f(t) \cdot f(s). \tag{1}$$

Wir sprechen hier von einer Funktionalgleichung, weil die gesuchte Unbekannte in diesem Falle eine Funktion ist.

Theorem.

(a) Die Funktionen $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ und $f \equiv \exp|\mathbf{R}$ sind Lösungen von (1).

(b) Ist $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine nicht triviale Lösung von (1), d. h. $f \not\equiv 0$, so gilt:

  (i) $f > 0$,
  (ii) $f(0) = 1$,
  (iii) $\forall t \in \mathbf{R} \colon f(-t) = 1/f(t)$,
  (iv) $\forall t \in \mathbf{R}\, \forall n \in \mathbf{Z} \colon f(nt) = f^n(t)$,
  (v) $\forall n \in \mathbf{Z}\, \forall m \in \mathbf{N}_1 \colon f(n/m) = \sqrt[m]{a^n}$, wobei $a := f(1)$.

(c) Sind f und g nicht triviale Lösungen von (1) und ist $\lambda \in \mathbf{R}$, so sind auch

$$f(\lambda \cdot x), \qquad f \cdot g \qquad \text{und} \qquad 1/f$$

Lösungen von (1).

Kommentar. Wegen (i) und (ii) sind die nicht trivialen Lösungen von (1) gerade die Gruppenhomomorphismen von der additiven Gruppen $(\mathbf{R}, +, 0)$ in die multiplikative Gruppe $(\mathbf{R}_+, \cdot, 1)$.

Aufgabe. Man zeige, daß die Funktionalgleichung (1) tatsächlich auch von der komplexen Exponentialfunktion exp erfüllt wird, d. h.:

$$\forall z, w \in \mathbf{C} \colon \exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Man leite hieraus für die komplexen Funktionen cos und sin die bekannten Additionstheoreme

$$\forall z, w \in \mathbf{C} \colon \cos(z+w) = \cos(z) \cdot \cos(w) - \sin(z) \cdot \sin(w)$$

und

$$\forall z, w \in \mathbf{C} \colon \sin(z+w) = \cos(z) \cdot \sin(w) + \sin(z) \cdot \cos(w)$$

ab.

7.8 Eigenschaften der Exponentialfunktion

Theorem.

(a) $\forall t \in \mathbf{R}\colon\ \exp(t) > 0 \wedge \exp(-t) = 1/\exp(t)$.

(b) $\exp|\mathbf{R}$ ist streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+$.

(c) Für $e := \exp(1)$, die *Eulersche Zahl*, gilt:

$$2{,}718\,281\,8 < e < 2{,}718\,281\,9.$$

Genauer: Die ersten 45 Ziffern von e lauten

$$2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,352\,662\,497\,757\,247\,09.$$

(d) Die reelle Exponentialfunktion $\exp|\mathbf{R}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ besitzt eine Umkehrfunktion, den *natürlichen Logarithmus*

$$\ln\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R};$$

es gilt also

$$\ln \circ \exp = x \quad \text{und} \quad \exp \circ \ln = x|\mathbf{R}_+;$$

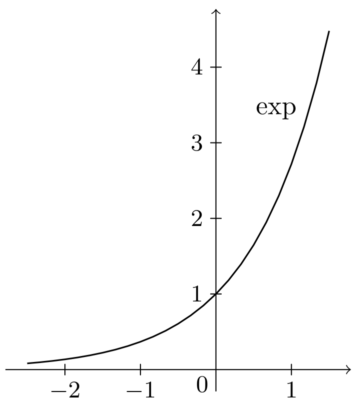
insbesondere ist

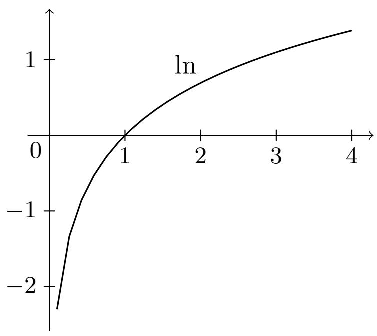
$$\ln(1) = 0 \quad \text{und} \quad \ln(e) = 1.$$

Die Funktion ln ist streng monoton wachsend mit $\ln(\mathbf{R}_+) = \mathbf{R}$.

(e) Die Funktion ln ist differenzierbar, und es gilt:

$$\ln' = \frac{1}{x}\Big|\mathbf{R}_+ \quad \text{und} \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$





Für weitere Aussagen über die Logarithmusfunktion vergleiche Abschnitt 7.10.

Aufgabe. Man zeige, daß die Funktion $\ln(1+x)$ innerhalb des Einheitskreises die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x)|\,]-1,1[\, = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n} \cdot x^n$$

besitzt und daß daher (?) die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ gegen $-\ln(2)$ konvergiert.

(Tip: Was ist $(\ln(1+x))'$? Abelscher Grenzwertsatz.)

Es drängt sich die Frage auf, ob die Logarithmusfunktion in die komplexe Ebene ausgedehnt werden kann. Mittels der Potenzreihe $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n} \cdot (z-1)^n$ haben wir zumindest eine Ausdehnung auf die Kreisscheibe $U_1(1)$. In der Funktionentheorie erfährt man mehr über diese Frage.

7.9 Die Exponentialfunktionen zu einer allgemeinen Basis

Nach dem Theorem aus 7.7 gilt

$$\forall a \in \mathbf{R}_+\, \forall n \in \mathbf{Z}\colon\; \exp(n \cdot \ln(a)) = a^n.$$

Dies motiviert die folgende Definition:

Definition. Für jedes $a \in \mathbf{R}_+$ und jedes $z \in \mathbf{C}$ setzen wir

$$a^z := \exp(z \cdot \ln(a)).$$

Die Funktion $\mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto a^z$ heißt die *Exponentialfunktion* zur Basis a. Ihre Einschränkung auf $\mathbf{R}$ bezeichnen wir mit a^x. Weiterhin heißt für jedes $\nu \in \mathbf{C}$ die Funktion

$$x^\nu\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}, t \mapsto t^\nu$$

die *Potenzfunktion* mit dem Exponenten ν; vgl. auch Abschnitt 7.11.

Es sei beachtet, daß diese Definition mit der Bezeichnung e^z für $\exp(z)$ konsistent ist.

Kommentar. Da $a^x = \exp(\lambda \cdot x)$ mit $\lambda := \ln(a)$ gilt, ist die Funktion a^x eine Lösung der Funktionalgleichung (1) aus Abschnitt 7.7; es gilt $a^0 = 1$ und $a^1 = a$.

Aufgabe 1. Man zeige:

(a) Für jedes $a \in \mathbf{R}_+$ existiert genau eine *stetige* Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, die der Funktionalgleichung (1) aus Abschnitt 7.7 und der „Anfangsbedingung“ $f(1) = a$ genügt, nämlich $f = a^x$.

(b) Es existieren aber weitere nicht stetige Lösungen f der Funktionalgleichung mit $f(1) = \exp(1)$.

(Tip: Es existiert eine (überabzählbare) Basis $B = (a_i)_{i \in I}$ des $\mathbf{Q}$-Vektorraumes $\mathbf{R}$ mit $1 \in B$ (beweisbar mit dem Zornschen Lemma). Wird $V := \operatorname{span}(B \setminus \{1\})$ gesetzt, so wird durch $f(r + v) := \exp(r)$ für $r \in \mathbf{Q}$ und $v \in V$ in eindeutiger Weise eine Funktion der verlangten Art definiert.)

Theorem. Sei $a \in \mathbf{R}_+$.

(a) a^x ist streng monoton wachsend für $a > 1$, sowie streng monoton fallend für $0 < a < 1$ und $1^x \equiv 1$.

(b) $a^x(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+$ für alle $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$.

(c) Die Funktion $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto a^z$ ist holomorph, und es gilt

$$f'(z) = \ln(a) \cdot a^z.$$

Aufgabe 2 (Die Dirichletsche Reihe)**.** In Abschnitt 5.8 haben wir bereits die Dirichletsche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s \in \mathbf{N}_1$ betrachtet. Jetzt können wir sie für alle $s \in \mathbf{C}$ definieren. Für reelle s untersuche man die Reihe auf Konvergenz, und zwar zeige man, daß sie für $s > 1$ in $\mathbf{R}$ konvergiert und für $s \leq 1$ gegen ∞ konvergiert.

(Tip: Cauchysches Verdichtungslemma aus 5.8.)

7.10 Die Logarithmusfunktion

Definition. Für jedes $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ heißt die Umkehrfunktion zu Exponentialfunktion $a^x\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ die *Logarithmusfunktion* zur Basis a; sie wird mit $\log_a$ oder $\log_a x$ bezeichnet.

Der Definitionsbereich von $\log_a$ ist $\mathbf{R}_+$. Aufgrund der Definition gilt:

$$\log_a \circ a^x = x, \quad a^x \circ \log_a = x|\mathbf{R}_+ \quad \text{und} \quad \log_a(\mathbf{R}_+) = \mathbf{R},$$

insbesondere

$$\log_a(1) = 0 \quad \text{und} \quad \log_a(a) = 1.$$

Proposition. Die Funktion $\log_a$ läßt sich einfach mittels des natürlichen Logarithmus' ausdrücken, nämlich durch

$$\log_a \equiv \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln .$$

Die Funktion $\log_a$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend; sie ist differenzierbar mit der Ableitung

$$(\log_a)' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)};$$

und schließlich ist sie eine Lösung der Funktionalgleichung

$$\forall t, s \in \mathbf{R}_+ \colon f(t \cdot s) = f(t) + f(s).$$

Die Funktionalgleichung lieferte die Idee zur Konstruktion des Rechenschiebers. Der Multiplikation in $\mathbf{R}_+$ entspricht beim Übergang zu Logarithmen die Addition in $\mathbf{R}$. Letztere wird beim Rechenschieber durch Aneinanderlegen von Maßstäben (mit logarithmischer Unterteilung) realisiert.

Regeln 1 (Rechnen mit Logarithmen)**.** Für alle $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$, t, $s \in \mathbf{R}_+$ und $\nu \in \mathbf{R}$ gelten

$$\begin{aligned} &\log_a(ts) = \log_a(t) + \log_a(s), && \log_a(1/t) = -\log_a(t), \\ &\log_a(t^\nu) = \nu \cdot \log_a(t), \qquad \text{und} && \log_{1/a}(t) = -\log_a(t). \end{aligned}$$

Es sei beachtet, daß die ersten drei dieser Regeln insbesondere auch für $\ln = \log_e$ gelten.

Regeln 2 (Rechnen mit Potenzen)**.** Für alle a, $b \in \mathbf{R}_+$, $\nu \in \mathbf{R}$, z, $w \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{Z}$ und $n \in \mathbf{N}_1$ gelten

$$\begin{aligned} &a^{z+w} = a^z \cdot a^w, \qquad a^{-z} = 1/a^z = (1/a)^z, \qquad (a^\nu)^z = a^{\nu z}, \\ &a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{und} \quad (a \cdot b)^z = a^z \cdot b^z. \end{aligned}$$

Warnung. Für die Gültigkeit der Formel $(a^\nu)^z = a^{\nu z}$ ist es wirklich entscheidend, daß ν reell ist; andernfalls wäre der linke Ausdruck nämlich nicht definiert.

Der Logarithmus zur Basis 10 **und zur Basis** 2**.** Der *dekadische* oder *Briggsche* Logarithmus $\log_{10}$ wird häufig mit lg bezeichnet. Es gilt

$$\lg = c_{10} \cdot \ln \quad \text{mit} \quad c_{10} := 1/\ln(10) = \lg(e) \approx 0{,}434\,294\,482.$$

Aufgrund der Monotonie von lg gilt für jede Zahl $t \in \mathbf{R}_+$ und jedes $n \in \mathbf{Z}$, daß

$$10^n \le t < 10^{n+1} \iff n \le \lg(t) < n + 1;$$

damit wird eine natürliche Zahl im Zehnersystem durch etwa $1 + \lg(t)$ Ziffern dargestellt.

Der *binäre* oder *Zweier*-Logarithmus $\log_2$ wird häufig mit lb bezeichnet. Es gilt hier

$$\mathrm{lb} = c_2 \cdot \ln \quad \text{mit} \quad c_2 := 1/\ln(2) = \mathrm{lb}(e) \approx 1{,}442\,695\,041.$$

Für jede Zahl $t \in \mathbf{R}_+$ existiert eine Darstellung

$$t = \sum_{n=-\infty}^{m} a_n \cdot 2^n := \sum_{n=-m}^{\infty} a_{-n} \cdot 2^{-n}$$

mit geeigneten $a_n \in \{0,1\}$ und $m \in \mathbf{Z}$ analog zur Dezimaldarstellung aus Abschnitt 5.14. Die Zahlendarstellung im Binär- (oder Dual-)System ist bekanntlich für die Computer-Arithmetik wichtig. Ist diese Darstellung minimal (d. h. $a_m = 1$ und $\exists n\colon a_n = 0$), so ist

$$m \le \mathrm{lb}(t) \le m+1.$$

Aufgrund des Vorangegangenen gilt

$$\mathrm{lb} = q \cdot \lg \quad \text{mit} \quad q := \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \approx 3{,}321\,928\,095;$$

damit ist die Binärdarstellung einer natürlichen Zahl etwa q-mal so lang wie die Dezimaldarstellung.

Beispiel. Für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ ist $x^{\frac{1}{n}} = \exp \circ (\frac{1}{n} \cdot \ln) = \sqrt[n]{}$, also

$$\forall t \in \mathbf{R}_+\colon\ \sqrt[n]{t} = e^{\ln(t)/n}.$$

7.11 Die allgemeinen Potenzfunktionen

Theorem.

(a) Für jedes $\nu \in \mathbf{N}_0$ ist die in Abschnitt 7.9 definierte Funktion $x^\nu\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ die übliche ν-te Potenz der Funktion $x|\mathbf{R}_+$.

(b) Für alle ν, $\mu \in \mathbf{C}$ gilt:

(i) $x^{\nu+\mu} = x^\nu \cdot x^\mu$,

(ii) $x^{-\nu} = 1/x^\nu$,

(iii) $x^\nu(t \cdot s) = x^\nu(t) \cdot x^\nu(s)$ für alle t, $s \in \mathbf{R}_+$; insbesondere ist $x^\nu(1) = 1$ und $x^\nu(1/t) = 1/x^\nu(t)$.

(iv) Die Funktion x^ν ist differenzierbar und hat die Ableitung

$$(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}.$$

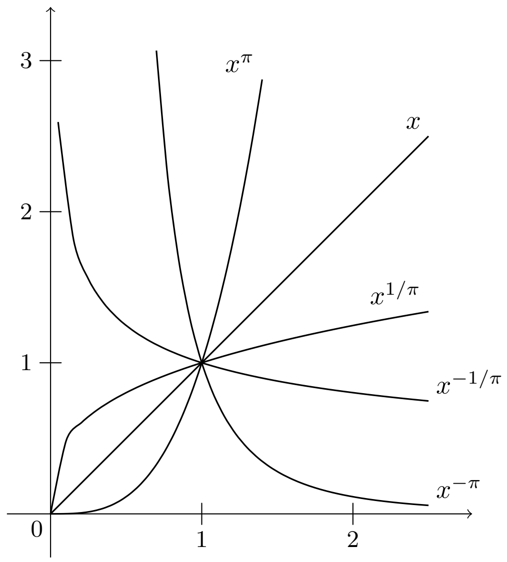
(c) Für alle ν, $\mu \in \mathbf{R}$ gilt:

(i) $x^\nu(\mathbf{R}_+) = \mathbf{R}_+$, falls $\nu \ne 0$; außerdem $x^0 \equiv 1$.

(ii) x^ν ist ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbf{R}_+,\cdot) \to (\mathbf{R}_+,\cdot)$.

(iii) $x^\nu \circ x^\mu = x^{\nu\mu}$.

(iv) Für $\nu > 0$ ist x^ν streng monoton wachsend und für $\nu < 0$ streng monoton fallend; die Umkehrfunktion ist jeweils $x^{1/\nu}$.



7.12 Die Binomialreihe

Sei $\alpha \in \mathbf{C}$. Die *Binomialkoeffizienten* $\binom{\alpha}{n}$ sind für $n \in \mathbf{N}_0$ dann rekursiv durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \qquad \text{und} \qquad \forall n \in \mathbf{N}_0 \colon \binom{\alpha}{n+1} := \frac{\alpha - n}{n+1} \cdot \binom{\alpha}{n}$$

definiert, also

$$\binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{1} = \alpha, \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \ldots .$$

Aufgabe.

(a) Man zeige: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ hat den Konvergenzradius $\rho = 1$ für $\alpha \in \mathbf{C} \setminus N_0$. Man bestimme den Konvergenzradius für $\alpha \in \mathbf{N}_0$.

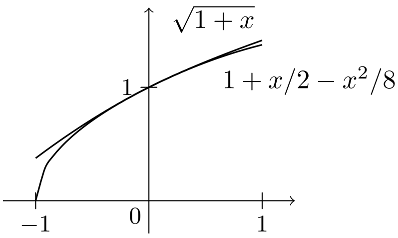
(b) Man zeige, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n = (1+t)^\alpha$ für alle $t \in]-\rho, \rho[$.

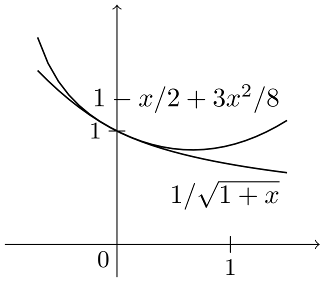
(Tip: Ist $f := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ und $g := (1+x)^\alpha$, so gilt $(1+x)f' = \alpha f$ und $(1+x)g' = \alpha g$. Was ist $(f/g)'$?)

Aufgrund ihrer Bedeutung seien zwei Beispiele explizit angegeben:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \text{Glieder höherer Ordnung,}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Der Sinn solcher Darstellungen: Im vorliegenden Fall machen wir einen numerisch nur kleinen Fehler, wenn wir die Funktionswerte $\sqrt{1+t}$ und $1/\sqrt{1+t}$ für betraglich kleines t durch Auswertung der angegebenen Polynome zweiten Grades ermitteln, wie auch an den folgenden Bildern zu sehen. Vielfach reicht es auch, sich auf die Anfangspolynome ersten Grades zu beschränken.





7.13 Das Differentialgleichungssystem für Kosinus und Sinus

Festsetzung. In diesem und den restlichen Abschnitten betrachten wir die Winkelfunktionen cos und sin als Funktionen $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, wenn nichts anderes gesagt wird.

Im folgenden Theorem geben wir alle Paare (c, s) differenzierbarer Funktionen c, $s\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ an, welche das *lineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung*

$$\begin{aligned} c' &= -s, \\ s' &= c \end{aligned} \tag{1}$$

lösen.

Theorem.

(a) Das Funktionenpaar $(\cos, \sin)$ ist die eindeutige Lösung (c, s) von (1) mit den *Anfangswerten* $c(0) = 1$ und $s(0) = 0$.

(b) Für jede Lösung (c, s) von (1) gilt $c^2 + s^2 \equiv \text{const.}$; insbesondere ist daher

$$\cos^2 + \sin^2 \equiv 1, \quad \text{also} \quad |\cos| \le 1 \quad \text{und} \quad |\sin| \le 1.$$

(c) Zu jedem Paar $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ existiert genau eine Lösung (c, s) von (1) mit den Anfangswerten $c(0) = a$ und $s(0) = b$, nämlich

$$c = a \cdot \cos - b \cdot \sin \quad \text{und} \quad s = b \cdot \cos + a \cdot \sin\,.$$

7.14 Die globale Gestalt von Kosinus und Sinus

Die Additionstheoreme des Kosinus' und Sinus'. Für α, $\beta \in \mathbf{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta),\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta).\end{aligned}$$

Die Kreiszahl π. Im Intervall $[0,2]$ besitzt cos genau eine Nullstelle a. Die Zahl $2a$ heißt π. Der auf 50 Nachkommastellen gerundete Wert von π ist:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937511.$$

Warnung. Dieses Ergebnis zeigt, daß bei unserer Definition der Kosinus- und der Sinusfunktion das Argument nicht in Grad, sondern im sogenannten *Bogenmaß* gemessen wird. Für alle theoretischen Betrachtungen ist dies notwendig, da andernfalls die Ableitungsregeln und die Beziehungen zur Exponentialfunktion nicht gelten würden.

Theorem.

(a) Die Funktion $\cos|[0,\pi]$ ist streng monoton fallend mit $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$. Die Funktion $\sin|[-\pi/2,\pi/2]$ ist streng monoton wachsend mit $\sin([-\pi/2,\pi/2]) = [-1,1]$.

(b) cos und sin haben die folgenden Symmetrieeigenschaften:

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos, & \sin(-x) &= -\sin,\\ \cos(x+\pi) &= -\cos, & \sin(x+\pi) &= -\sin,\\ \sin(x+\pi/2) &= \cos\,. \end{aligned}$$

(c) cos und sin sind periodische Funktionen mit der Perioden 2π, d. h.:

$$\cos(x+2\pi) = \cos, \quad \sin(x+2\pi) = \sin\,.$$

(d) Sei $t \in \mathbf{R}$. Dann gilt:

(i) $\cos(t) = 0 \iff t = \pi/2 + k\cdot\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$,

(ii) $\sin(t) = 0 \iff t = k\cdot\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$,

(iii) $\cos(k\pi) = (-1)^k$ für alle $k \in \mathbf{Z}$.

(iv) Zusätzlich gelten folgende spezielle Werte:

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(t)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(t)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Die kanonische Parametrisierung des Einheitskreises. Die (beliebig oft) differenzierbare Funktion

$$\gamma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2, t \mapsto e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

bildet jedes der halboffenen Intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ und $]\alpha, \alpha + 2\pi]$ bijektiv auf den *Einheitskreis*

$$\mathbf{S}^1 := \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1\}$$

ab. Die *kanonische Parametrisierung* des Einheitskreises ist $\gamma|\,[0, 2\pi[$; manchmal ist aber die Parametrisierung $\gamma|\,]{-\pi}, \pi]$ zweckmäßiger.

Proposition 1. Als Teilmenge von $\mathbf{C}$ ist $\mathbf{S}^1$ eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $(\mathbf{C}^*, \cdot)$, also

$$\forall z, w \in \mathbf{S}^1 \colon z \cdot w, z^{-1} \in \mathbf{S}^1,$$

und $\gamma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker(\gamma) := \gamma^{-1}(\{1\}) = 2\pi \cdot \mathbf{Z}$; insbesondere gilt

$$\forall t, s \in \mathbf{R}\colon \gamma(t + s) = \gamma(t) \cdot \gamma(s).$$

Weiter ist $z^{-1} = \overline{z}$ für alle $z \in \mathbf{S}^1$.

Festsetzung. Die Punkte des $\mathbf{R}^n$ sind n-Tupel reeller Zahlen. Gelegentlich müssen wir diese n-Tupel ausschreiben. Schreibtechnisch leichter ist es, sie als *Zeilenvektoren* $(t_1, \ldots, t_n)$ zu schreiben, so daß wir diese Darstellung in der Regel bevorzugen. In dem Moment, wo wir mit Matrizen arbeiten, müssen wir jedoch zwischen Zeilenvektoren und *Spaltenvektoren* unterscheiden, so daß wir n-Tupel reeller Zahlen gelegentlich auch als Spaltenvektoren schreiben müssen. Am mathematischen Inhalt ändert sich nichts; für uns ist ein Punkt des $\mathbf{R}^n$ eine Versammlung n reeller Zahlen, welche in eine lineare Ordnung gebracht sind.

Im folgenden schreiben wir die Punkte des $\mathbf{R}^2$ als Spaltenvektoren. Sind dann α, $\beta \in \mathbf{R}$, so repräsentiert die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung $R_\alpha\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, nämlich die Drehung des $\mathbf{R}^2$ um den Nullpunkt um den Winkel α. Die beiden Additionstheoreme für sin und cos lassen sich zu folgender Gleichung zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

Kürzer und geometrischer geht dies mit obiger Kurve γ:

$$R_\alpha(\gamma(\beta)) = \gamma(\alpha + \beta).$$

Proposition 2. Für jedes $a \in \mathbf{R}_+$ und jedes $z = t + is$ mit $t,\, s \in \mathbf{R}$ gilt: $|a^z| = a^t$.

Aufgabe (Die Riemannsche Zeta-Funktion)**.** Für jedes $s \in \mathbf{R}$ seien

$$H_s := \{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) \geq s\} \quad \text{und} \quad H_s^o := \{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) > s\}.$$

Man zeige, daß für jedes $s \in H := H_1^o$ die Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ gegen eine Zahl $\zeta(s) \in \mathbf{C}$ konvergiert, daß diese Konvergenz auf jeder Teilmenge H_s mit $s > 1$ gleichmäßig ist und daß daher die Funktion $\zeta \colon H \to \mathbf{C}$ stetig ist. Diese Funktion (oder genauer ihre maximale analytische Funktion) heißt *Riemannsche Zeta-Funktion.*

(Tip: Man beachte die Aufgabe 2 aus Abschnitt 7.9 und das Theorem aus Abschnitt 7.1.)

7.15 Die Arkusfunktionen

Proposition.

(a) Die Funktionen $\cos|[0,\pi]$ und $\sin|[-\pi/2,\pi/2]$ besitzen stetige, auf $[-1,1]$ definierte Umkehrfunktionen, die sogenannten *Arkusfunktionen* arccos und arcsin. Für sie gilt definitionsgemäß:

$$\begin{aligned} \cos \circ \arccos &= x|[-1,1], \quad \text{und} \quad & \arccos \circ \cos|[0,\pi] &= x|[0,\pi], \\ \sin \circ \arcsin &= x|[-1,1], \quad \text{und} \quad & \arcsin \circ \sin|[-\pi/2,\pi/2] &= x|[-\pi/2,\pi/2]. \end{aligned}$$

(b) Diese beiden Arkusfunktionen sind durch

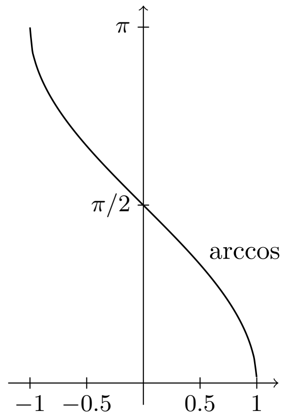
$$\arccos + \arcsin = \frac{\pi}{2}$$

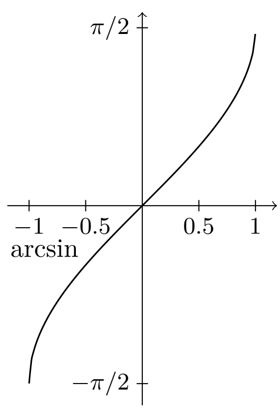
miteinander verknüpft.

(c) arccos ist streng monoton fallend, und arcsin ist streng monoton wachsend.

(d) Beide Funktionen sind über dem offenen Intervall $]-1,1[$ differenzierbar, und es gilt

$$\arcsin' = -\arccos' = 1/\sqrt{1-x^2}\,|\,]-1,1[\,.$$





Aufgabe. Man entwickle die Funktion $\arcsin | \,]-1,1[$ in eine Potenzreihe um den Punkt 0.

(Tip: Binomialreihe.)

7.16 Die Tangensfunktion

Mit
$$V(\cos) := \{\pi/2 + k \cdot \pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \quad \text{und} \quad V(\sin) := \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$$
seien im folgenden die Verschwindungsmengen von cos und sin bezeichnet.

Definition. Sei
$$D_{\tan} := \mathbf{C} \setminus V(\cos).$$
Die holomorphe Funktion
$$\tan := \frac{\sin}{\cos} \colon D_{\tan} \to \mathbf{C}$$
heißt die (komplexe) *Tangensfunktion*.

Proposition. Für die Tangensfunktion gilt:

(a) Sie hat die Verschwindungsmenge $V(\tan) := \tan^{-1}(\{0\}) = V(\sin)$.

(b) Sie hat die Ableitung $\tan' = \cos^{-2} = 1 + \tan^2$.

(c) Sie ist ungerade, d. h. $\tan(-z) = -\tan(z)$.

(d) Sie ist π-periodisch, d. h. $\tan(z + \pi) = \tan(z)$.

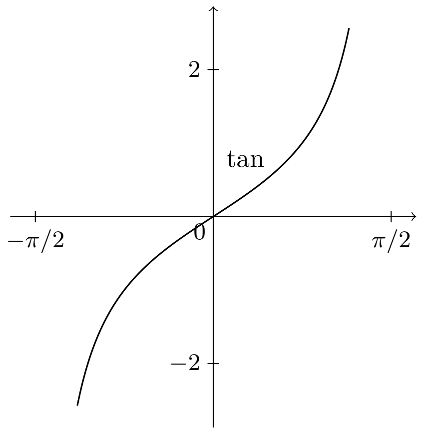
(e) Für alle $z \in \mathbf{C}$ mit $\pi/4 + z$, $\pi/4 - z \in D_{\tan}$ gilt: $\tan(\pi/4 + z) = 1/\tan(\pi/4 - z)$.

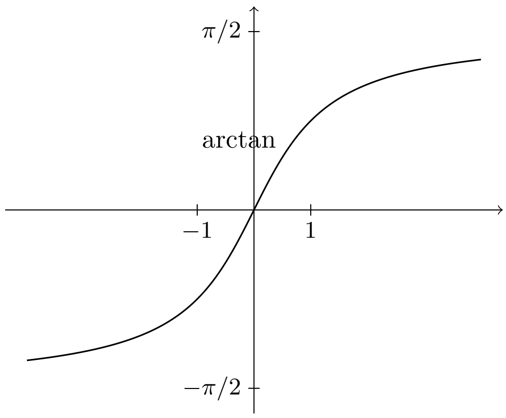
(f) Für alle α, $\beta \in D_{\tan}$ mit $\alpha + \beta \in D_{\tan}$ gilt das Additionstheorem
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}.$$

(g) Die Einschränkung $\tan | \,]-\pi/2, \pi/2[$ ist streng monoton wachsend mit Bild $\tan(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbf{R}$ und besitzt daher eine Umkehrfunktion
$$\arctan \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$
den sogenannten *Arkustangens*, welcher überall differenzierbar ist und die Ableitung
$$\arctan' = \frac{1}{1 + x^2}$$
besitzt.

(h) Die Tangensfunktion hat als speziellen Wert

$$\tan(\pi/4) = 1, \quad \text{und damit} \quad \pi = 4 \cdot \arctan(1).$$





Aufgabe. Man zeige, daß die Funktion arctan innerhalb des Einheitskreises die Reihenentwicklung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot z^{2n+1}$ besitzt und daß daher (?) die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$ gegen $\pi/4$ konvergiert.

7.17 Die Kotangensfunktion

Definition. Sei

$$D_{\cot} \coloneqq \mathbf{C} \setminus V(\sin).$$

Die holomorphe Funktion

$$\cot \coloneqq \frac{\cos}{\sin} : D_{\cot} \to \mathbf{C}$$

heißt die (komplexe) *Kotangensfunktion*.

Proposition. Für die Kotangensfunktion gilt:

(a) Sie hat die Verschwindungsmenge $V(\cot) \coloneqq \cot^{-1}(\{0\}) = V(\cos)$.

(b) Sie hat die Ableitung

$$\cot' = -\sin^{-2} = -(1 + \cot^2).$$

(c) Sie ist ungerade, d. h. $\cot(-z) = -\cot(z)$.

(d) Sie π-periodisch, d. h. $\cot(z + \pi) = \cot(z)$.

(e) Sie ist mit der Tangensfunktion über die Beziehung

$$\cot(z) = -\tan(z - \pi/2)$$

verknüpft.

(f) Die Einschränkung $\cot|\,]0,\pi[$ ist streng monoton fallend mit Bild $\cot(]0,\pi[) = \mathbf{R}$ und besitzt daher eine Umkehrfunktion

$$\operatorname{arccot}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

den sogenannten *Arkuskotangens*, welcher überall differenzierbar ist und die Ableitung

$$\operatorname{arccot}' = -\frac{1}{1+x^2}$$

besitzt.

(g) Arkustangens und -kotangens sind über die Beziehung

$$\arctan + \operatorname{arccot} = \frac{\pi}{2}$$

verknüpft.

7.18 Die Hyperbel- und Areafunktionen

Aus den Abschnitten 7.2 und 7.5 wissen wir schon, daß die Hyperbelfunktionen cosh und sinh auf ganz $\mathbf{C}$ definiert sind, dort holomorph sind und die Ableitungen $\cosh' = \sinh$ und $\sinh' = \cosh$ haben. Im Nullpunkt sind die Werte $\cosh(0) = 1$ und $\sinh(0) = 0$. Es ist cosh eine gerade und sinh eine ungerade Funktion, d. h. $\cosh(-z) = \cosh(z)$ und $\sinh(-z) = -\sinh(z)$. Der in 7.2 beschriebene Zusammenhang mit der Exponentialfunktion zeigt $\sinh(t) < \cosh(t)$ für alle $t \in \mathbf{R}$.

Die Additionstheoreme des Kosinus und des Sinus Hyperbolicus'. Für alle z, $w \in \mathbf{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\cosh(z+w) &= \cosh(z)\cdot\cosh(w) + \sinh(z)\cdot\sinh(w),\\ \sinh(z+w) &= \sinh(z)\cdot\cosh(w) + \cosh(z)\cdot\sinh(w).\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\cosh^2 - \sinh^2 \equiv 1,$$

also $\cosh(t) \geq 1$ für alle $t \in \mathbf{R}$.

Aus diesem Grunde liegen für alle $t \in \mathbf{R}$ die Punkte $(\cosh(t), \sinh(t)) \in \mathbf{R}^2$ auf dem recht Ast der Einheitshyperbel, deren Punkte durch die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ beschrieben werden. Dies ist der Grund für den Namen „Hyperbelfunktionen“ in Analogie zur kanonischen Parametrisierung des Einheitskreises nach Abschnitt 7.14.

Aufgabe 1. Mit den beiden kanonischen Koordinatenfunktionen x, $y\colon \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\cos &= \cos(x)\cdot\cosh(y) - i\sin(x)\cdot\sinh(y),\\ \sin &= \sin(x)\cdot\cosh(y) + i\cos(x)\cdot\sinh(y).\end{aligned}$$

Daher (?) sind die Verschwindungsmengen der komplexen Kosinus- und Sinusfunktion durch

$$V(\cos) := \{z \in \mathbf{C} \mid \cos(z) = 0\} = \{\pi/2 + k \cdot \pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

und

$$V(\sin) := \{z \in \mathbf{C} \mid \sin(z) = 0\} = \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

gegeben.

Die analogen Verschwindungsmengen des komplexen Kosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus sind damit durch

$$V(\cosh) := \{z \in \mathbf{C} \mid \cosh(z) = 0\} = iV(\cos)$$

und

$$V(\sinh) := \{z \in \mathbf{C} \mid \sinh(z) = 0\} = iV(\sin)$$

verbunden.

Die komplexe *hyperbolische Tangensfunktion*

$$\tanh := \frac{\sinh}{\cosh}$$

ist auf $\mathbf{C} \setminus iV(\cos)$ definiert und holomorph; die komplexe *hyperbolische Kotangensfunktion*

$$\coth := \frac{\cosh}{\sinh}$$

ist auf $\mathbf{C} \setminus iV(\sin)$ definiert und holomorph. Die Ableitungen dieser Funktionen sind

$$\begin{aligned} \tanh' &= \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2, \\ \coth' &= -\frac{1}{\sinh^2} = 1 - \coth^2. \end{aligned}$$

Die Funktionen sind tanh und sinh sind ungerade, d. h. $\tanh(-z) = -\tanh(z)$ und $\coth(-z) = -\coth(z)$.

Aufgabe 2. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit den Einschränkungen $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\tanh(x)$ und $\coth(x)$ der komplexen Hyperbelfunktionen auf die reelle Achse $\mathbf{R}$: Die Funktion $\sinh(x)\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist streng monoton wachsend mit $\sinh(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$; $\cosh \mid [0, \infty[\colon\ [0, \infty[\to \mathbf{R}$ ist streng monoton wachsend mit $\cosh([0, \infty[) = [1, \infty[$; $\tanh(x)$ ist streng monoton wachsend mit $\tanh(\mathbf{R}) =]{-1}, 1[$; und $\coth|\mathbf{R}_+ \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ ist streng monoton fallend mit $\coth(\mathbf{R}_+) =]1, \infty[$.

Daher besitzen diese Funktionen Umkehrfunktionen, die sogenannten Areafunktionen:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}&\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \\ \operatorname{arcosh}&\colon [1, \infty[\to \mathbf{R}, \\ \operatorname{artanh}&\colon]{-1}, 1[\to \mathbf{R} \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{arcoth}\colon\ ]1,\infty[\ \to \mathbf{R}.$$

Die Funktionen arsinh, artanh und arcoth sind differenzierbar; arcosh ist stetig und auf $]1,\infty[$ differenzierbar. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\\ \operatorname{arcosh}' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\Big|\,]1,\infty[\,,\\ \operatorname{artanh}' &= \frac{1}{1-x^2}\Big|\,]-1,1[\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{arcoth}' = \frac{1}{1-x^2}\Big|\,]1,\infty[\,.$$

Die Areafunktionen hängen folgendermaßen mit der Logarithmusfunktion zusammen:

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh} &= \ln\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\bigr),\\ \operatorname{arcosh} &= \ln\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\bigr),\\ \operatorname{artanh} &= \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{arcoth} = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{x+1}{x-1}\Big|\,]1,\infty[\,.$$

7.19 Polarkoordinaten und komplexe Wurzeln

Definition. Die (surjektive) stetige Abbildung

$$F\colon\ [0,\infty[\,\times\mathbf{R}\to\mathbf{C},\,(r,\varphi)\mapsto r\cdot e^{i\varphi} = (r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi))$$

heißt die *Polarkoordinaten*-Abbildung. Gilt $z = F(r,\varphi)$, so heißt das Paar (r,φ) die *Polarkoordinaten* von z. In diesem Falle $r = |z|$. Hingegen ist die „Koordinate“ φ der komplexen Zahl z nicht eindeutig zugeordnet. Wir definieren für alle $z\in\mathbf{C}$ die Menge

$$\operatorname{Arg}(z) := \{\varphi\in\mathbf{R} \mid F(|z|,\varphi) = z\}.$$

Die Elemente von $\operatorname{Arg}(z)$ heißen die *Argumente* von z. Es gilt

$$\operatorname{Arg}(0) = \mathbf{R}$$

und

$$\forall z\in\mathbf{C}^*\ \exists\varphi_0\in\operatorname{Arg}(z)\cap\,]-\pi,\pi]\,:\ \operatorname{Arg}(z) = \varphi_0 + 2\pi\mathbf{Z} := \{\varphi_0+2\pi k \mid k\in\mathbf{Z}\}.$$

Insbesondere ist für jedes $z \in \mathbf{C}^*$ die Menge $\operatorname{Arg}(z) \cap]-\pi, \pi]$ einpunktig. Daher existiert genau eine Funktion

$$\arg\colon \mathbf{C}^* \to]-\pi, \pi]$$

mit $\arg(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ für alle $z \in \mathbf{C}$.

Theorem.

(a) Die Polarkoordinaten-Abbildung F bildet $\mathbf{R}_+ \times]-\pi, \pi]$ bijektiv auf $\mathbf{C}^*$ ab; und $F|(\mathbf{R}_+ \times]-\pi, \pi])$ besitzt die Umkehrabbildung

$$\Phi\colon z \mapsto (|z|, \arg(z)).$$

(b) Die Einschränkung der Funktion arg auf die *geschlitzte* Ebene

$$E_- := \{z \in \mathbf{C}^* \mid \arg(z) \neq \pi\} = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$$

ist stetig. Daher ist auch $\Phi|E_-$ stetig.

(c) Für jeden Punkt $z_0 \in \mathbf{R}_-$ gilt

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \Im(z) \geq 0}} \arg(z) = \arg(z_0) \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \Im(z) < 0}} \arg(z) = \arg(z_0) - 2\pi.$$

Die Funktion $\arg\colon \mathbf{C}^* \to]-\pi, \pi]$ entspricht der Scheme-Prozedur `angle`.

Korollar. Für jedes $\alpha \in \mathbf{R}$ besitzt die Kreisparametrisierung

$$]\alpha, \alpha + 2\pi[\to \mathbf{S}^1 \setminus \{e^{i\alpha}\}, t \mapsto e^{it}$$

eine stetige Umkehrung.

Aufgabe. Für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ und jedes $z \in \mathbf{C}$ bezeichne $W^n(z)$ die Menge aller komplexen n-ten Wurzeln von z, d. h.:

$$W^n(z) := \{w \in \mathbf{C} \mid w^n = z\}.$$

Man zeige:

(a) $W^n(0) = \{0\}$ und $W^n(z) = \{\sqrt[n]{|z|} \cdot \exp(i\frac{\arg(z)+2\pi k}{n}) \mid k = 0, \ldots, n-1\}$ für alle $z \in \mathbf{C}^*$.

(b) Auf der geschlitzten Ebene $E_- \cup \{0\}$ (vgl. das letzte Theorem) existiert genau eine stetige Funktion $f_n\colon E_- \cup \{0\} \to \mathbf{C}$, so daß gilt:

$$f_n(1) = 1 \quad \text{und} \quad \forall z \in E_- \cup \{0\}\colon f_n(z) \in W_n(z).$$

Diese Funktion heißt der *Hauptzweig* der komplexen n-ten Wurzelfunktion.

(c) $\forall z \in \mathbf{C}\colon (w \in W^2(z) \implies W^2(z) = \{w, -w\})$.

7.20 Komplexe Logarithmen, komplexe Potenzen

Theorem.

(a) Sei F die Polarkoordinatenabbildung. Für die komplexe Exponentialfunktion gilt

$$\exp = e^x \cdot e^{iy} = F \circ (e^x, y) = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y.$$

(b) exp ist eine periodische Funktion mit der Perioden $2\pi i$. Genauer: Sind z_1, $z_2 \in \mathbf{C}$ komplexe Zahlen, so gilt

$$\exp(z_1) = \exp(z_2) \iff \exists k \in \mathbf{Z}\colon z_2 = z_1 + 2\pi i k.$$

(c) Die Exponentialabbildung exp bildet für jedes $\alpha \in \mathbf{R}$ den Streifen

$$S_\alpha := \{z \in \mathbf{C} \mid \alpha < \Im(z) \leq \alpha + 2\pi\}$$

bijektiv auf $\mathbf{C}^*$ ab.

(d) Definieren wir für $z \in \mathbf{C}$ die Menge

$$\operatorname{Ln}(z) := \{w \in \mathbf{C} \mid \exp(w) = z\}$$

der *komplexen Logarithmen* von z, so gilt

$$\operatorname{Ln}(0) = \emptyset$$

und

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbf{C}^*\colon \operatorname{Ln}(z) &= \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z) = \{\ln|z| + i\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Arg}(z)\} \\ &= \{\ln|z| + i \arg(z) + 2\pi i k \mid k \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

Für den *Hauptzweig* der komplexen Logarithmusfunktion

$$\ln\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}, z \mapsto \ln|z| + i \arg(z)$$

gilt damit insbesondere $\ln(z) \in \operatorname{Ln}(z)$ für alle $z \in \mathbf{C}$.

(e) Die Einschränkung des komplexen Logarithmus ln auf die geschlitzte Ebene E_- ist stetig.

(f) Für jeden Punkt $z_0 \in R_-$ gilt

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \Im(z) \geq 0}} \ln(z) = \ln|z_0| + i\pi \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \Im(z) < 0}} \ln(z) = \ln|z_0| - i\pi.$$

Sind $z \in \mathbf{C}^*$ und $\nu \in \mathbf{C}$ beliebig, so können wir mit Hilfe des Hauptzweiges des komplexen Logarithmus' insbesondere die *komplexe Potenz*

$$z^\nu := \exp(\nu \cdot \ln(z))$$

definieren.

Aufgabe.

(a) Für den Hauptzweig f_n der n-ten Wurzel gilt

$$\forall z \in E_- \colon f_n(z) = z^{1/n}.$$

(b) Sei $\nu \in \mathbf{C}$. Dann existiert eine Konstante $C \in \mathbf{C}$, so daß für jedes $z_0 \in \mathbf{R}_-$ gilt

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \Im(z) \geq 0}} z^\nu = C \cdot \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \Im(z) < 0}} z^\nu.$$

In Worten ausgedrückt: Die Funktion z^ν macht einen (multiplikativen) Sprung um C an der negativen reellen Achse. Für welche ν ist $C = 1$?

(c) An welchen Stellen ist z^ν stetig?

(d) Sind ν und $\mu \in \mathbf{C}$, so gilt generell $z^{\nu+\mu} = z^\nu \cdot z^\mu$, im allgemeinen aber nicht $(z^\nu)^\mu = z^{\nu\mu}$.

Kapitel 8

Ein elementares Integral

In Kapitel 15 werden wir das Lebesguesche Integral kennenlernen. Für den Moment begnügen wir uns mit einem elementaren Integral, welches wir in diesem Kapitel mit funktionalanalytischen Methoden einführen. Von der Einfachheit ist es auch mit dem Riemannschen Integral zu vergleichen.

8.1 Stetige Fortsetzung gleichmäßig stetiger Abbildungen

Theorem. Sei E ein metrischer Raum und E' ein vollständiger metrischer Raum, sowie M eine Teilmenge von E, $\overline{M}$ ihre abgeschlossene Hülle in E (vgl. Abschnitt 4.8) und $f\colon M \to E'$ eine *gleichmäßig* stetige Abbildung (vgl. Abschnitt 4.12). Dann existiert genau eine stetige Abbildung $F\colon \overline{M} \to E'$, welche f *fortsetzt*, d. h. $F|M = f$. Tatsächlich ist F wieder gleichmäßig stetig.

Beweis. Für jedes $p \in E$ sei $\mathfrak{F}_p$ die Menge der Folgen $(p_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ in M mit $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$.

Nach 4.8 ist $\overline{M} = \{p \in E \mid \mathfrak{F}_p \neq \emptyset\}$.

Zur Eindeutigkeit von F. Sei $F\colon \overline{M} \to E'$ eine stetige Fortsetzung von f, und sei $p \in \overline{M}$. Dann wählen wir eine Folge $(p_n) \in \mathfrak{F}_p$. Nach dem Heine-Kriterium gilt dann

$$F(p) = \lim_{n\to\infty} F(p_n) = \lim_{n\to\infty} f(p_n). \tag{0}$$

Somit ist also $F(p)$ durch f eindeutig festgelegt.

Zur Existenz von F. Die Formel (8.1) ist die Idee zur Definition von F. Dazu müssen wir zunächst zeigen, daß für jedes $(p_n) \in \mathfrak{F}_p$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_n)$ der rechten Seite von (8.1) existiert: Nach Aussage 1 aus 4.13 ist (p_n) eine Cauchyfolge; nach Aussage 4 aus 4.13 daher auch $(f(p_n))$ (an dieser Stelle geht die gleichmäßige Stetigkeit von f wesentlich ein). Schließlich konvergiert wegen der Vollständigkeit von E' die letztgenannte Folge.

Als nächstes zeigen wir, daß die rechte Seite von (8.1) unabhängig von der gewählten Folge (p_n) aus $\mathfrak{F}_p$ ist: Seien dazu (p'_n) und $(p''_n) \in \mathfrak{F}_p$. Wir fügen beide Folgen zu einer neuen Folge $(p_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ zusammen, indem wir $p_{2n} \coloneqq p'_n$ und $p_{2n+1} \coloneqq p''_n$ setzen. Dann ist auch $(p_n) \in \mathfrak{F}_p$. Folglich sind $(f(p'_n))$ und $(f(p''_n))$ zwei Teilfolgen der nach obigem konvergenten Folge $(f(p_n))$. Somit haben

$(f(p'_n))$ und $(f(p''_n))$ den gleichen Grenzwert, nämlich $\lim_{n\to\infty} f(p_n)$. Damit haben wir gezeigt, daß genau eine Abbildung $F\colon \overline{M} \to E'$ mit

$$\forall p \in \overline{M}\,\forall (p_n) \in \mathfrak{F}_p\colon \lim_{n\to\infty} f(p_n) = F(p)$$

existiert.

Mit dieser Definition setzt F insbesondere f fort, d. h. $F|M = f$: Ist etwa $p \in M$, so können wir die konstante Folge $(p_n) \in \mathfrak{F}_p$ mit $p_n := p$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ betrachten. Dann folgt

$$F(p) = \lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p).$$

Es bleibt zu zeigen, daß das so konstruierte F gleichmäßig stetig ist: Geben wir uns also ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ vor. Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß

$$\forall p, q \in M\colon \big(d(p,q) < \delta \implies d'(f(p), f(q)) < \varepsilon/2\big).$$

Seien weiter p, $q \in \overline{M}$ mit $d(p,q) < \delta$ vorgegeben. Wir wählen zwei Folgen $(p_n) \in \mathfrak{F}_p$ und $(q_n) \in \mathfrak{F}_q$. Aufgrund der Stetigkeit der Abstandsfunktion d gilt $\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = d(p,q) < \delta$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir also annehmen, daß schon $d(p_n, q_n) < \delta$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Wegen (8.1) folgt deswegen auch $d'(f(p_n), f(q_n)) < \varepsilon/2$. Schließlich nutzen wir die Stetigkeit der Abstandsfunktion d' und erhalten

$$d'(F(p), F(q)) = d'\big(\lim_{n\to\infty} f(p_n), \lim_{n\to\infty} f(q_n)\big) = \lim_{n\to\infty} d'(f(p_n), f(q_n)) \le \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Damit ist die gleichmäßige Stetigkeit von F bewiesen.

$\square$

Korollar. Sind E und F Banachräume über $\mathbf{K}$, ist U ein Untervektorraum von F und $\overline{U}$ seine abgeschlossene Hülle in F, so ist $\overline{U}$ ebenfalls ein Untervektorraum von F (vgl. Aufgabe 3 aus Abschnitt 5.3) und zu jeder stetigen, linearen Abbildung $f\colon U \to E$ existiert genau eine stetige, lineare Abbildung $\overline{f}\colon \overline{U} \to E$ mit $\overline{f}|U = f$.

Ist überdies die Konstante $M \in [0, \infty[$, so daß

$$\forall v \in U\colon \|f(v)\| \le M \cdot \|v\|\,,$$

so gilt auch

$$\forall v \in \overline{U}\colon \left\|\overline{f}(v)\right\| \le M \cdot \|v\|$$

(vgl. Aufgabe 2 aus Abschnitt 5.3).

8.2 Das Integral von Treppenfunktionen

Festsetzung. Für den Rest des Kapitels seien a, $b \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$ und $(E, \|\cdot\|)$ ein $\mathbf{K}$-Banachraum.

Definition.

(a) Eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Folge $(t_k)_{k=0,\dots,n}$ von Punkten $t_k \in [a, b]$ mit
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

(b) Ist $(t_k)_{k=0,\dots,n}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, so nennen wir eine weitere Zerlegung $(t'_{k'})_{k'=0,\dots,n'}$ von $[a, b]$ eine *Verfeinerung* von $(t_k)_{k=0,\dots,n}$, wenn es eine streng monoton wachsende Abbildung $\sigma\colon \{0, \dots, n\} \to \{0, \dots, n'\}$ mit $t_k = t'_{\sigma(k)}$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt.

(c) Eine Funktion $\varphi\colon [a, b] \to E$ heißt eine *Treppenfunktion* (mit Werten in E), wenn es eine Zerlegung $(t_k)_{k=0,\dots,n}$ von $[a, b]$ gibt, so daß
$$\forall k \in \{1, \dots, n\}\colon \varphi|\,]t_{k-1}, t_k[\, \equiv \text{const.} \tag{1}$$
Eine Zerlegung, für welche (1) gilt, heißt der Treppenfunktion φ *angepaßt*.

(d) Die Menge aller Treppenfunktionen $\varphi\colon [a, b] \to E$ wird mit $T([a, b], E)$ bezeichnet.

Lemma.

(a) Ist eine Zerlegung (t_k) des Intervalls $[a, b]$ einer Treppenfunktion $\varphi \in T([a, b], E)$ angepaßt, so ist auch jede Verfeinerung von (t_k) der Treppenfunktion φ angepaßt.

(b) Zu je zwei Zerlegungen (t'_i) und (t''_j) des Intervalls $[a, b]$ gibt es stets eine gemeinsame Verfeinerung (t_k).

Proposition 1. Sind φ, $\psi\colon [a, b] \to E$ Treppenfunktionen und ist $c \in \mathbf{K}$, so sind auch $\varphi + \psi$, $c \cdot \varphi$ und $\|\varphi\|$ Treppenfunktionen. Daher ist $T([a, b], E)$ ein Untervektorraum des Banachraumes $B([a, b], E)$ (vgl. Beispiel 4 aus Abschnitt 5.2 und Abschnitt 5.6).

Proposition 2. Zu jeder Treppenfunktion $\varphi\colon [a, b] \to E$ existiert genau ein Vektor $I(\varphi) \in E$, so daß für jede der Funktion φ angepaßte Zerlegung $(t_k)_{k=0,\dots,n}$ von $[a, b]$ gilt, daß
$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \varphi\Big(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\Big) \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

In Abschnitt 8.3 werden wir $I(\varphi)$ als das Integral von φ erkennen.

Beispiel. Für jedes $v \in E$ ist die konstante Funktion $\varphi\colon [a, b] \to E, t \mapsto v$ eine Treppenfunktion; für sie gilt $I(\varphi) = v \cdot (b - a)$.

Proposition 3. Die Abbildung $I\colon T([a, b], E) \to E, \varphi \mapsto I(\varphi)$ ist linear; d. h. für alle φ, $\psi \in T([a, b], E)$ und alle $c \in \mathbf{K}$ gilt
$$I(\varphi + \psi) = I(\varphi) + I(\psi) \quad \text{und} \quad I(c \cdot \varphi) = c \cdot I(\varphi).$$

Weiterhin haben wir die Abschätzung

$$\|I(\varphi)\| \leq I(\|\varphi\|) \leq (b-a) \cdot \|\varphi\|_\infty .$$

Insbesondere ist die Abbildung I gleichmäßig stetig. Im Falle $E = \mathbf{R}$ gilt schließlich folgende Monotonie-Aussage:

$$\varphi \leq \psi \implies I(\varphi) \leq I(\psi).$$

8.3 Der Raum der Regelfunktionen und deren Integral

Definition. Mit $R([a,b],E)$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle von $T([a,b],E)$ in dem $\mathbf{K}$-Banachraum $B([a,b],E)$. Die Funktionen $f \in R([a,b],E)$ heißen *Regelfunktionen* auf $[a,b]$ mit Werten in E.

Nach der Folgerung aus Abschnitt 8.1 existiert genau eine stetige, lineare Funktion

$$J\colon R([a,b],E) \to E,$$

welche die Funktion $I\colon T([a,b],E) \to E$ fortsetzt. Für jedes $f \in R([a,b],E)$ heißt der Wert

$$\int_a^b f\,dx := \int_a^b f(t)\,dt := J(f)$$

das *Integral* von f.

Theorem 1. Für alle $\varphi \in T([a,b],E)$, f, $g \in R([a,b],E)$ und $c \in \mathbf{K}$ gilt:

(I0) $\displaystyle\int_a^b \varphi\,dx = I(\varphi)$,

(I1) $\displaystyle\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$,

(I2) $\displaystyle\int_a^b (c \cdot f)\,dx = c \cdot \int_a^b f\,dx$,

(I3) $\displaystyle\left\|\int_a^b f\,dx\right\| \leq \int_a^b \|f\|\,dx \leq (b-a) \cdot \|f\|_\infty$ und

(I4) $\displaystyle f \leq g \implies \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$ im Falle $E = \mathbf{R}$.

Im Falle (I3) sei beachtet, daß $\|f\| \in R([a,b],\mathbf{R})$ für alle $f \in R([a,b],E)$.

Theorem 2. Als abgeschlossener Untervektorraum des Banachraumes $B([a,b],E)$ ist $R([a,b],E)$ auch ein Banachraum. Es gilt der *elementare Vererbungssatz* der Integralrechnung:

Ist $(f_n)_{n\geq m}$ eine Folge von Regelfunktionen $f_n\colon [a,b] \to E$, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to E$ konvergiert, so ist auch f eine Regelfunktion, und es gilt

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx.$$

Lemma. Zu jeder Regelfunktion $f \in R([a,b],E)$ und jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert eine Zerlegung $(t_k)_{k=0,\ldots,n}$ des Intervalls $[a,b]$, so daß für jede Folge $(\xi_k)_{k=1,\ldots,n}$ von Parametern $\xi_k \in\,]t_{k-1}, t_k[$ für die Treppenfunktion $\varphi \in T([a,b],E)$, welche durch

$$\varphi(t) := \begin{cases} f(\xi_k) & \text{für } t \in\,]t_{k-1}, t_k[\text{ und} \\ f(t_k) & \text{für } t = t_k \end{cases}$$

definiert ist,

$$\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$$

gilt. Es sei beachtet, daß $\varphi([a,b]) \subseteq f([a,b])$ nach Konstruktion von φ.

Proposition.

(a) Ist $f \in R([a,b],E)$ eine Regelfunktion und U ein *abgeschlossener* Untervektorraum von E mit $f([a,b]) \subseteq U$, so gilt auch $\int_a^b f\, dx \in U$.

(b) Ist F ein weiterer $\mathbf{K}$-Banachraum und $A\colon E \to F$ eine *stetige* lineare Abbildung, so gilt

$$A \circ f \in R([a,b],F) \quad \text{und} \quad \int_a^b (A \circ f)\, dx = A\Big(\int_a^b f\, dx\Big)$$

für alle $f \in R([a,b],E)$.

Aufgabe 1. Seien $E_1, \ldots, E_n$ Banachräume über $\mathbf{K}$, und sei $E := \prod_k E_k$ der Produktbanachraum (vgl. Beispiel 2 aus Abschnitt 5.2). Dann ist eine Funktion

$$f = (f_1, \ldots, f_n)\colon [a,b] \to E$$

genau dann eine Regelfunktion, wenn $f_k \in R([a,b],E_k)$ für alle $k = 1, \ldots, n$. In diesem Falle gilt

$$\int_a^b f\, dx = \Big(\int_a^b f_1\, dx, \ldots, \int_a^b f_n\, dx\Big).$$

Man leite hieraus her, wie sich das Integral einer Funktion $f = U + iV \in R([a,b],\mathbf{C})$ durch Integration der reellwertigen Funktionen U, $V \in R([a,b],\mathbf{R})$ berechnet.

Aufgabe 2 (Produkte von Regelfunktionen)**.** Es seien E, E_1 und E_2 Banachräume über $\mathbf{K}$ und $B\colon E_1 \times E_2 \to E$ eine stetige bilineare Abbildung, und zwar gelte

$$\forall u \in E_1, v \in E_2\colon\ \|B(u,v)\| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\|$$

(vgl. 5.4). Weiterhin sei A eine nicht leere Menge. Dann gilt:

(a) Sind $f \in B(A,E_1)$ und $g \in B(A,E_2)$, so ist

$$\tilde{B}(f,g)\colon A \to E, p \mapsto B(f(p), g(p))$$

eine beschränkte Funktion mit

$$\left\|\tilde{B}(f,g)\right\|_\infty \leq M \cdot \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty .$$

Daher (?) ist

$$\tilde{B}\colon B(A, E_1) \times B(A, E_2) \to B(A, E), (f, g) \mapsto \tilde{B}(f, g)$$

eine stetige bilineare Abbildung.

(b) Sind $f \in R([a, b], E_1)$ und $g \in R([a, b], E_2)$, so auch $\tilde{B}(f, g) \in R([a, b], E)$.
(Tip: Zuerst überlege man, daß $\tilde{B}(T([a, b], E_1) \times T([a, b], E_2)) \subseteq T([a, b], E)$.)

Aufgabe 3. Jede monotone Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ ist eine Regelfunktion.
(Tip: Ist f monoton wachsend, so zerlege man das Intervall $[f(a), f(b)]$ in Teilintervalle, die höchstens die Länge ε haben, und definiere mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung von $[a, b]$ eine derartige Treppenfunktion φ, so daß $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ gilt.)

Aufgabe 4. Seien E und F zwei $\mathbf{K}$-Banachräume, $f \in R([a, b], E)$ eine Regelfunktion, $D \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge von E mit $f([a, b]) \subseteq D$ und $g\colon D \to F$ eine Funktion, die auf $f([a, b])$ gleichmäßig stetig ist. Dann ist auch $g \circ f$ eine Regelfunktion.

8.4 Integration stetiger Funktionen

Theorem. Der $\mathbf{K}$-Vektorraum $C([a, b], E)$ aller stetigen Funktionen $f\colon [a, b] \to E$ ist ein Untervektorraum von $R([a, b], E)$.

Ist $f \in C([a, b], E)$, so existiert zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß für jede beliebige Zerlegung $(t_k)_{k=0,\ldots,n}$ von $[a, b]$ mit $t_k - t_{k-1} \leq \delta$ für $k = 1, \ldots, n$ und für jede Folge $(\xi_k)_{k=1,\ldots,n}$ von Parametern $\xi_k \in]t_{k-1}, t_k[$ gilt, daß

$$\left\| \int_a^b f\, dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) \right\| \leq \varepsilon.$$

Die in der letzten Abschätzung stehende Summe heißt eine *Riemannsche Summe.*

Aufgabe 1. Ist $f \in C([a, b], E)$ mit $\int_a^b \|f\|\, dx = \int_a^b \|f(t)\|\, dt = 0$, so ist $f \equiv 0$.

Kommentar. Regelfunktionen sind genau jene Funktionen, die überall einen links- und rechtsseitigen Grenzwert besitzen; vgl. M. Barner, F. Flohr: *Analysis I*, 4. Aufl. 1991, de Gruyter. Für den Begriff des einseitigen Grenzwertes vgl. Kapitel 10.

Mittelwertsatz der Integralrechnung. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion, und sei $g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ eine *nirgends negative* Regelfunktion. Dann existiert ein $t_0 \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b fg\, dx = f(t_0) \cdot \int_a^b g\, dx.$$

Interpretieren wir g als die Dichte einer Massenverteilung auf $[a, b]$, so ist $\int_a^b g\, dx$ die Gesamtmasse der Verteilung.

Aufgabe 2. Die Funktion

$$R([a,b],\mathbf{R}) \times R([a,b],\mathbf{R}) \to \mathbf{R}, (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle := \int_a^b fg\,dx$$

ist symmetrisch, bilinear und *positiv semidefinit*, d. h.

$$\forall f \in R([a,b],\mathbf{R})\colon \langle f,f\rangle \geq 0.$$

Der letzten Ungleichung wegen können wir

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

definieren. Es gilt die *Cauchy–Schwarzsche-Ungleichung*:

$$\forall f,g \in R([a,b],\mathbf{R})\colon\ |\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2\,.$$

(Tip: Man werte $0 \leq (\|f - \lambda g\|_2)^2$ für $\lambda = \langle f,g\rangle \cdot t$ für $t \in \mathbf{R}$ aus.)

Daher (?) gelten die Norm-Axiome (N0), (N2) und (N3). Schränken wir $\langle\cdot,\cdot\rangle$ beziehungsweise $\|\cdot\|_2$ auf den $\mathbf{R}$-Vektorraum $C([a,b],\mathbf{R})$ der stetigen Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ ein, so erhalten wir ein Skalarprodukt bzw. eine Norm.

Im Gegensatz zu $(C([-1,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist $(C([-1,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_2)$ kein Banachraum. (Tip: Man betrachte die Funktionenfolge $f_n\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$ mit $f_n|[-1,-1/n] \equiv -1$, $f_n|[1/n,1] \equiv 1$ und $f_n(t) = nt$ für $t \in \,]-1/n, 1/n[$.)

8.5 Der Raum $R(I, E)$

Festsetzung. Ist $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathbf{R}$ mit $[a,b] \subseteq D$ und $f\colon D \to E$ eine Funktion mit $f|[a,b] \in R([a,b],E)$, so schreiben wir

$$\int_a^b f\,dx := \int_a^b f|[a,b]\,dx.$$

Proposition 1. Ist $[c,d]$ ein Teilintervall von $[a,b]$, so gilt

$$\forall f \in R([a,b],E)\colon f|[c,d] \in R([c,d],E).$$

Definition. Der letzten Proposition wegen können wir für jedes Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ definieren:

$$R(I,E) := \{f\colon I \to E \mid \forall a,b \in I\colon (a < b \implies f|[a,b] \in R([a,b],E))\}.$$

Ist $f \in R(I,E)$ und sind a, $b \in I$ mit $a < b$, so ist also $\int_a^b f\,dx$ definiert. Desweiteren definieren wir

$$\int_a^a f\,dx := 0$$

und

$$\int_b^a f\,dx := -\int_a^b f\,dx.$$

Damit ist also im Falle $f \in R(I,E)$ für alle c, $d \in I$ das Integral $\int_c^d f\,dx$ eingeführt.

Proposition 2. Für alle a, b, $c \in I$ und alle $f \in R(I,E)$ gilt

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx.$$

Theorem. Für jedes Intervall I gilt $C(I,E) \subseteq R(I,E)$.

Aufgabe. Für jede Funktion $f \in R(I,E)$ und jeden Parameter $a \in I$ ist die Funktion

$$\int_a^x f\,dx \colon I \to E, t \mapsto \int_a^t f\,dx$$

stetig.

8.6 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition. Eine Funktion $F\colon D \to E$ auf einer Teilmenge $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{K})$ heißt eine *Stammfunktion* einer Funktion $f\colon D \to E$, wenn F in allen Punkten von D differenzierbar ist und wenn $F' \equiv f$ gilt.

Proposition. Ist $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein nicht entartetes Intervall und F eine Stammfunktion einer Funktion $f\colon I \to E$, so ist $\{F + c \mid c \in E\}$ die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall von $\mathbf{R}$, E ein $\mathbf{K}$-Banachraum und $f\colon I \to E$ eine *stetige* Funktion. Dann gilt:

(a) Für jedes $a \in I$ ist die Funktion

$$\int_a^x f\,dx \colon I \to E$$

eine Stammfunktion von f.

(b) Ist $F\colon I \to E$ eine Stammfunktion von f, so gilt für alle a, $b \in I$, daß

$$\int_a^b f\,dx = F\big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Aufgabe. Seien I, $J \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ Intervalle, φ, $\psi\colon I \to \mathbf{R}$ differenzierbare Funktionen mit $\varphi(I)$, $\psi(I) \subseteq J$ und $f\colon J \to E$ eine stetige Funktion. Dann ist

$$g\colon I \to E, t \mapsto \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f\,dx$$

eine differenzierbare Funktion. Wie lautet ihre Ableitung?

8.7 Partielle Integration

Theorem. Seien E_1, E_2 und F Banachräume über $\mathbf{K}$, $B\colon E_1 \times E_2 \to F$ eine stetige, bilineare Abbildung (vgl. Abschnitt 5.4), I ein nicht entartetes Intervall und $f\colon I \to E_1$ und $g\colon I \to E_2$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt für alle a, $b \in I$, daß

$$\int_a^b B(f, g')\, dx = B(f, g)\big|_a^b - \int_a^b B(f', g)\, dx.$$

8.8 Substitutionsmethode

Theorem. Seien I und J nicht entartete Intervalle, $f\colon I \to E$ eine stetige und $\varphi\colon J \to \mathbf{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi(J) \subseteq I$. Dann gilt für alle a, $b \in J$, daß

$$\int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi'\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\, dx.$$

Aufgabe. Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ eine injektive, stetig differenzierbare Funktion. Dann ist $J := f([a, b])$ ein abgeschlossenes Intervall von $\mathbf{R}$, auf J ist die Umkehrfunktion $\check{f}$ definiert, und es gilt

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \check{f}\, dx = x \cdot f\big|_a^b - \int_a^b f\, dx.$$

8.9 Integration rationaler Funktionen

Seien P und $Q \not\equiv 0$ reelle Polynomfunktionen. Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra (vgl. Abschnitt 5.4) können wir Q als Produkt seiner *irreduziblen* Faktoren wie folgt darstellen:

$$Q = \gamma \cdot \prod_i (x - a_i)^{n_i} \cdot \prod_j (x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^{m_j},$$

wobei γ, a_i, α_j, $\beta_j \in \mathbf{R}$, $\alpha_j^2 - 4\beta_j < 0$ und n_i, $m_j \in \mathbf{N}_1$. Infolgedessen läßt sich die rationale Funktion P/Q als Summe einer Polynomfunktion (die im Falle $\deg P < \deg Q$ identisch verschwindet) und rationaler Funktionen folgender Typen

$$\frac{A}{(x - a_i)^n} \quad \text{und} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^m},$$

wobei $1 \leq n \leq n_i$ und $1 \leq m \leq m_j$ und $A, B, C \in \mathbf{R}$, darstellen. Diese Darstellung von P/Q als Summe solcher „einfachen Brüche" heißt *Partialbruchzerlegung*. Die Koeffizienten A, B und C erhalten wir durch formalen Ansatz und Koeffizientenvergleich.

Für die Funktionen des Typs $A/(x - a)^n$ sind Stammfunktionen wohlbekannt.

Für die Funktionen des Typs $(Bx + C)/(x^2 + \alpha x + \beta)^m$ erhalten wir Stammfunktionen mittels der folgenden Aussage:

Proposition 1. Definieren wir rekursiv

$$F_1 \coloneqq \arctan$$

und

$$F_{n+1} \coloneqq \frac{1}{2n}\Big((2n-1)\cdot F_n + \frac{x}{(1+x^2)^n}\Big)$$

für alle $n \in \mathbf{N}_1$, so gilt:

(a) Für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ ist F_n eine Stammfunktion von $1/(1+x^2)^n$.

(b) Ist $x^2 + \alpha x + \beta$ ein über $\mathbf{R}$ irreduzibles Polynom (d. h. hat dieses Polynom keine reelle Nullstelle), so ist
$$\gamma \coloneqq \frac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2} \in \mathbf{R}_+,$$
und für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ ist
$$\gamma^{1-2n} \cdot F_n\Big(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{\gamma}\Big)$$
eine Stammfunktion von $1/(x^2 + \alpha x + \beta)^n$.

(c) Im Falle $m = 1$ ist $\ln\left|x^2 + \alpha x + \beta\right|$, im Falle $m > 1$ ist $-1/((m-1)\cdot(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1})$ eine Stammfunktion von $(2x + \alpha)/(x^2 + \alpha x + \beta)^m$.

Eine Stammfunktion von $(Bx + C)/(x^2 + \alpha x + \beta)^m$ läßt sich durch geeignete Linearkombinationen der Funktionen aus (b) und (c) erhalten.

Nachdem wir prinzipiell in der Lage sind, für jede (reelle) rationale Funktion eine Stammfunktion zu ermitteln, können wir jetzt auch weitere Stammfunktionen berechnen:

Proposition 2.

(a) Ist R eine rationale Funktion (einer Variablen), $\alpha \in \mathbf{C}^*$ und F eine Stammfunktion der rationalen Funktion $u \mapsto \alpha^{-1} \cdot R(u)/u$, so ist $F(e^{\alpha x})$ eine Stammfunktion von $R(e^{\alpha x})$.

(b) Ist R eine rationale Funktion zweier Variablen und F eine Stammfunktion der rationalen Funktion
$$\frac{2}{1+x^2} \cdot R\Big(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\Big),$$
so ist $F(\tan(x/2))$ eine Stammfunktion von $R(\cos, \sin)$ auf $]-\pi, \pi[$.

Beweis. Mit der *Universalsubstitution* $u \coloneqq \tan(x/2)$ gilt: $\cos|\,]-\pi,\pi[= (1-u^2)/(1+u^2)$, $\sin|\,]-\pi,\pi[= 2u/(1+u^2)$ und $u' = (1+u^2)/2$, woraus sich die Behauptung ergibt. $\square$

8.10 Die Simpsonsche Regel

Wir haben mit den Integrationsmethoden der vorangegangenen Abschnitte wertvolle Hilfsmittel zur Berechnung von Integralen an die Hand bekommen. Diese werden durch die Tabellen von Stammfunktionen in einschlägigen Handbüchern ergänzt. Trotzdem lassen sich die wenigsten Funktionen explizit integrieren. Zwar sagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, daß jede stetige Funktion über einem Intervall eine Stammfunktion besitzt. Diese ist jedoch in der Regel nicht mehr durch elementare Funktionen ausdrückbar. Beispiele hierfür sind die Funktionen $\exp(-x^2)$, welche in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtig ist (Normalverteilung, Gaußsches Fehlerintegral), und $\sqrt{a + b\sin^2}$, welche bei der Ermittlung der Bogenlänge eines Ellipsenbogens auftaucht (sogenannte elliptische Integrale). In diesen Fällen können wir aber immer zu numerischen Integrationsmethoden greifen. Die *Simpsonsche Regel* ist eine einfache, aber recht gute derartige Methode.

Proposition. Seien a, b, y_1, y_2, $y_3 \in \mathbf{R}$, und es gelte $a < b$.

(a) Ist P das *Interpolationspolynom* vom Grad höchstens 2 zu den Stützpunkten (a, y_1), $((a+b)/2, y_2)$ und (b, y_3), d. h. ist

$$P(a) = y_1, \quad P((a+b)/2) = y_2 \quad \text{und} \quad P(b) = y_3,$$

so gilt

$$\int_a^b P\,dx = (y_1 + 4y_2 + y_3)\frac{h}{3}$$

mit $h := (b-a)/2$.

(b) Ist $f \in C([a,b], \mathbf{R})$, so konvergiert die Folge der Zahlen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_{2k-2}) + 4f(\xi_{2k-1}) + f(\xi_{2k})) \cdot \frac{h}{3}$$

mit $h := (b-a)/(2n)$ und $\xi_k := a + k \cdot h$ für $n \to \infty$ gegen $\int\limits_a^b f\,dx$.

Die folgende Scheme-Prozedur berechnet die Folgenglieder s_n zu gegebener Funktion f und Intervallgrenzen a und b:

```
(define (simpson f a b n)
  (let ((h (* 1/2 (- b a) (/ n))))
    (let loop ((k n)
               (x a)
               (y (f a))
               (s 0))
      (if (zero? k)
          (* 1/3 s h)
          (let ((z (f (+ x (* 2 h)))))
            (loop (- k 1)
```

```
(+ x (* 2 h))
z
(+ s y (* 4 (f (+ x h))) z)))))))
```

Der folgende Ausdruck etwa liefert (mit $a = 0$, $b = 2\pi$, $f = \sqrt{4 + 5\sin^2}$, $n = 10$) approximativ den Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen 2 und 3:

```
(simpson (lambda (t) (sqrt (+ 4 (* 5 (sin t) (sin t)))))
         0
         (* 8 (atan 1))
         10)
```

8.11 Stetige und differenzierbare Abhängigkeit des Integrals von einem Parameter

Festsetzung. Sind M, M' und M'' Mengen und ist $f\colon M' \times M'' \to M$ eine Abbildung, so setzen wir für jedes Paar $(p, q) \in M' \times M''$:

$$f_p(q) := f^q(p) := f(p, q).$$

Durch Variation des Paares (p, q) werden dadurch für jedes $p \in M'$ bzw. $q \in M''$ Abbildungen

$$f_p\colon M'' \to M \quad \text{bzw.} \quad f^q\colon M' \to M$$

definiert.

Lemma. Seien K, E und E' metrische Räume, $q_0 \in E$ und $f\colon K \times E \to E'$ eine Abbildung, die in allen Punkten (p, q_0) mit $p \in K$ stetig ist. Ist der Raum K folgenkompakt, so gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall (p, q) \in K \times U_\delta(q_0)\colon d'(f(p, q), f(p, q_0)) < \varepsilon.$$

Theorem. Seien a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$, E ein metrischer Raum, E' ein Banachraum, $f\colon [a, b] \times E \to E'$ eine Funktion und $p_0 \in E$. Wir setzen $f^p \in R([a, b], E')$ für alle $p \in E$ voraus. Dann gelten für die Funktion

$$F\colon E \to E', p \mapsto \int_a^b f(t, p)\, dt = \int_a^b f^p \, dx$$

folgende Aussagen:

(a) Ist f in allen Punkten (t, p_0) mit $t \in [a, b]$ stetig, so ist auch F in p_0 stetig. Ist insbesondere f überall stetig, so ist auch F überall stetig.

(b) Sei jetzt E ein Intervall $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$, und für jedes $t \in [a, b]$ sei die Funktion $f_t\colon I \to E'$ differenzierbar. Dann können wir für alle $(t, s) \in [a, b] \times I$ die sogenannte *partielle* Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t, s) := f_t'(s)$$

von f bezüglich (der ersten Variablen) s definieren. Sei $s_0 \in I$ eine derartige Stelle, so daß die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial s}$ in allen Punkten (t, s_0) mit $t \in [a, b]$ stetig ist. Insbesondere ist dann $\frac{\partial f}{\partial s}(x, s_0)$ stetig und somit eine Regelfunktion. Außerdem — und das ist die entscheidende Aussage — ist die Funktion F in s_0 differenzierbar, und ihre Ableitung ist

$$F'(s_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(t, s_0)\, dt.$$

In den Beweis der letzten Aussage geht wesentlich das Theorem von der kontrollierten Schwankung ein. Das diesbezügliche Argument wird in der folgenden Aufgabe auch noch einmal aufgegriffen:

Aufgabe. Seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall, $a \in I$, E ein $\mathbf{K}$-Banachraum und $f\colon I \to E$ eine stetige Funktion, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar ist. Dann gilt:

(a) Existieren ein $v \in E$ und ein $L \in [0, \infty[$, so daß

$$\forall t \in I \setminus \{a\}\colon\ \|f'(t) - v\| \le L$$

gilt, so ist

$$\forall t \in I\colon\ \|f(t) - f(a) - (t - a) \cdot v\| \le L \cdot |t - a|\,.$$

(b) Konvergiert für $t \to a$ die Ableitung $f'(t)$ gegen einen Vektor $v \in E$, so ist f auch in a differenzierbar, und es gilt $f'(a) = v$.

(c) Sei $b \in I$ mit $a < b$, sei f auf ganz I differenzierbar und sei die Ableitung f' in allen $s \in [a, b]$ stetig. Dann gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+\ \exists \delta \in \mathbf{R}_+\ \forall (t, s) \in I \times [a, b]\colon$$
$$\Big(0 < |t - s| \le \delta \implies \Big\|\frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f'(s)\Big\| \le \varepsilon\Big).$$

Diese Eigenschaft wird als *gleichmäßige Differenzierbarkeit* von f in $[a, b]$ bezeichnet. (Tip: $\|f'(t) - f'(s)\| \le \varepsilon$?)

8.12 Flächeninhalte und Volumina

Ist $\varphi\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ eine nicht negative Treppenfunktion, so ist offenbar $I(\varphi)$ als Summe der Flächeninhalte von endlich vielen Rechtecken der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von φ und der x-Achse.

Ist $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ eine nicht negative stetige Funktion und (φ_n) eine Folge nicht negativer Treppenfunktionen $\varphi_n \in T([a, b], \mathbf{R})$, die gleichmäßig gegen f konvergiert, so konvergieren die Flächeninhalte $I(\varphi_n)$ gegen $\int\limits_a^b f\, dx$, weswegen es statthaft ist, dieses

Integral als den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse zu *bezeichnen*.

Warum „bezeichnen"? *Ist* es nicht der Flächeninhalt? Nun, bisher haben wir keine Definition für Flächeninhalte, deswegen müssen wir ein bißchen vorsichtig formulieren.

Diese Idee soll anhand der folgenden Aufgaben illustriert werden:

Aufgabe 1. Seien α_0, $\alpha_1 \in \mathbf{R}$ mit $\alpha_0 < \alpha_1 \leq \alpha_0 + 2\pi$, $r\colon [\alpha_0, \alpha_1] \to \mathbf{R}_+$ eine stetige Funktion und γ die Kurve

$$\gamma\colon [\alpha_0, \alpha_1] \to \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2, \alpha \mapsto r(\alpha) \cdot e^{i\alpha}.$$

Es soll der Flächeninhalt F der durch γ und die Verbindungsstrecken vom Ursprung zum Anfangs- bzw. Endpunkt von γ begrenzten Fläche berechnet werden. Hierzu approximiere man F durch Kreissektoren. Man begründe, daß man auf diese Weise

$$F = \frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} r^2(\alpha)\, d\alpha$$

erhält.

(Tip: Ein Segment eines Kreises vom Radius R, welches einen Winkel φ (im Bogenmaß gemessen) einschließt, hat den Flächeninhalt $\varphi/2 \cdot R^2$.)

Aufgabe 2. Seien a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$ und $\rho\colon [a, b] \to \mathbf{R}_+$ eine stetige Funktion. Durch Rotation der Kurve $(\rho(x), 0, x)$ um die z-Achse erhalten wir eine Fläche, die den Rotationskörper

$$K := \{(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi, t) \mid t \in [a, b], 0 \leq r \leq \rho(t), \varphi \in [0, 2\pi[\}$$

begrenzt. Durch Ausschöpfung des Rotationskörpers durch zylindrische Scheiben senkrecht zur z-Achse leite man eine Formel zur Berechnung des Volumens von K her.

Mit Hilfe dieser Formel berechne man das Volumen $V(R)$ einer Kugel mit Radius R zu $\frac{4\pi}{3} \cdot R^3$. Man begründe auch, daß die Oberfläche dieser Kugel durch $V'(R) = 4\pi \cdot R^2$ gegeben ist.

Kapitel 9

Zweiter Teil der Differentialrechnung in einer Veränderlichen

Festsetzung. In diesem Kapitel bezeichne E stets einen $\mathbf{K}$-Banachraum.

9.1 Mehrmalige Differenzierbarkeit

Definition. Sei $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$. Einer Funktion $f\colon D \to E$ ordnen wir die Folge

$$(f^{(n)}\colon D_n \to E)_{n\in\mathbf{N}_0}$$

ihrer Ableitungen durch folgende rekursive Definition zu:

$$\begin{aligned} D_0 &:= D, & D_{n+1} &:= \{a \in D_n \mid f^{(n)} \text{ ist in } a \text{ differenzierbar}\},\\ f^{(0)} &:= f, & f^{(n+1)} &:= \big(f^{(n)}\big)'. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f'' := (f')'$, $f^{(3)} = f''' := (f'')'$.
Sei $a \in D$ und sei $M \in \mathfrak{P}(D)$. Wir sagen:

(a) f ist in a (bzw. auf M) *n-mal differenzierbar*, wenn gilt $a \in D_n$ (bzw. $M \subseteq D_n$).

(b) f ist in a (bzw. auf M) *n-mal stetig differenzierbar*, wenn f in a (bzw. auf M) n-mal differenzierbar und wenn $f^{(n)}$ in a (bzw. auf M) noch stetig ist.

(c) f ist in a (bzw. auf M) *beliebig oft differenzierbar*, wenn gilt $a \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} D_n$ (bzw. $M \subseteq \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} D_n$).

(d) f ist *n-mal differenzierbar* (bzw. *n-mal stetig differenzierbar* bzw. *beliebig oft differenzierbar*), wenn f auf ganz D eine n-mal differenzierbare (bzw. n-mal stetig differenzierbare bzw. beliebig oft differenzierbare) Funktion ist.

Beispiel. Ist $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$, so ist f auf $]a-\rho, a+\rho[$ beliebig oft differenzierbar. Insbesondere ist für jedes $m \in \mathbf{N}_0$ die Funktion x^m beliebig oft differenzierbar, und zwar gilt

$$\forall n \in \mathbf{N}_0 \colon (x^m)^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} \cdot x^{m-n} & \text{für } n \leq m, \\ 0 & \text{für } n > m. \end{cases}$$

Theorem 1. Seien E, E' und F Banachräume über $\mathbf{K}$, sei $B \colon E \times E' \to F$ eine stetige, bilineare Abbildung, seien $f_1, f_2, f \colon D \to E$ und $g \colon D \to E'$ n-mal (stetig) differenzierbare Funktionen, und sei $\alpha \in \mathbf{K}$. Dann sind $f_1 + f_2$, αf und $h := B(f,g)$ auch n-mal (stetig) differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)^{(n)} &= f_1^{(n)} + f_2^{(n)}, \\ (\alpha f)^{(n)} &= \alpha \cdot f^{(n)}, \\ h^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big). \end{aligned} \tag{1}$$

Sind f_1, f_2, f und g überdies in $a \in D$ sogar $(n+1)$-mal differenzierbar, so sind $f_1 + f_2$, αf und h in a auch $(n+1)$-mal differenzierbar; ihre Ableitungen $(n+1)$-ter Ordnung in a sind durch die zu (1) analogen Formeln gegeben.

Aufgabe. Für alle α, $\beta \in \mathbf{C}$ und $n \in \mathbf{N}_0$ beweise man die Formel

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \cdot \binom{\beta}{n-k}.$$

(vgl. Abschnitt 7.12), indem man für $f_\gamma := (1+x)^\gamma \colon\ ]-1, \infty[\to \mathbf{C}$ mit $\gamma \in \{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$ und $k \in \mathbf{N}_0$ die Formel

$$f_\gamma^{(k)} = k! \binom{\gamma}{k} \cdot (1+x)^{\gamma-k}$$

beweist und in das vorangegangene Theorem einsetzt.

Proposition. Sind n, $m \in \mathbf{N}_0$ und ist $f \colon D \to E$ eine n-mal differenzierbare Funktion, so gilt: f ist genau dann $(n+m)$-mal differenzierbar, wenn $f^{(n)}$ eine m-mal differenzierbare Funktion ist. In diesem Falle ist $(f^{(n)})^{(m)} = f^{(n+m)}$.

Theorem 2. Seien D und $\tilde{D} \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ Teilmengen von $\mathbf{R}$, $g \colon \tilde{D} \to \mathbf{R}$ und $f \colon D \to E$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen, und es gelte $g(\tilde{D}) \subseteq D$. Dann ist auch $f \circ g$ eine n-mal differenzierbare Funktion.

9.2 Konvexe Funktionen

Definition. Sei $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ heißt *konvex*, wenn die Menge $C := \{(t,s) \in I \times \mathbf{R} \mid s \geq f(t)\}$ eine konvexe Teilmenge des Vektorraumes $\mathbf{R}^2$ ist (vgl. Abschnitt 5.3), d. h. wenn

$$\forall t, s \in I\, \forall \lambda \in [0,1]\colon f(t + \lambda(s-t)) \leq f(t) + \lambda \cdot (f(s) - f(t)),$$

wenn also für alle t, $s \in I$ die Verbindungsstrecke von $(t, f(t))$ nach $(s, f(s))$ nirgends unter dem Graphen von f liegt.

Ist $-f$ konvex, so heißt f *konkav.*

Aufgabe 1. Seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine Funktion.

(a) Für die Konvexität von f gelten die folgenden Charakterisierungen:

(i) Ohne besondere Voraussetzungen an f gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ konvex} \iff \forall t,u,s \in I\colon \Big(t < u < s \\ \implies \frac{f(u)-f(t)}{u-t} \leq \frac{f(s)-f(t)}{s-t} \leq \frac{f(s)-f(u)}{s-u}\Big). \end{aligned}$$

(ii) Ist f differenzierbar, so gilt zudem:

$$\begin{aligned} f \text{ konvex} &\iff f' \text{ ist monoton wachsend} \\ &\iff \forall t, s \in I\colon f(s) \geq f(t) + f'(t) \cdot (s-t). \end{aligned}$$

(Mit anderen Worten: Der Graph von f liegt oberhalb jeder seiner Tangenten.)

(iii) Ist f sogar zweimal differenzierbar, gilt:

$$f \text{ konvex} \iff f'' \geq 0.$$

(Damit ist der Graph von f relativ zur kanonischen Durchlaufrichtung nirgends nach rechts gekrümmt.)

(b) Ist f konvex und $a \in I^o := \,]\inf I, \sup I[$, so gilt:

(i) Die Funktion $(f - f(a))/(x-a)$ ist auf $I \cap \,]-\infty, a[$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Folglich existiert die *linksseitige Ableitung*

$$f'(a-) := \lim_{\substack{t \to a \\ t < a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

Entsprechende beweise man die Existenz der *rechtsseitigen Ableitung*

$$f'(a+) := \lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

(Tip: Man benutze (a)(i).)

(ii) Daher (?) ist f auf I^o stetig.

(iii) Es ist $f'(a-) \leq f'(a+)$, und in Verallgemeinerung der Abschätzung aus (a)(ii) gilt ohne jegliche Differenzierbarkeitsvoraussetzung

$$\forall c \in [f'(a-), f'(a+)]\ \forall t \in I\colon f(t) \geq f(a) + c \cdot (t-a).$$

Aufgabe 2 (Die Funktion $|x|^\alpha\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$)**.**

(a) Definiert man für $\alpha \in \mathbf{R}_+$ den Funktionswert $x^\alpha(0) := 0$, so hat man die in Abschnitt 7.9 definierte Funktion $x^\alpha\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ zu einer *stetigen*, streng monoton wachsenden Funktion $x^\alpha\colon\ [0, \infty[\to \mathbf{R}$ fortgesetzt. Damit ist natürlich (?) auch

$$|x|^\alpha\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto x^\alpha(|t|)$$

eine stetige Funktion.

(b) Für $\alpha > 1$ ist $|x|^\alpha$ auf ganz $\mathbf{R}$ stetig differenzierbar mit der Ableitung $(|x|^\alpha)'(0) = 0$.

(c) Für $\alpha \geq 1$ ist $|x|^\alpha$ eine konvexe Funktion.

Aufgabe 3 (Die Jensensche Ungleichung)**.** Seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine konvexe Funktion. Sei $I^o :=]\inf I, \sup I[$.

(a) Sind $t_1, \ldots, t_n \in I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ und gilt $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k = 1$, so ist

$$t^* := \sum_{k=1}^n \lambda_k t_k \in I \quad \text{und} \quad f(t^*) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(t_k).$$

(b) Sind φ, $g\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ Regelfunktionen, m, $M \in I^o$ und gelten

$$m \leq \varphi \leq M, \quad g \geq 0 \quad \text{und} \quad G := \int_a^b g\,dx > 0,$$

so gilt in Verallgemeinerung des ersten Aufgabenteils

$$t^* := G^{-1} \cdot \int_a^b \varphi g\,dx \in I, \quad f \circ \varphi \in R([a,b], \mathbf{R}), \quad \text{und} \quad f(t^*) \leq G^{-1} \cdot \int_a^b (f \circ \varphi) \cdot g\,dx.$$

(Die letzte Ungleichung heißt *Jensensche Ungleichung.*)

(c) Seien E ein $\mathbf{K}$-Banachraum und $g \in R([a,b], \mathbf{R})$ eine Regelfunktion mit $g \geq 0$ und $G := \int_a^b g\,dx > 0$. Hiermit definieren wir für jedes $p \in \mathbf{R}_+$ die Funktion

$$N_p\colon R([a,b], E) \to \mathbf{R}, f \mapsto \Big(G^{-1} \cdot \int_a^b \|f\|^p \cdot g\,dx\Big)^{1/p}.$$

Die Zahl $N_p(f)$ ist *ein* normiertes Maß dafür, wie stark sich die Funktion f von der Nullfunktion unterscheidet, und zwar bezüglich der *Dichtefunktion* g. Die Normierung ist so getroffen, daß $N_p(1) = 1$. Die Funktion N_p taucht im Zusammenhang mit der sogenannten p-Norm, einem funktionalanalytischem Begriff, auf. Man zeige nun:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+\colon (\alpha \leq \beta \implies N_\alpha \leq N_\beta).$$

(Tip: $|x|^{\beta/\alpha}$ ist konvex.)

9.3 Die Taylorformel

Theorem. Seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall, $a \in I$, $n \in \mathbf{N}_0$ und $f\colon I \to E$ eine Funktion in einen Banachraum E.

(a) Ist $n \geq 1$, f eine $(n-1)$-mal differenzierbare Funktion, welche in a sogar n-mal differenzierbar ist, so existiert genau eine *Polynomfunktion* $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ mit Koeffizienten $a_k \in E$, so daß

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}\colon f^{(k)}(a) = P^{(k)}(a)$$

gilt, nämlich

$$P \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k.$$

Diese Polynomfunktion heißt das *Taylorpolynom* n-ter Ordnung von f an der Stelle a. Weiterhin existiert eine in a stetige Funktion $R\colon I \to E$ mit $R(a) = 0$, so daß die *Taylorformel*

$$f = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k + (x-a)^n \cdot R$$

gilt. Aufgrund der Gestalt des *Restgliedes* $(x-a)^n \cdot R$ sagen wir, daß das Taylorpolynom n-ter Ordnung die Funktion f in der Nähe von a mindestens von n-ter Ordnung approximiert; vgl. den Spezialfall $n = 1$ in Abschnitt 6.5.

(b) Ist f sogar eine n-mal *stetig* differenzierbare und auf $I^o \coloneqq]\inf I, \sup I[$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare *reellwertige* Funktion, also $E = \mathbf{R}$, so existiert zu jedem $t \in I$ ein $\theta \in]0,1[$, so daß für die Funktion R aus (a) gilt:

$$R(t) = \frac{1}{(n+1)!}(t-a) \cdot f^{(n+1)}\big(a + \theta \cdot (t-a)\big).$$

In dieser Version heißt das Restglied $(x-a)^n R$ *Lagrangesches Restglied*.

Im Falle $n = 0$ handelt es sich bei dieser Version der Taylorformel um eine modifizierte Version des Mittelwertsatzes; vgl. Abschnitt 6.9).

(c) Ist $f\colon I \to E$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, so gilt für die Funktion der Aussage (a), daß

$$R(t) = \frac{1}{n!} \cdot (t-a) \cdot \int_0^1 f^{(n+1)}\big(a + s(t-a)\big) \cdot (1-s)^n \, ds.$$

In dieser Version heißt das Restglied $(x-a)^n R$ *Integralrestglied*; es gilt

$$(t-a)^n \cdot R(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t f^{(n+1)}(s) \cdot (t-s)^n \, ds.$$

Als Anwendung des Satzes über die differenzierbare Abhängigkeit eines Integrals von einem Parameter erhalten wir:

Proposition 1 (Differenzierbarkeit des Restgliedes in der Taylorformel)**.** Ist die Funktion $f\colon I \to E$ eine $(n+m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, so ist die Funktion R in dem Restglied $(x-a)^n \cdot R$ der Taylorformel mindestens m-mal stetig differenzierbar.

Proposition 2 (Mehrfaches Abspalten von Linearfaktoren)**.** Ist f in der Nähe von a eine n-mal *stetig* differenzierbare Funktion und hat f in a eine *Nullstelle mindestens n-ter Ordnung*, d. h. gilt

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

so gilt

$$f = (x-a)^n \cdot h \quad \text{mit} \quad h\colon t \mapsto \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_0^1 f^{(n)}(a + s(t-a)) \cdot (1-s)^{n-1}\, ds.$$

Aufgabe 1. Sei $f\colon\ ]-r, r[\ \to E$ mit $r \in \mathbf{R}_+$ eine differenzierbare, gerade Funktion, die in 0 ein zweites Mal differenzierbar ist. Dann ist die Funktion $g\colon\ [0, r^2[\ \to E, t \mapsto f(\sqrt{t})$ differenzierbar mit der Ableitung $g'(0) = f''(0)/2$. Die Ableitung g' ist in 0 stetig, und es gilt (natürlich) $f = g(x^2)$.

Aufgabe 2. Es sei $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine $(n+m)$-mal stetig differenzierbare Funktion mit n, $m \in \mathbf{N}_0$ und $n \geq 2$, die an einer Stelle $a \in I$ eine n-fache Nullstelle besitzt (s. o.) und deren n-te Ableitung an der Stelle a positiv ist. Auch wenn die n-te Wurzel in 0 nicht differenzierbar ist, so existiert doch in einer Umgebung $U_\varepsilon(a) \cap I$ eine mindestens $(m+1)$-mal differenzierbare Funktion g mit $f|U_\varepsilon(a) \cap I = g^n$.

9.4 Hinreichende Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema

Theorem. Seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall, $I^o := \,]\inf I, \sup I[$, $a \in I^o$, $n \in \mathbf{N}_1$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine $(n-1)$-mal differenzierbare Funktion, die in a sogar n-mal differenzierbar ist. Es gelte

$$f^{(1)}(a) = f^{(2)}(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Dann gilt:

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(a) > 0$, so besitzt f in a ein *strenges lokales Minimum*, d. h. es existiert ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq I$, so daß

$$\forall t \in \dot{U}_\varepsilon(a)\colon f(t) > f(a).$$

(b) Ist n gerade und $f^{(n)}(a) < 0$, so besitzt f in a ein *strenges lokales Maximum*, d. h. es existiert ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq I$, so daß

$$\forall t \in \dot{U}_\varepsilon(a)\colon f(t) < f(a).$$

(c) Ist n ungerade, so besitzt f in a *kein* lokales Extremum.

Aufgabe (Wendepunkte)**.** Es seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall, $I^o :=]\inf I, \sup I[$, $a \in I^o$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Wir sagen dann, daß $(a, f(a))$ ein *Wendepunkt* von f ist, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq I$ gibt, so daß entweder

$$f|\,]a-\varepsilon, a[\text{ konvex} \quad \text{und} \quad f|\,]a, a+\varepsilon[\text{ konkav}$$

oder

$$f|\,]a-\varepsilon, a[\text{ konkav} \quad \text{und} \quad f|\,]a, a+\varepsilon[\text{ konvex}$$

ist.

Man zeige: Ist f auf I eine $2n$-mal differenzierbare Funktion, die in a sogar $(2n+1)$-mal differenzierbar ist, und gilt

$$f^{(2)}(a) = f^{(3)}(a) = \cdots = f^{(2n)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(2n+1)}(a) \neq 0,$$

so ist $(a, f(a))$ ein Wendepunkt von f.

(Tip: Taylorformel für f''.)

9.5 Die Taylorreihe

Ist $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$, so gilt

$$\forall n \in \mathbf{N}_0\colon f^{(n)}(a) = n! \cdot a_n,$$

d. h. für jedes $m \in \mathbf{N}_0$ ist die Partialsumme

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \cdot (x-a)^n$$

das Taylorpolynom n-ter Ordnung von f. Das veranlaßt uns, für jede beliebig oft differenzierbare Funktion $f\colon U_\rho(a) \to E$ mit $\rho > 0$ die formale *Taylorreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n$$

von f in a zu bilden und zu untersuchen, ob diese gegen f konvergiert. Diese Taylorreihe ist die einzig möglich Potenzreihendarstellung von f mit Entwicklungspunkt a.

Definition. Ist $f\colon D \to E$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und konvergiert für jedes $a \in D$ die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n$$

in einer gewissen Umgebung von a gegen f, so heißt f eine *reell analytische Funktion.*

Theorem. Es seien I ein Intervall, $a \in I$ und $f\colon I \to E$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Weiter mögen C, $q \in \mathbf{R}_+$ existieren, so daß

$$\forall t \in I\, \forall n \in \mathbf{N}_0\colon \left\| f^{(n)}(t) \right\| \leq C \cdot q^n.$$

Dann konvergiert die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n$$

auf I gegen f.

Warnung. Es gibt beliebig oft differenzierbare Funktionen, die nicht durch ihre Taylorreihe dargestellt werden können: Die Funktionen

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t}) & \text{für } t \in \mathbf{R}_+, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \cos(n^2 \cdot x)$$

sind beliebig oft differenzierbar (für f vgl. die folgende Aufgabe). Die Taylorreihe von f in 0 stellt die Nullfunktion dar. Daher gibt es keine Umgebung $U_\varepsilon(0)$, in der f durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. Die Taylorreihe von g in 0 besitzt den Konvergenzradius $\rho = 0$, ist also zur Beschreibung von g ebenfalls ungeeignet.

Aufgabe. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß die Funktion

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t}) & \text{für } t \in \mathbf{R}_+, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist.

Dazu führe man die folgenden Schritte durch:

(a) Für $n \in \mathbf{N}_0$ sei

$$f_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} t^{-n} \cdot \exp(-\frac{1}{t}) & \text{für } t \in \mathbf{R}_+, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar ist $f_0 = f$. Nun zeige man der Reihe nach für alle $n \in \mathbf{N}_0$:

(i) f_n ist in einer Umgebung von 0 beschränkt.
(ii) f_n ist in 0 stetig.
(iii) f_n ist in 0 differenzierbar und $f_n'(0) = 0$.

(b) Für alle $n \in \mathbf{N}_1$ ist die Funktion f eine n-mal differenzierbare Funktion, und es existiert eine Polynomfunktion P_n vom Grade $n-1$ mit

$$f^{(n)} = P_n \cdot f_{2n}.$$

Daher (?) stellt die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt 0 die Funktion f in keiner noch so kleinen Umgebung von 0 dar.

9.6 Kurven in einem Banachraum

Festsetzung. Für den Rest des Kapitels bezeichne $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein nicht entartetes Intervall und E einen $\mathbf{K}$-Banachraum.

Definition. Eine stetige Funktion $\alpha\colon I \to E$ wird auch ein *Weg* in E und ihr Bild $\alpha(I)$ seine *Spur* genannt.

Ist α stetig differenzierbar, sprechen wir von einem C^1-*Weg* oder einer *Kurve*. Die Ableitung $\alpha'(t)$ nennen wir den *Geschwindigkeitsvektor*, $\|\alpha'(t)\|$ die *Geschwindigkeit* und — im Falle zweimaliger Differenzierbarkeit — $\alpha''(t)$ den *Beschleunigungsvektor* von α zu einem *Zeitpunkt* $t \in I$.

Ist α eine Kurve und sind a, $b \in I$ mit $a < b$, so nennen wir

$$L(\alpha|[a,b]) := \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

die *Länge* des Kurvenstückes $\alpha|[a,b]$ (vgl. auch unten stehenden Kommentar).

Gilt $L(\alpha|[a,b]) = b - a$ für alle a, $b \in I$ mit $a < b$, so sagen wir, daß α *nach der Bogenlänge parametrisiert* ist. Ist $\alpha'(t) \neq 0$, so nennen wir α in t *regulär*; ist α in allen $t \in I$ regulär, so nennen wir α eine *reguläre Kurve*.

Es ist zu betonen, daß ein Weg mehr ist als seine Spur (also eine Punktmenge), nämlich eine Abbildung von einem Intervall. Deuten wir den Parameter t als Zeitparameter, so ist diese Abbildung als die Beschreibung eines *dynamischen Vorganges* anzusehen.

Beispiele.

(a) Sind p, $v \in E$ und ist $v \neq 0$, so ist bekanntlich die Kurve

$$\alpha\colon \mathbf{R} \to E, t \mapsto p + t \cdot v$$

eine Parametrisierung einer *Geraden* durch den Punkt p in Richtung des Vektors v. Ist $q \in E$ ein weiterer Punkt, so ist

$$\alpha\colon [0,1] \to E, t \mapsto p + t \cdot (q - p)$$

eine Parametrisierung der *Strecke* $[p, q]$; vgl. auch Abschnitt 5.3.

(b) Ist $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine Funktion, so ist der Weg

$$\alpha\colon I \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$$

die kanonische Parametrisierung des *Graphen* von f. Es ist α genau dann eine Kurve, wenn f stetig differenzierbar ist. Sind im letzteren Fall a, $b \in I$ mit $a < b$, so gilt bezüglich der euklidischen Norm des $\mathbf{R}^2$ offenbar

$$L(\alpha|[a,b]) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \, dx.$$

(c) Sind r, $\theta\colon I \to \mathbf{R}$ zwei stetige Funktionen und ist $p \in \mathbf{C}$, so beschreibt

$$\alpha\colon I \to \mathbf{C}, t \mapsto p + r(t) \cdot e^{i\cdot\theta(t)}$$

einen Weg in *Polarkoordinatendarstellung* bezüglich des Zentrums p; vgl. auch Abschnitt 7.19. In den meisten Fällen wird $r \geq 0$ vorausgesetzt. Sind r und θ stetig differenzierbar, so ist α eine Kurve; in diesem Falle gilt offenbar

$$\alpha' = (r' + ir\theta') \cdot e^{i\theta}, \quad \text{also} \quad \|\alpha'\| = \sqrt{(r')^2 + (r\theta')^2}.$$

Die Ableitung θ' heißt die *Winkelgeschwindigkeit* von α.

(d) Seien $p \in \mathbf{C}$, $r \in \mathbf{R}_+$ und $\omega \in \mathbf{R}^*$. Dann beschreibt

$$\gamma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, t \mapsto p + r \cdot e^{i\omega t} = p + r \cdot (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

eine gleichförmige Kreisbewegung um den Punkt p mit Radius r und Winkelgeschwindigkeit ω. Für $r = \omega = 1$ ist γ bezüglich der euklidischen Norm von $\mathbf{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert; ist außerdem $p = 0$, so liegt gerade die in Abschnitt 7.14 beschriebene kanonische Parametrisierung des Einheitskreises vor. Daß dieser nach der Bogenlänge parametrisiert ist, zeigt auch, daß die Reihendarstellungen von cos und sin diese Funktionen in Abhängigkeit vom *Bogenmaß* darstellen.

(e) Sind v und w zwei linear unabhängige Vektoren des Banachraumes E, so parametrisiert

$$\alpha\colon \mathbf{R} \to E, t \mapsto \cos(t) \cdot v + \sin(t) \cdot w$$

eine *Ellipse* und

$$\beta\colon \mathbf{R} \to E, t \mapsto \cosh(t) \cdot v + \sinh(t) \cdot w$$

einen *Hyperbelast*.

Meist werden diese Darstellungen für $E = \mathbf{R}^2$ angegeben, wobei $v = (a, 0)$ und $w = (0, b)$ mit Konstanten a, $b \in \mathbf{R}_+$ gewählt werden.

Aufgabe 1. Für jede Kurve $\alpha\colon [a, b] \to E$ gilt

$$L(\alpha) \geq \|\alpha(b) - \alpha(a)\| = d(\alpha(a), \alpha(b)).$$

Daher (?) ist die Strecke zwischen $\alpha(a)$ und $\alpha(b)$ eine kürzeste Kurve zwischen den beiden Punkten.

Korollar. Ist $\alpha\colon [a, b] \to E$ eine Kurve und $Z \coloneqq (t_k)_{k=0,\ldots,n}$ eine Zerlegung des Intervalles $[a, b]$ (vgl. Abschnitt 8.2), so gilt

$$L(\alpha, Z) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| \leq L(\alpha).$$

Kommentar. Aufgrund der vorangegangenen Aufgabe ist $L(\alpha, Z)$ die *Länge des Streckenzuges* mit den *Eckpunkten* $\alpha(t_0)$, $\alpha(t_1)$, $\ldots$, $\alpha(t_n)$. Tatsächlich läßt sich zeigen, daß

$$L(\alpha) = \sup\{L(\alpha, Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\}.$$

Das Supremum auf der rechten Seite läßt sich auch für nur stetige Wege $\alpha\colon [a, b] \to E$ bilden. Daher können wir in diesem Falle diese Formel zur Definition der Weglänge $L(\alpha)$ erheben. Ist $L(\alpha) < \infty$, so sagen wir, daß der Weg α *rektifizierbar* ist. Insbesondere sehen wir, daß Kurven, die über folgenkompakten Intervallen definiert sind, rektifizierbar sind.

Aufgabe 2 (Invarianz der Weglänge unter Parametertransformation)**.** Sei $\alpha\colon [a, b] \to E$ ein Weg und $\varphi\colon [c, d] \to [a, b]$ eine *stetige Parametertransformation*, das ist eine stetige, monoton wachsende Funktion φ mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$. Dann ist $L(\alpha) = L(\alpha \circ \varphi)$; insbesondere gilt, daß α genau dann rektifizierbar ist, wenn $\alpha \circ \varphi$ rektifizierbar ist.

9.7 Integration und Differentiation bezüglich der Bogenlänge

Festsetzung. In diesem Abschnitt seien $\alpha\colon I \to E$ eine Kurve in einem Banachraum und $s\colon I \to \mathbf{R}$ irgendeine Stammfunktion von $\|\alpha'\|$.

Die Funktion s ist monoton wachsend; und für alle a, $b \in I$ mit $a < b$ gilt für die Länge $L(\alpha|[a, b]) = s(b) - s(a)$; daher heißt s auch *Bogenlängenparameter* von α.

Proposition 1. Die Kurve α ist genau dann nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn $\|\alpha'\| \equiv 1$.

Theorem 1. Ist α regulär, so ist s eine streng monoton wachsende Funktion. Ihre Umkehrfunktion $\varphi := \check{s}\colon J \to \mathbf{R}$ (mit $J := s(I)$) ist eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende Funktion mit $\varphi(J) = I$, und die Kurve $\gamma := \alpha \circ \varphi$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert.

Im folgenden sei $f\colon I \to E'$ eine Funktion in einen weiteren Banachraum E', die mit der Kurve α verbunden gedacht wird, etwa durch die Vorstellung, daß zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ von einem sich längs α bewegenden Beobachter der Funktionswert $f(t)$ gemessen wird.

Definition 1. Seien a, $b \in I$ mit $a < b$. Ist $f\colon I \to E'$ eine Regelfunktion in einen weiteren Banachraum, so heißt

$$\int_a^b f\, ds := \int_a^b f(t)\, \|\alpha'(t)\|\, dt$$

das *Integral von f längs α bezüglich der Bogenlänge.*

Diese Definition wird durch folgende Aufgabe motiviert:

Aufgabe 1. Seien a, $b \in I$ mit $a < b$.

(a) Ist f eine Treppenfunktion mit angepaßter Zerlegung $(t_k)_{k=0,\dots,n}$ von $[a, b]$ (vgl. Abschnitt 8.2), so ist

$$\int_a^b f\,ds = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot L(\alpha|[t_{k-1}, t_k]) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (s(t_k) - s(t_{k-1}))$$

mit beliebigen $\xi_k \in \,]t_{k-1}, t_k[$.

(b) **Approximation von $\int\limits_a^b f\,ds$ durch verallgemeinerte Riemannsche Summen.** Ist f eine stetige Funktion, so existiert zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß für jede Zerlegung $(t_k)_{k=0,\dots,n}$ von $[a, b]$ mit $t_k - t_{k-1} \leq \delta$ und jede Folge $(\xi_k)_{k=1,\dots,n}$ von „Zwischenpunkten“ mit $\xi_k \in \,]t_{k-1}, t_k[$ gilt, daß

$$\left\| \int_a^b f\,ds - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (s(t_k) - s(t_{k-1})) \right\| < \varepsilon.$$

Theorem 2 (Invarianz des Integrals bezüglich der Bogenlänge gegenüber Umparametrisierungen)**.** Sei J ein weiteres Intervall, und sei $\varphi\colon J \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi' > 0$. Sind dann a, $b \in J$ mit $a < b$, so gilt

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\,ds = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\,ds,$$

wobei auf der linken Seite s der Bogenlängenparameter der umparametrisierten Kurve $\alpha \circ \varphi$ steht.

Definition 2. Ist α eine reguläre Kurve, so heißt der „Differentialoperator“

$$\frac{d}{ds} := \frac{1}{\|\alpha'\|} \cdot \frac{d}{dt} \colon f \mapsto \frac{1}{\|\alpha'\|} \cdot f'$$

die *Ableitung nach der Bogenlänge.*

Diese Definition wird durch folgende Aussage motiviert:

Proposition 2. Ist $\alpha\colon I \to E$ eine reguläre Kurve und f eine differenzierbare Funktion in einen weiteren Banachraum E', so gilt

$$\forall t \in I\colon \frac{df}{ds}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{s(t+h) - s(t)}.$$

Die Ableitung nach der Bogenlänge mißt also die infinitesimale Änderung von f relativ zur Bogenlänge.

Außerdem können wir folgendes Analogon zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formulieren:

Proposition 3. Sei $a \in I$. Ist $f\colon I \to E'$ eine stetige Funktion in einen weiteren Banachraum E', so ist

$$F := \int_a^x f\,ds\colon I \to E'$$

eine *Stammfunktion bezüglich der Bogenlänge* von f, das heißt

$$\frac{dF}{ds} = f.$$

Definition 3 (Geometrische Größen einer Kurve)**.** Ist α eine reguläre Kurve, so heißt

$$T_\alpha := \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'\|} \cdot \alpha'$$

das *normierte Tangentenvektorfeld* von α, weil $\|T_\alpha\| \equiv 1$. Ist überdies α zweimal differenzierbar, so wird

$$\frac{dT_\alpha}{ds}$$

das *Krümmungsvektorfeld* und

$$\left\|\frac{dT_\alpha}{ds}\right\|$$

die *Absolutkrümmung* von α genannt.

Wird für eine zweimal stetig differenzierbare Kurve $\alpha\colon I \to \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ das normierte Tangentenvektorfeld T_α durch eine stetig differenzierbare Funktion $\theta\colon I \to \mathbf{R}$ vermöge $T_\alpha \equiv e^{i\theta}$ beschrieben (vgl. folgende Aufgabe 3), so heißt

$$\kappa := \frac{d\theta}{ds}$$

die *(orientierte) Krümmung* von α. Ihr Absolutbetrag ist gerade die Absolutkrümmung.

Existiert in diesem Falle zu einem Parameter $a \in I$ ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq I$, so daß

$$\kappa|\,]a-\varepsilon, a] \le 0 \quad \text{und} \quad \kappa|\,[a, a+\varepsilon[\, \ge 0$$

oder

$$\kappa|\,]a-\varepsilon, a] \ge 0 \quad \text{und} \quad \kappa|\,[a, a+\varepsilon[\, \le 0,$$

so heißt $\alpha(a)$ ein *Wendepunkt* von α und a eine *Wendestelle.*

Beispiel. Im Falle der gleichförmigen Kreisbewegung

$$\gamma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}, t \mapsto p + r \cdot e^{i\omega t}$$

mit $\omega \in \mathbf{R}_+$ ist

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{r\omega} \cdot \frac{d}{dt}, \quad T_\gamma = i \cdot e^{i\omega x} = e^{i\cdot(\omega\cdot x + \frac{\pi}{2})}, \quad \text{also} \quad \theta = \omega \cdot x + \frac{\pi}{2};$$

und daher ist die Krümmung $\kappa = \frac{1}{r}$. Im Falle $\omega \in \mathbf{R}_-$ erhalten wir $\kappa = -\frac{1}{r}$.

Aufgabe 2. Sei $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, des weiteren sei $\alpha := (x, f)\colon I \to \mathbf{R}^2$ die kanonische Parametrisierung des Graphen von f. Man zeige, daß

$$T_\alpha = e^{i\theta} \quad \text{mit} \quad \theta = \arctan \circ f'$$

ist, und daß die Krümmung von α durch

$$\kappa = f'' / \sqrt{1 + (f')^2}^{\,3}$$

berechnet wird. Man bestätige in diesem Falle, daß obige Definition von Wendepunkten mit der Definition aus dem Abschnitt 9.4 übereinstimmt.

Aufgabe 3.

(a) Seien $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon I \to \mathbf{R}^2$ eine Kurve mit $\gamma(I) \subseteq \mathbf{S}^1$, $a \in I$, und $\theta_0 \in \mathbf{R}$, so daß $\gamma(a) = e^{i\theta_0}$, etwa $\theta_0 = \arg(\gamma(a))$, vgl. Abschnitt 7.19. Dann gilt $\gamma = e^{i\theta}$ mit der stetig differenzierbaren Funktion

$$\theta := \theta_0 + \int_a^x (\gamma_1 \gamma_2' - \gamma_2 \gamma_1')\, dx.$$

(Tip: Mit dem kanonischen Skalarprodukt des $\mathbf{R}^2$ berechne man die Ableitung $\langle \gamma, e^{i\theta} \rangle'$ und wende an geeigneter Stelle die Cauchy–Schwarzsche Un*gleichung* an.

(b) Man zeige, daß jede Kurve $\alpha\colon I \to \mathbf{C}$ mit $0 \notin \alpha(I)$ eine Polarkoordinatendarstellung besitzt; vgl. Beispiel (c) aus Abschnitt 9.6.

Kapitel 10

Konvergenz von Funktionen

10.1 Erweiterung der Definitionen auf $\widehat{\mathbf{R}}$

In Abschnitt 6.3 haben wir die Konvergenz von Abbildungen eingeführt. Dafür haben wir punktierte ε-Umgebungen und Häufungspunkte von Mengen definiert. Wir beziehen zunächst die Punkte ∞ und $-\infty$ in unsere Definitionen ein.

Definition. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$. In $\widehat{\mathbf{R}}$ definieren wir die punktierten ε-Umgebungen von ∞ und $-\infty$ durch

$$\dot{U}_\varepsilon(\infty) := \left]1/\varepsilon, \infty\right[\quad \text{und} \quad \dot{U}_\varepsilon(-\infty) := \left]-\infty, -1/\varepsilon\right[.$$

Durch wörtliche Übertragung der Definitionen aus den Abschnitten 6.2 und 6.3 sei dann definiert, für welche Teilmengen $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ die Punkte ∞ und $-\infty$ Häufungspunkte sind, und was die Bedeutung der Limites

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = q, \quad \lim_{t\to-\infty} f(t) = q, \quad \lim_{p_0} f = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{p_0} f = -\infty$$

ist.

Natürlich wissen wir jetzt auch, was $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$ für eine Funktion $f\colon M \to \mathbf{R}$ mit $M \subseteq R$ bedeutet, usw.

Aufgabe.

(a) Ist $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$, so gilt: ∞ (bzw. $-\infty$) ist genau dann Häufungspunkt von M, wenn M nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt ist.

(b) Ist E ein metrischer Raum, $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine beliebige Teilmenge und ist $p_0 \in E$ ein Häufungspunkt von M, so gilt für jede Funktion $f\colon M \to \mathbf{R}$, daß

$$\lim_{p_0} f = \infty \iff \forall c \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall p \in \dot{U}_\delta(p_0) \cap M\colon f(p) > c.$$

Man formuliere eine entsprechende Aussage für $\lim_{p_0} f = -\infty$.

10.2 Weitere Bezeichnungen

Wir vereinbaren einige Sprechweisen, um dann über das Konvergenzverhalten spezieller Funktionen Aussagen machen zu können.

Definition. Es seien E und E' metrische Räume, N, $M \in \mathfrak{P}(E)$ mit $N \subseteq M$, $p_0 \in E$ ein Häufungspunkt von N, $q \in E'$ und $f\colon M \to E'$ eine Abbildung. Dann definieren wir:

(a) $\lim\limits_{\substack{p \to p_0 \\ p \in N}} f(p) = q :\Longleftrightarrow \lim\limits_{p_0} f|N = q.$

(b) Sowie

$$f(a+) := \lim_{t \to a+} f(t) = q :\Longleftrightarrow \lim_{\substack{t \to a \\ t \in N}} f(t) = q \quad \text{mit} \quad N := \{t \in M \mid t > a\}$$

und

$$f(a-) := \lim_{t \to a-} f(t) = q :\Longleftrightarrow \lim_{\substack{t \to a \\ t \in N}} f(t) = q \quad \text{mit} \quad N := \{t \in M \mid t < a\}$$

für $E = \mathbf{R}$ und $p_0 = a$.

10.3 Konvergenzkriterien und Folgerungen

Festsetzung. In diesem Abschnitt seien (E, d) und (E', d') metrische Räume, $p_0 \in E$ ein Häufungspunkt von M für $M \in \mathfrak{P}(E)$, und $f\colon M \to E'$ eine Abbildung. Wir erinnern an den Abschnitt 6.3, insbesondere die dort verabredeten Sprechweisen, die Aussage über die Eindeutigkeit von Grenzwerten und das Theorem, welches die Verbindung zwischen der Konvergenz und der Stetigkeit von Abbildungen beschreibt.

Theorem 1 (Vertauschbarkeit von Limesbildung und stetigen Operationen)**.** Es sei $g\colon E' \to E''$ eine in $q \in E'$ stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum E''. Dann gilt

$$\lim_{p_0} f = q \implies \lim_{p_0} g \circ f = g(q).$$

Proposition 1. Die Abbildung $f\colon M \to E'$ konvergiert genau dann für $p \to p_0$ gegen q, wenn p_0 ein Häufungspunkt von M ist und wenn für jede gegen p_0 konvergierende Punktfolge $(p_n)_{n \geq 1}$ mit $p_n \in M \setminus \{p_0\}$ die Bildfolge $(f(p_n))_{n \geq 1}$ gegen q konvergiert.

Diese Proposition stellt offensichtlich eine Analogie zum Heine-Kriterium dar.

Das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von Abbildungen.

(a) Konvergiert die Abbildung f für $p \to p_0$ gegen einen Punkt von E', so gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall p_1, p_2 \in \dot{U}_\delta(p_0) \cap M \colon d'(f(p_1), f(p_2)) < \varepsilon. \qquad (*)$$

(b) Ist der metrische Raum E' vollständig, so gilt auch die Umkehrung. D. h. gilt die Bedingung $(*)$, so konvergiert die Abbildung f für $p \to p_0$ gegen einen Punkt von E'.

Proposition 2. Ist $E' = \prod_k E_k$ das Produkt metrischer Räume $E_1, \ldots, E_k$ und ist $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon M \to E'$ eine Abbildung, so gilt:

$$\lim_{p_0} f = q \iff \forall k \in \{1, \ldots, n\} \colon \lim_{p_0} f_k = \mathrm{pr}_k(q).$$

Korollar. Es seien E, E' und F normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume, $B \colon E \times E' \to F$ eine stetige bilineare Abbildung, f, f_1, $f_2 \colon M \to E$ und $g \colon M \to E'$ Funktionen, $\alpha \in \mathbf{K}$, und es gelte

$$\lim_{p_0} f = v, \quad \lim_{p_0} f_1 = v_1, \quad \lim_{p_0} f_2 = v_2 \quad \text{und} \quad \lim_{p_0} g = w$$

mit v, v_1, $v_2 \in E$ und $w \in E'$. Dann gilt auch

$$\lim_{p_0}(f_1 + f_2) = v_1 + v_2, \quad \lim_{p_0}(\alpha f) = \alpha v \quad \text{und} \quad \lim_{p_0} B(f, g) = B(v, w).$$

Ist $E = \mathbf{K}$ und $v \neq 0$, so gilt auch $\lim\limits_{p_0} 1/f = 1/v$.

Aufgabe 1. Die Voraussetzungen seien wie im vorangegangenen Korollar. Insbesondere seien die allgemeinen Voraussetzungen dieses Abschnitts erfüllt.

(a) Ist $f \colon M \to E$ eine Funktion mit $\lim\limits_{p_0} f = 0$ und $g \in B(M, E')$, so gilt auch $\lim\limits_{p_0} B(f, g) = 0$.

Im weiteren seien Funktionen f, g, $h \colon M \to \mathbf{R}$ gegeben.

(b) Gilt $\lim\limits_{p_0} f = \infty$ und $g \geq a \in \mathbf{R}_+$, so folgt $\lim\limits_{p_0} 1/f = 0$ und $\lim\limits_{p_0}(fg) = \infty$.

(c) Gilt $f \leq g$ und konvergieren f und g für $p \to p_0$ gegen A bzw. B, so gilt auch $A \leq B$.

(d) **Sandwich-Theorem** Gilt $f \leq g \leq h$ und konvergieren f und h für $p \to p_0$ gegen denselben Grenzwert $A \in \widehat{\mathbf{R}}$, so konvergiert auch die „eingeklemmte" Funktion g für $p \to p_0$ gegen A.

Aufgabe 2. Es seien $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $Q = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$ zwei reelle Polynomfunktionen mit $a_n > 0$ und $b_m > 0$. Man bestimme den Limes der rationalen Funktion P/Q für $t \to \infty$.

Theorem 2. Seien $a, b \in \widehat{\mathbf{R}}$ mit $a < b$. Ist dann $f \colon\ ]a, b[\ \to \mathbf{R}$ eine monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion, so gilt

$$\lim_{a} f = \inf f(]a, b[) \quad \text{und} \quad \lim_{b} f = \sup f(]a, b[)$$

(bzw.

$$\lim_{a} f = \sup f(]a, b[) \quad \text{und} \quad \lim_{b} f = \inf f(]a, b[)).$$

Beispiele. Alle in diesen Beispielen auftauchenden Funktionen seien auf die reelle Achse beschränkt.

(a) $\lim_{\infty} \exp = \infty$ und $\lim_{-\infty} \exp = 0$.

(b) $\lim_{0} \ln = -\infty$ und $\lim_{\infty} \ln = \infty$.

(c) Sei $\alpha \in \mathbf{R}_+$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\infty} x^{\alpha} &= \infty \quad \text{und} \quad & \lim_{t\to 0+} t^{\alpha} &= 0, \\ \lim_{\infty} x^{-\alpha} &= 0 \quad \text{und} \quad & \lim_{t\to 0+} t^{-\alpha} &= \infty, \\ \lim_{\infty}(x^{-\alpha} \exp) &= \infty \quad \text{und} \quad & \lim_{\infty}(x^{\alpha} \exp(-x)) &= 0. \end{aligned}$$

(d) $\lim_{t\to\pi/2-} \tan(t) = \infty$, $\lim_{t\to\pi/2+} \tan(t) = -\infty$, $\lim_{\infty} \arctan = \pi/2$ und $\lim_{-\infty} \arctan = -\pi/2$.

(e) $\lim_{\infty} \cosh = \infty$, $\lim_{\infty} \sinh = \infty$ und $\lim_{\infty}(\cosh - \sinh) = 0$. $\lim_{\infty} \tanh = \lim_{\infty} \coth = 1$, $\lim_{-\infty} \tanh = \lim_{-\infty} \coth = -1$, $\lim_{t\to 0+} \coth(t) = \infty$ und $\lim_{t\to 0-} \coth(t) = -\infty$.

10.4 Der erweiterte oder zweite Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Theorem. Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ und a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$ sowie $[a, b] \subseteq D$. Weiterhin seien f, $g\colon D \to \mathbf{R}$ Funktionen, die in allen Punkten von $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar sind. Dann existiert ein $t_0 \in \,]a, b[$ mit

$$g'(t_0) \cdot (f(b) - f(a)) = f'(t_0) \cdot (g(b) - g(a)).$$

Ist $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in \,]a, b[$, so gilt $g(b) \neq g(a)$ und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}.$$

Eine vektorwertige Modifikation des erweiterten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ und a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$ und $[a, b] \subseteq D$. Weiterhin seien $f\colon D \to E$, $g\colon D \to \mathbf{R}$ Funktionen in einen Banachraum E, die in allen Punkten von $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar sind; es gelte $g' \geq 0$. Dann existiert ein $t_0 \in \,]a, b[$ mit

$$\|f(b) - f(a)\| \cdot g'(t_0) \leq \|f'(t_0)\| \cdot (g(b) - g(a)).$$

Den Mittelwertabschätzungssatz aus Abschnitt 6.15 erhält man offenbar aus dieser Aussage, indem man $g = x$ setzt.

Beweis. Wegen $g' \geq 0$ ist g monoton wachsend, also $g(b) - g(a) \geq 0$. Wir setzen $v_0 := f(b) - f(a)$. Ist $v_0 = 0$, so gilt die zu beweisende Ungleichung trivialerweise für jedes t_0. Daher können wir $v_0 \neq 0$ voraussetzen. Nach der Folgerung des Fortsetzungssatzes von Hahn–Banach aus 6.15 wählen wir eine Linearform $\lambda\colon E \to \mathbf{R}$ mit

$$\lambda(v) = \|v_0\| \quad \text{und} \quad \forall v \in E\colon\ |\lambda(v)| \leq \|v\|$$

und definieren damit die Funktion

$$\psi\colon [a,b] \to \mathbf{R}, t \mapsto \|v_0\| \cdot (g(t) - g(a)) - \lambda(f(t) - f(a)) \cdot (g(b) - g(a)).$$

Da λ nach der Aufgabe 2 aus Abschnitt 5.3 stetig ist, ist auch ψ stetig und wegen der Vertauschbarkeit von Differentiation und stetigen linearen Operatoren (vgl. Abschnitt 6.7) auf dem Intervall $]a,b[$ differenzierbar. Da nach Wahl von λ außerdem $\psi(a) = \psi(b) = 0$ ist, existiert nach dem Satz von Rolle ein $t_0 \in\ ]a,b[$, so daß $\psi'(t_0) = 0$. Da $(\lambda \circ (f - f(a)))' = \lambda \circ f'$, folgt

$$0 = \psi'(t_0) = \|v_0\| \cdot g'(t_0) - \lambda(f'(t_0)) \cdot (g(b) - g(a)),$$

also nach Wahl von λ, daß

$$\|v_0\| \cdot g'(t_0) = \lambda(f'(t_0)) \cdot (g(b) - g(a)) \leq \|f'(t_0)\| \cdot (g(b) - g(a)). \qquad \square$$

10.5 Regel von de L'Hospital

Proposition. Es seien α, $\beta \in \widehat{\mathbf{R}}$ sowie $a \in [\alpha, \beta]$ und $D :=]\alpha, \beta[\setminus \{a\}$. Weiterhin seien f, $g\colon D \to \mathbf{R}$ differenzierbare Funktionen, für die gelten:

(a) $\forall t \in D\colon g'(t) \neq 0$.

(b) $(\lim_a f = 0 \wedge \lim_a g = 0) \vee \lim_a g = \infty$.

(c) Es existiert $\lim_a (f'/g') \in \widehat{\mathbf{R}}$.

Dann besitzt der Quotient f/g in a einen Grenzwert, und zwar ist

$$\lim_a (f/g) = \lim_a (f'/g').$$

Beispiele.

(a) Für jedes $\alpha \in \mathbf{R}_+$ ist $\lim\limits_{t \to 0+} (t^\alpha \cdot \ln(t)) = -\lim\limits_\infty (x^{-\alpha} \cdot \ln) = 0$.

(b) Für jedes $t \in \mathbf{R}$ ist $\exp(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$.

10.6 Uneigentliche Integrale

Definition 1. Seien E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, a, $b \in \widehat{\mathbf{R}}$ mit $-\infty < a < b$, $f \in R([a,b[\,, E)$ und $v \in E$. Wir sagen, daß das *uneigentliche Integral* $\int\limits_a^b f\,dx$ gegen v konvergiert, und schreiben $\int\limits_a^b f\,dx = v$, wenn die Funktion $\int_a^x f\,dx\colon\ [a,b[\ \to E$ für $t \to b$ gegen v konvergiert. Im Falle $E = \mathbf{R}$ ist auch $v \in \{\infty, -\infty\}$ zugelassen.

Beispiele 1.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} 1/(\alpha-1) & \text{für } \alpha > 1 \text{ und} \\ \infty & \text{für } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$

(b) Für $t \in \mathbf{R}_+$ heißt

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} \exp(-x)\,dx$$

die *Eulersche Integraldarstellung der Gammafunktion.* Diese Funktion ist eine Extrapolation der Fakultät, genauer:

$$\forall n \in \mathbf{N}_0 \colon \Gamma(n+1) = n!.$$

Kommentar (Stirlingsche Formel)**.** Mit Hilfe der Gammafunktion läßt sich für alle $n \in \mathbf{N}_0$ folgende Abschätzung herleiten:

$$a_n := \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n < n! < a_n \cdot e^{\frac{1}{12n}}$$

Das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz uneigentlicher Integrale. In der Situation der Definition 1 konvergiert das uneigentliche Integral genau dann gegen ein $v \in E$, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ ein $r \in [a,b[$ gibt, so daß

$$\forall t, s \in [r, b[\, : \left(t < s \implies \left\|\int_t^s f\,dx\right\| < \varepsilon\right).$$

Majorantenkriterium. Existiert in der Situation aus der Definition 1 eine Majorante $g \in R([a,b[, \mathbf{R})$ von f, d. h.: $\|f\| \leq g$, für welche das uneigentliche Integral $\int_a^b g\,dx$ gegen eine Zahl in $\mathbf{R}$ konvergiert, so konvergiert auch das uneigentliche Integral $\int_a^b f\,dx$ gegen ein $v \in E$.

Aufgabe 1 (Das Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen)**.** Ist $m \in \mathbf{Z}$ und $f\colon [m,\infty[\to \mathbf{R}_+$ eine monoton fallende Funktion, so konvergiert $\int_m^\infty f\,dx$ genau dann in $\mathbf{R}$, wenn $\sum_{n=m}^\infty f(n)$ in $\mathbf{R}$ konvergiert.

Mit diesem Kriterium hat man ein einfaches Instrument an der Hand, um erneut die Aufgabe 2 aus Abschnitt 7.9 zu behandeln.

Aufgabe 2 (Wachstum der harmonischen Reihe)**.** In Beispiel 3 in Abschnitt 5.8 haben wir $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty$ bewiesen, in dem wir das Wachstum der Folge der Partialsummen grob abgeschätzt haben. Hier soll nun gezeigt werden, daß das Wachstum demjenigen des natürlichen Logarithmus' entspricht. Dazu definiere man

$$\gamma_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

und beweise mit ähnlichen Methoden wir in Aufgabe 1, daß γ_n eine monoton fallende Folge positiver Zahlen ist mit Grenzwert $\gamma \in \,]0,1[$, die sog. Euler–Mascheronische Konstante. Sie hat den Wert

$$\gamma = 0{,}57721566490\ldots.$$

Definition 2. Seien E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, $a,\, b \in \widehat{\mathbf{R}}$ mit $a < b < \infty$, $f \in R(]a,b]\,,E)$ und $v \in E$. Wir sagen, daß das *uneigentliche Integral* $\int\limits_a^b f\,dx$ gegen v konvergiert, und schreiben $\int\limits_a^b f\,dx = v$, wenn die Funktion $\int_x^b f\,dx\colon\ ]a,b] \to E$ für $t \to a$ gegen v konvergiert. Im Falle $E = \mathbf{R}$ ist auch $v \in \{\infty, -\infty\}$ zugelassen.

Beispiel 2. $\displaystyle\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} 1/(1-\alpha) & \text{für } 0 < \alpha < 1 \text{ und} \\ \infty & \text{für } 1 \le \alpha. \end{cases}$

Das Cauchy- und Majorantenkriterium gelten für die in Definition 2 erklärten uneigentlichen Integrale mutatis mutandis.

Definition 3. Es seien $a,\, b \in \widehat{\mathbf{R}}$ mit $a < b$ und $f \in R(]a,b[\,,E)$. Wir sagen, daß das *uneigentliche Integral* $\int\limits_a^b f\,dx$ in E konvergiert, wenn es ein $c \in \,]a,b[$ gibt, so daß die uneigentlichen Integrale $\int\limits_a^c f\,dx$ und $\int\limits_c^b f\,dx$ konvergieren. Im Falle der Konvergenz setzen wir

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx.$$

Dieser Wert ist von der Wahl von c unabhängig.

Warnung. In Definition 3 bedeutet die Aufspaltung des Integrals $\int\limits_a^b f\,dx$ eine getrennte (voneinander unabhängige) Konvergenzuntersuchung für die untere und obere Integrationsgrenze.

Kapitel 11

Elementare gewöhnliche Differentialgleichungen

Das Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen ist eine natürliche Fortsetzung des Problemes, Stammfunktionen zu bestimmen.

Festsetzung. In diesem Kapitel seien E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, $J \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein nicht entartetes offenes Intervall von $\mathbf{R}$, B eine offene Teilmenge von E, $\xi \in J$, $\eta \in B$ und

$$f\colon J \times B \to E$$

eine *stetige* Funktion.

11.1 Der Begriff der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

Definition. Unter einer *Lösung* der *gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$y' = f(x, y)$$

erster Ordnung verstehen wir jede auf einem nicht entarteten Intervall $I \subseteq J$ definierte, differenzierbare Funktion $y\colon I \to E$ mit $y(I) \subseteq B$, für die

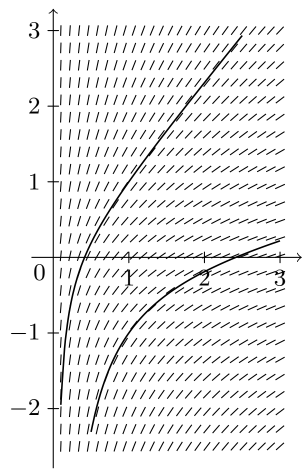
$$\forall t \in I\colon y'(t) = f(t, y(t)).$$

Wegen der geforderten Stetigkeit von f sind die Lösungen dieser Differentialgleichung automatisch stetig differenzierbar. Verlangen wir von einer Lösung y, daß $y(\xi) = \eta$, so sprechen wir von einer *Anfangswertaufgabe* mit Anfangswert $(\xi, \eta) \in J \times B$. Ist $E = \mathbf{R}^n$, so kann die „abstrakte" Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ durch n Gleichungen reellwertiger Funktionen beschrieben werden; in diesem Falle sprechen wir auch von einem *Differentialgleichungssystem* (vgl. auch Abschnitt11.6).

Im folgenden Bild stellen wir die geometrische Bedeutung einer Differentialgleichung im Spezialfall $E = \mathbf{R}$ dar, und zwar am Beispiel der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) := \sqrt{1 + y^2}/x.$$

Die Funktion f gibt an jeder Stelle $(t, v) \in J \times B$ die Steigung der gesuchten Lösungsfunktionen vor. Diese Steigungen sind im Bild durch angedeutete Tangenten dargestellt; in dieses *Richtungsfeld* sind die beiden Lösungen zu den Anfangswerten $y(1) = 1$ und $y(1) = -1$ eingezeichnet. Wie im Bild zu sehen, schmiegen sich diese Lösungen an das Richtungsfeld.



Beispiele.

(a) Die Funktionen $y = ce^{\lambda x}$ mit λ, $c \in \mathbf{R}$ sind Lösungen der Differentialgleichung $y' = \lambda y$.

(b) Die Funktion $y = \tan|]-\pi/2, \pi/2[$ ist „die“ Lösung der Anfangswertaufgabe mit der Differentialgleichung $y' = 1 + y^2$ und der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

(c) Die $\mathbf{R}^2$-wertige Funktion

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix}$$

ist Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot y$$

— wir können auch sagen: des Differentialgleichungssystemes

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1. \end{aligned}$$

Aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist eine Funktion $y\colon I \to E$ mit $\xi \in I$ genau dann eine Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$ mit $f(\xi) = \eta$, wenn y eine stetige Funktion ist und der *Integralgleichung*

$$y = \eta + \int_\xi^x f(t, y(t))\, dt$$

genügt. Definieren wir auf der Menge W der stetigen Funktionen $y\colon I \to E$ mit $y(I) \subseteq B$ den *Integraloperator*

$$T\colon W \to C(I, E), y \mapsto \left(T(y)\colon I \to E, t \mapsto \eta + \int_\xi^t f(t, y(t))\, dt\right),$$

so sehen wir, daß dem Auffinden einer Lösung der obigen Anfangswertaufgabe genau die Bestimmung eines Fixpunktes des Integraloperators T entspricht. Tatsächlich gelingt es unter Benutzung des Banachschen Fixpunktsatzes den im folgenden Abschnitt beschriebenen Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu beweisen.

Aufgabe. Unter einer *autonomen* oder *zeitunabhängigen* Differentialgleichung verstehen wir eine Differentialgleichung $y' = g(y)$ mit einer Funktion $g\colon B \to E$. Um diese Differentialgleichung unter den allgemeinen Typ einzuordnen, definieren wir $J = \mathbf{R}$ und $f(t, v) = g(v)$. Man zeige:

Ist $y\colon I \to E$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(y)$, so ist für jedes $a \in \mathbf{R}$ die Funktion $y_a := y(x - a)$ ebenfalls eine Lösung dieser Differentialgleichung. Gilt außerdem $-v \in B$ und $g(-v) = g(v)$ für alle $v \in B$, so ist ebenfalls $\tilde{y} := -y(-x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung.

11.2 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf

Definition. Wir sagen, daß eine Funktion $f\colon J \times B \to E$ eine *lokale Lipschitzbedingung* (in der zweiten Variablen) erfüllt, wenn es zu jedem Punkt $(t^*, v^*) \in J \times B$ ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ und eine *Lipschitzkonstante* $L \in \mathbf{R}_+$ gibt, so daß

$$\forall t \in J\, \forall v_1, v_2 \in B\colon \Big(|t - t^*| < \varepsilon \wedge \|v_1 - v^*\| < \varepsilon \wedge \|v_2 - v^*\| < \varepsilon \\ \implies \|f(t, v_1) - f(t, v_2)\| \leq L \cdot \|v_1 - v_2\|\Big).$$

Kommentar 1. Ist im Falle $E = \mathbf{R}$ die Funktion f partiell nach der zweiten Variablen differenzierbar und ist diese partielle Ableitung stetig (vgl. Abschnitt 8.11), so erfüllt f nach dem Theorem über die Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen aus Abschnitt 6.15 eine lokale Lipschitzbedingung.

In Kapitel 13 werden wir sehen, daß dieselbe Argumentation für beliebige Banachräume E gilt.

Theorem. Ist $f\colon J\times B\to E$ stetig und erfüllt f auf $J\times B$ eine lokale Lipschitzbedingung, so besitzt die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x,y) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta$$

genau eine Lösung $y_0\colon I_0 \to E$, die im folgenden Sinne eindeutig und maximal ist: Ist $y\colon I \to E$ eine weitere Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$, für welche ein $t \in I_0 \cap I$ mit $y(t) = y_0(t)$ existiert, so ist $I \subseteq I_0$ und $y = y_0|I$.

Das Intervall I_0 ist ein offenes Teilintervall von J.

Beweis.

1. Schritt. Wir zeigen zunächst: Zu jedem Paar $(\xi,\eta) \in J \times B$ gibt es Zahlen δ, $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $B_\delta(\xi) = [\xi-\delta, \xi+\delta] \subseteq J$ und $B_\varepsilon(\eta) \subseteq B$, so daß für alle folgenkompakten Intervalle I mit $\xi \in I \subseteq B_\delta(\xi)$ genau eine Lösung der Form $y\colon I \to B$ mit $y(\xi) = \eta$ und $y(I) \subseteq B_\varepsilon(\eta)$ existiert.

Dazu wählen wir gemäß Voraussetzung an f ein $\tilde\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ geeignet, so daß $U_{\tilde\varepsilon}(\xi) \subseteq J$, $U_{\tilde\varepsilon}(\eta) \subseteq B$ und ein $L \in \mathbf{R}_+$ mit

$$\forall t \in U_{\tilde\varepsilon}(\xi)\, \forall v_1, v_2 \in U_{\tilde\varepsilon}(\eta)\colon\ \|f(t,v_1) - f(t,v_2)\| \le L \cdot \|v_1 - v_2\|$$

existiert.

Wir setzen $\varepsilon := \tilde\varepsilon/2$. Die Funktion $\|\cdot\| \circ f|B_\varepsilon(\xi) \times \{\eta\}$ ist eine auf einer folgenkompakten Menge definierte stetige Funktion, und nimmt daher ihr Maximum $C \in [0,\infty[$ an. Für alle $(t,v) \in B_\varepsilon(\xi) \times B_\varepsilon(\eta)$ gilt dann

$$\|f(t,v)\| \le \|f(t,\eta)\| + \|f(t,v) - f(t,\eta)\| \le C + L\cdot\|v-\eta\| \le C + L\cdot\varepsilon =: M.$$

Wir setzen dann $\delta := \min\{\varepsilon, \varepsilon/M\}$.

Wir versehen den Vektorraum $C(I,E)$ der stetigen Funktionen mit der Norm

$$\|f\|_L := \left\| e^{-L|x-\xi|}\cdot f \right\|_\infty, \quad f \in C(I,E).$$

Da

$$\forall f \in C(I,E)\colon e^{-L\delta}\cdot\|f\|_\infty \le \|f\|_L \le \|f\|_\infty\,,$$

sind die Normen $\|\cdot\|_L$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent. Da $C(I,E)$ mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist, folgt, daß $C(I,E)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_L$ ebenfalls ein Banachraum, also vollständig ist. Außerdem ist

$$W := \{y \in C(I,E) \mid y(I) \subseteq B_\varepsilon(\eta)\}$$

dann auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_L$ ein abgeschlossener Teilraum von $C(I,E)$ und damit ebenfalls vollständig (als metrischer Raum).

Wir definieren den Integraloperator

$$T\colon W \to C(I,E), y \mapsto \eta + \int_\xi^x f(x,y)\,dx$$

und behaupten, daß $T(W) \subseteq W$. Dazu seien $y \in W$ und $t \in I$. Dann gilt

$$\|T(y)(t) - \eta\| = \left\| \int_\xi^t f(x,y)\,dx \right\| \le M\cdot|t-\xi| \le M\cdot\delta \le \varepsilon,$$

also $T(y)(I) \subseteq B_\varepsilon(\eta)$ und damit $T(W) \subseteq W$.

Nach den Überlegungen in Abschnitt 11.1 bleibt für die Behauptung im 1. Schritt zu zeigen, daß $T\colon W \to W$ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Dies wollen wir mit dem Banachschen Fixpunktsatz zeigen, den wir anwenden können, da W vollständig ist. Dazu müssen wir lediglich überprüfen, daß T eine kontrahierende Abbildung (bzgl. der durch $\|\cdot\|_L$ induzierten Metrik) ist. Seien also y_1, $y_2 \in W$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|T(y_1) - T(y_2)\|_L &= \left\| \int_\xi^x (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))\, ds \right\|_L \\
&= \sup_{t \in I} \left(e^{-L|t-\xi|} \left\| \int_\xi^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))\, ds \right\| \right) \\
&\leq L \cdot \sup_{t \in I} \left(e^{-L|t-\xi|} \int_\xi^t \|y_1(s) - y_2(s)\|\, ds \right) \\
&= L \cdot \sup_{t \in I} \left(e^{-L|t-\xi|} \int_\xi^t e^{L|s-\xi|} \left\| e^{-L|s-\xi|}(y_1(s) - y_2(s)) \right\| ds \right) \\
&\leq L \cdot \|y_1 - y_2\|_L \cdot \sup_{t \in I} \left(e^{-L|t-\xi|} \int_\xi^t e^{L|s-\xi|}\, ds \right) \\
&= \|y_1 - y_2\|_L \cdot \sup_{t \in I} \left(e^{-L|t-\xi|} \left(e^{L|t-\xi|} - 1 \right) \right) \\
&\leq \left(1 - e^{-L\delta}\right) \cdot \|y_1 - y_2\|_L\,;
\end{aligned}$$

es handelt sich also in der Tat um eine kontrahierende Abbildung, und zwar mit Kontraktionsfaktor $1 - e^{-L\delta} < 1$.

2. Schritt. Wir zeigen als nächstes: Sind y_1, $y_2\colon I \to B$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, für die ein $t_0 \in I$ mit $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ existiert, so folgt schon $y_1 \equiv y_2$. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f\colon I \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } y_1(t) = y_2(t) \text{ und} \\ 0 & \text{für } y_1(t) \neq y_2(t). \end{cases}$$

Es ist offensichtlich $f(I) \subseteq \{0, 1\}$. Da y_1 und y_2 stetig sind, ist die Menge $f^{-1}(\{0\})$ in I offen.

Ist wiederum $t \in f^{-1}(\{1\})$, also $v := y_1(t) = y_2(t)$, so existiert nach dem ersten Schritt in einer kleinen Umgebung von $(\xi, \eta) := (t, v)$ eine eindeutige Lösung, das heißt, wir finden ein geeignetes $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $y_1|U_\delta(t) \cap I = y_2|U_\delta(t) \cap I$. Damit ist auch die Menge $f^{-1}(\{1\})$ in I offen.

Es folgt, daß f stetig ist. Aufgrund der Intervalltreue stetiger Funktionen ist damit $f(I) \subseteq \{0, 1\}$ ein Intervall. Wegen $t_0 \in I$, also $1 \in f(I)$, bleibt nur $f(I) = \{1\}$, also $y_1 \equiv y_2$.

3. Schritt Wir betrachten schließlich das System $\mathfrak{Y}$ aller Paare (I, y), wobei $I \subseteq J$ ein Intervall mit $\xi \in I$ ist und $y\colon I \to B$ die (nach dem 2. Schritt auf I eindeutige) Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$ mit $y(\xi) = \eta$ ist.

Setzen wir dann $I_0 := \bigcup_{(I,y) \in \mathfrak{Y}} I$ und $y_0 := \bigcup_{(I,y) \in \mathfrak{Y}} y$, so ist $y_0\colon I_0 \to E$ offensichtlich die gesuchte eindeutige maximale Lösung.

Daß I_0 offen in J ist folgt wie im 2. Schritt wieder aus der lokalen Existenz, die im 1. Schritt bewiesen wurde. □

Kommentar 2. Ist E endlich-dimensional, so besagt der *Existenzsatz von Peano*, daß alleine aus der Stetigkeit von f die Existenz lokaler Lösungen $y\colon U_\varepsilon(\xi) \to E$ mit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ geeignet der Anfangswertaufgabe (11.2) folgt. Falls f keiner lokalen Lipschitzbedingung genügt, müssen diese jedoch nicht eindeutig sein, wie das Beispiel der Anfangswertaufgabe

$$y' = \sqrt{|y|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$$

(vgl. die Aufgabe in Abschnitt 11.3) zeigt.

Im Falle, daß E ein beliebiger Banachraum ist, bleibt der Existenzsatz von Peano richtig, wenn außerdem angenommen wird, daß f *kompakt* ist, d. h. in diesem Falle, daß die Bildfolge unter f einer jeden beschränkten Folge in $J \times B$ eine konvergente Teilfolge in E besitzt.

11.3 Trennung der Variablen

Theorem. Es seien $E = \mathbf{R}$, B ein offenes Intervall von $\mathbf{R}$. Weiterhin seien Funktionen $f\colon J \to \mathbf{R}$ und $g\colon B \to \mathbf{R}$ gegeben.

(a) Ist $g(\eta) = 0$, so ist die konstante Funktion $y \equiv \eta$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta. \tag{1}$$

(b) Ist g nullstellenfrei und hat g überall das gleiche Vorzeichen und besitzt f eine Stammfunktion F und $1/g$ eine Stammfunktion G, wobei wir $F(\xi) = G(\eta) = 0$ annehmen, und ist I das maximale Intervall mit $\xi \in I$, welches in $F^{-1}(G(B))$ liegt, so besitzt G eine Umkehrfunktion $\check{G}$, und die Funktion

$$y = \check{G} \circ F|I$$

ist eine — und über I die einzige — Lösung der Anfangswertaufgabe (1).

Aufgabe. Man bestimme alle Lösungen $y\colon I \to \mathbf{R}$ der Anfangswertaufgabe

$$y' = \sqrt{|y|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0.$$

11.4 Die lineare Differentialgleichung $y' = ay + b$

Theorem. Es seien $B = E = \mathbf{R}$ (für die allgemeine Theorie vgl. Abschnitte 11.10–11.12). Weiter seien a, $b\colon J \to \mathbf{R}$ stetige Funktionen und $A\colon J \to \mathbf{R}$ eine Stammfunktion von a. Dann gilt:

(a) Die Funktionen

$$y_c := c \cdot (\exp \circ A)\colon J \to \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbf{R}$$

beschreiben die *Gesamtheit* aller auf J definierten Lösungen der *homogenen linearen Differentialgleichung*

$$y' = ay.$$

(b) Ist $\tilde{y}\colon J \to \mathbf{R}$ eine spezielle Lösung der *inhomogenen linearen Differentialgleichung*

$$y' = ay + b, \tag{1}$$

so beschreiben die Funktionen

$$\tilde{y}_c := \tilde{y} + y_c \quad \text{mit} \quad y_c := c \cdot (\exp \circ A)\colon J \to \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$$

die Gesamtheit aller auf J definierten Lösungen dieser Differentialgleichung.

(c) Wir erhalten eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1) durch „Ansatz"

$$\tilde{y} = c \cdot (\exp \circ A),$$

wobei $c\colon J \to \mathbf{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist („Variation der Konstanten"). Dadurch finden wir, daß $\tilde{y}$ genau dann eine Lösung ist, wenn c eine Stammfunktion von $b \cdot (\exp \circ (-A))$ ist.

Kommentar. Wie wir sehen, besitzt die Anfangswertaufgabe $y' = ay + b$ mit $y(\xi) = \eta$ für jedes Paar $(\xi, \eta) \in J \times \mathbf{R}$ genau eine *globale* Lösung $y\colon J \to \mathbf{R}$.

11.5 Numerische Berechnung von Lösungen

Da bereits das Problem, Stammfunktionen explizit anzugeben, häufig daran scheitert, daß diese nicht durch elementare Funktionen beschrieben werden können, tritt dieses Problem erst recht beim Lösen von Differentialgleichungen auf.

In diesem Falle sind wir auf numerische Lösungsmethoden angewiesen, etwa die Einschrittverfahren, die in folgendem Theorem beschrieben werden:

Theorem. Erfülle die stetige Funktion $f\colon J \times B \to E$ eine lokale Lipschitzbedingung (in der zweiten Variablen), so daß der Picard–Lindelöfsche Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta$$

anwendbar ist. Sei $y\colon I_0 \to B$ ihre maximale Lösung.

Weiter sei $\varphi\colon D \to E$ eine auf einer offenen Teilmenge D von $I_0 \times B \times \mathbf{R}$ definierte stetige Funktion, die in der zweiten Variablen eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt, und für die

$$\forall t \in J\colon (t, y(t), 0) \in D \wedge \varphi(t, y(t), 0) = y'(t)$$

gilt. (Es sei beachtet, daß $y'(t) = f(t, y(t))$.)

Wir definieren dann eine Folge $(y_n)_{n \geq 0}$ von Funktionen $y_n\colon I_n \to B$ rekursiv durch

$$y_0 := \eta$$

und

$$y_n := y_{n-1}(x-h) + h\varphi(x-h, y_{n-1}(x-h), h) \quad \text{mit} \quad h := (x-\xi)/n.$$

Für jede folgenkompakte Teilmenge $K \subseteq I_0$ existiert dann ein $n_0 \in \mathbf{N}_0$, so daß $K \subseteq I_n$ für alle $n \geq n_0$, und die Folge $(y_n|K)_{n\geq n_0}$ konvergiert gleichmäßig gegen $y|K$.

Für jedes $t \in I_0$ konvergiert damit insbesondere die Folge der Werte $y_n(t)$ gegen $y(t)$.

In den Beweis des Theorems geht folgendes Lemma ein.

Lemma (Diskretes Grönwall-Lemma)**.** Seien $n \in \mathbf{N}_0$, $L \in [0, \infty[$, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in [0, \infty[$ und $b \geq 0$. Für Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in [0, \infty[$ mit

$$\forall k = 1, \ldots, n \colon a_k \leq (1 + L\tau_k)a_{k-1} + \tau_k b$$

gilt dann

$$\forall k = 0, \ldots, n \colon a_k \leq \frac{e^{Lt_k} - 1}{L} \cdot b + e^{Lt_k} a_0 \quad \text{mit} \quad t_k := \sum_{i=1}^{k} \tau_i.$$

(Im Falle von $L = 0$ müssen wir den Term $\exp(Lt_k - 1)/L$ durch den Grenzwert $\lim\limits_{L\to 0} \exp(Lt_k - 1)/L = t_k$ ersetzen.)

Beweis des Lemmas. Wir führen den Beweis per Induktion über n. Im Falle von $n = 0$ ist wegen $t_0 = 0$ und damit $e^{Lt_0} = 1$ die Behauptung klar.

Sei die Behauptung also für ein $n \in \mathbf{N}_0$ bewiesen. Wir wollen die Behauptung für $n + 1$ zu zeigen. Unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\leq (1 + L\tau_{n+1})a_n + \tau_{n+1} b \\
&\leq (1 + L\tau_{n+1})\Big(\frac{e^{Lt_n} - 1}{L} \cdot b + e^{Lt_n} a_0\Big) + \tau_{n+1} b \\
&= \frac{(1 + L\tau_{n+1})e^{Lt_n} - 1}{L} \cdot b + (1 + L\tau_{n+1})e^{Lt_n} a_0 \\
&\leq \frac{e^{L\tau_{n+1}} e^{Lt_n} - 1}{L} \cdot b + e^{L\tau_{n+1}} e^{Lt_n} a_0 \\
&= \frac{e^{Lt_{n+1}} - 1}{L} \cdot b + e^{Lt_{n+1}} a_0,
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß $1 + x \leq e^x$. □

Beweis des Theorems. Wir können ohne Einschränkung davon ausgehen, daß K ein kompaktes Intervall mit $\xi \in K$ ist (ansonsten können wir K durch $K \cup \{\xi\}$ und dann durch $[\inf K, \sup K]$ ersetzen).

Da K kompakt und y stetig ist, existiert nach dem Tubenlemma aus Abschnitt 12.9 ein $\rho \in \mathbf{R}_+$ mit

$$\forall t \in K \colon B_\rho(y(t)) \subseteq B$$

und

$$\forall t \in K \colon \{t\} \times B_\rho(y(t)) \times B_\rho(0) \subseteq D.$$

Aus der lokalen Lipschitzbedingung (in der zweiten Variablen) für φ und der Kompaktheit von $K \times B_\rho(0)$ können wir, indem wir $\rho \in \mathbf{R}_+$ geeignet verkleinern, annehmen, daß eine Lipschitzkonstante $L \in [0, \infty[$ mit

$$\forall t \in K \, \forall h \in B_\rho(0) \, \forall v_1, v_2 \in B_\rho(y(t))\colon \ \|\varphi(t, v_1, h) - \varphi(t, v_2, h)\| \leq L \cdot \|v_1 - v_2\|$$

existiert. Da K als kompakte Menge beschränkt ist, existiert ein $\Delta \in [0, \infty[$ mit $K \subseteq [\xi - \Delta, \xi + \Delta]$.

Sei $\varepsilon \in \,]0, \rho]$ vorgegeben. Setze

$$b \coloneqq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{L}{e^{L\Delta} - 1}.$$

Da $\exp(Lx - 1)/x|[0, \infty[$ monoton wachsend ist, folgt

$$\forall t \in K \subseteq [\xi - \Delta, \xi + \Delta]\colon \ \frac{e^{L|t-\xi|} - 1}{L} \cdot b \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \leq \rho.$$

Da $K \times B_\rho(0)$ kompakt ist und die Funktion $(t, h) \mapsto (t, y(t), h)$ auf dieser Teilmenge daher gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta_\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, so daß

$$\forall t_1, t_2 \in K \, \forall h \in B_\rho(0)\colon \ \big(|t_2 - t_1| \leq \delta_\varepsilon \implies \|\varphi(t_2, y(t_2), h) - y'(t_1)\| \leq b\big).$$

Sei $\tau \in [0, \tau_\varepsilon]$ mit $\tau_\varepsilon \coloneqq \min\{\rho, \delta_\varepsilon\}$. Dann setzen wir $K_n \coloneqq \{t \in K \mid |t - \xi| \leq n \cdot \tau\}$, behaupten $K_n \subseteq I_n$ und

$$a_n \coloneqq \sup_{t \in K_n} \|y_n(t) - y(t)\| \leq \frac{e^{Ln\tau} - 1}{L} \cdot b$$

für alle $n \in \mathbf{N}_0$ mit $n \cdot \tau \leq \Delta$.

Für $n = 0$ sind $K_0 = \{\xi\}$ und $a_0 = 0$, und die Behauptung ist klar. Angenommen, die Behauptung stimmt für ein $n \in \mathbf{N}_0$ und alle kleineren. Wir zeigen, daß sie dann auch für $n + 1$ stimmt. Nach Induktionsvoraussetzung ist y_n auf K_n definiert, und es ist außerdem $a_n < \varepsilon \leq \rho$. Nach Definition von y_{n+1} folgt daraus, daß $K_{n+1} \subseteq I_{n+1}$. Es bleibt, die Abschätzung für a_{n+1} zu zeigen:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sup_{t \in K_{n+1}} \|y_{n+1}(t) - y(t)\| \\
&= \sup_{t \in K_{n+1}} \left\| y_n(t - h) + h\varphi(t - h, y_n(t - h), h) - y(t - h) - \int_{t-h}^{t} y'(s)\, ds \right\| \\
&\leq a_n + \sup_{t \in K_{n+1}} \left| \int_{t-h}^{t} \|\varphi(t - h, y_n(t - h), h) - y'(s)\| \, ds \right| \\
&\leq (1 + L\tau)a_n + \sup_{t \in K_{n+1}} \left| \int_{t-h}^{t} \|\varphi(t - h, y(t - h), h) - y'(s)\| \, ds \right| \\
&\leq (1 + L\tau)a_n + \tau \cdot b,
\end{aligned}$$

wobei wir $h \coloneqq (t - \xi)/(n + 1)$ gesetzt haben. (Es sei beachtet, daß $|h| \leq \tau$ für alle $t \in K_{n+1}$.) Mit dem Grönwallschen Lemma folgt dann die behauptete Ungleichung für a_{n+1}.

Wir wählen dann ein $n_0 \in \mathbf{N}_1$, so daß $n_0 \cdot \tau_\rho \geq \Delta$. Für $n \geq n_0$ und $\tau \coloneqq \frac{\Delta}{n} \leq \tau_\rho$ sehen wir dann, daß $K = K_n \subseteq I_n$.

Es bleibt zu zeigen, daß $(y_n|K)_{n \geq n_0}$ gleichmäßig gegen $y|K$ konvergiert. Zu vorgegebenem $\varepsilon \in \,]0, \rho]$ existiert ein $n_1 \geq n_0$ mit $n_1 \cdot \tau_\varepsilon \geq \Delta$. Für $n \geq n_1$ gilt dann mit $\tau \coloneqq \frac{\Delta}{n} \leq \tau_\varepsilon$, daß

$$\|(y_n - y)|K\|_\infty \leq a_n < \varepsilon. \qquad \square$$

Die Einschrittverfahren unterscheiden sich in der Wahl der Funktion φ. Das einfachste Verfahren ist das *Euler-Verfahren* mit der Wahl

$$\varphi\colon J \times B \times \mathbf{R} \to E, (t, v, h) \mapsto f(t, v).$$

In der Regel wesentlich bessere Ergebnisse lassen sich mit dem *(klassischen) Runge–Kutta-Verfahren* gewinnen. In diesem Verfahren wird die Funktion $\varphi\colon D \to E$ durch

$$\varphi(t, v, h) := \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &:= f(t, v), \\ k_2 &:= f(t + h/2, v + k_1 \cdot h/2), \\ k_3 &:= f(t + h/2, v + k_2 \cdot h/2), \\ k_4 &:= f(t + h, v + k_3 \cdot h) \end{aligned}$$

definiert, wobei D die maximale Definitionsmenge der rechten Seite ist.

Im Spezialfall, daß $f(x, y) = g(x)$ für eine Funktion $g\colon J \to B$, entspricht dem Lösen der Anfangswertaufgabe

$$y' = g(x) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta$$

das Auffinden des Integrals $\eta + \int\limits_{\xi}^{x} g\,dx$. In diesem Falle geht das Runge–Kutta-Verfahren in die Simpsonsche Regel aus Abschnitt 8.10 über.

Die folgende Scheme-Prozedur berechnet im Falle $E = \mathbf{R}$ die Werte $y_n(\xi + T)$ zu gegebener Funktion f, Anfangsbedingung (ξ, η) und $T \geq 0$:

```
(define (runge-kutta f xi eta T n)
  (define (phi t y h)
    (let* ((k1 (f t y))
           (k2 (f (+ t (* 1/2 h)) (+ y (* 1/2 k1 h))))
           (k3 (f (+ t (* 1/2 h)) (+ y (* 1/2 k2 h))))
           (k4 (f (+ t h) (+ y (* k3 h)))))
      (* 1/6 (+ k1 (* 2 k2) (* 2 k3) k4))))
  (let ((h (/ T n)))
    (let loop ((k n)
               (t xi)
               (y eta))
      (if (zero? k)
          y
          (loop (- k 1)
                (+ t h)
                (+ y (* h (phi t y h))))))))
```

Der folgende Ausdruck etwa liefert approximativ den Wert $y(1)$ der eindeutigen maximalen Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = \sin(xy)$ mit $y(0) = 1$:

```
(runge-kutta (lambda (x y) (sin (* x y)))
             0
             1
             1
             30)
```

11.6 Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Hier sei $E = \mathbf{K}^n$. Dann kann die Funktion f durch n Funktionen $f_k\colon J \times B \to \mathbf{K}$ vermittels

$$f = (f_1, \ldots, f_n)\colon J \times B \to \mathbf{K}^n$$

beschrieben werden. Desgleichen kann jede Funktion $y\colon I \to \mathbf{K}^n$ mit $I \subseteq J$ und $y(I) \subseteq B$ durch n Funktionen $y_k\colon I \to \mathbf{K}$ vermittels

$$y = (y_1, \ldots, y_n)\colon I \to \mathbf{K}^n$$

beschrieben werden. Setzen wir weiterhin $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, so ist $y\colon I \to \mathbf{K}^n$ offenbar genau dann eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta,$$

wenn für alle $t \in I$ und $k = 1, \ldots, n$ gilt, daß

$$y_k'(t) = f_k(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \quad \text{und} \quad y_k(\xi) = \eta_k$$

Da bei dieser Darstellung also n Gleichungen von dem n-Tupel $(y_1, \ldots, y_n)$ von Funktionen erfüllt werden müssen, sprechen wir auch von einem *Differentialgleichungssystem (erster) Ordnung*.

Das Runge–Kutta-Verfahren aus Abschnitt11.5 läßt sich in diesem Falle durch folgende Scheme-Programm beschreiben, wobei die Funktion f und der Anfangswert η Scheme-Vektoren sind:

```
(define (runge-kutta f xi eta T n)
  (let ((h (/ T n)))
    (define *h (scale-vector h))
    (define (phi t y)
      (define *2 (scale-vector 2))
      (define *1/2 (scale-vector 1/2))
      (define *1/6 (scale-vector 1/6))
      (let* ((k1 (f t
                    y))
             (k2 (f (+ t (* 1/2 h))
                    (add-vectors y (*1/2 (*h k1)))))
             (k3 (f (+ t (* 1/2 h))
                    (add-vectors y (*1/2 (*h k2)))))
             (k4 (f (+ t h)
                    (add-vectors y (*h k3)))))
```

```
        (*1/6 (add-vectors k1 (*2 k2) (*2 k3) k4))))
    (let loop ((k n)
               (t xi)
               (y eta))
      (if (zero? k)
          y
          (loop (- k 1)
                (+ t h)
                (add-vectors y (*h (phi t y))))))))

(define (elementwise f)
  (lambda vectors
    (generate-vector (vector-length (car vectors))
      (lambda (i)
        (apply f (map (lambda (v) (vector-ref v i)) vectors))))))

(define (generate-vector size proc)
  (do ((ans (make-vector size))
       (i 0 (+ i 1)))
      ((= i size) ans)
    (vector-set! ans i (proc i))))

(define add-vectors (elementwise +))

(define (scale-vector s)
  (elementwise (lambda (x) (* x s))))
```

11.7 Der normierte Vektorraum $L(E, F)$

Hier seien E, E' und F jeweils normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume.

Definition. Mit $\mathrm{L}(E, F)$ bezeichnen wir den Untervektorraum aller stetigen, $\mathbf{K}$-linearen Abbildungen $E \to F$ des $\mathbf{K}$-Vektorraumes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(E, F)$ aller $\mathbf{K}$-linearen Abbildungen $E \to F$.

Wie wir aus Abschnitt 5.3 wissen, ist eine lineare Abbildung $A\colon E \to F$ genau dann stetig, wenn es eine Zahl $M \in [0, \infty[$ gibt, so daß

$$\forall v \in E\colon\ \|Av\| \leq M \cdot \|v\|\,. \tag{$*$}$$

Weiterhin wissen wir, daß für jedes $A \in \mathrm{L}(E, F)$ die kleinste Konstante M, welche $(*)$ erfüllt, die Zahl

$$\|A\| := \sup\{\|Av\| \mid \|v\| \leq 1\}$$

ist.

Theorem.

(a) Die Funktion $\mathrm{L}(E, F) \to \mathbf{R}, A \mapsto \|A\|$ ist eine Norm.

Im folgenden wird der Vektorraum $\mathrm{L}(E, F)$ stets in diesem Sinne als normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum betrachtet.

(b) Die Abbildung

$$\mathrm{L}(E, F) \times E \to F, (A, v) \mapsto Av$$

ist stetig und bilinear (vgl. Abschnitt 5.4); sie ist also ein verallgemeinertes Produkt.

(c) Sind $A_1 \in \mathrm{L}(E, E')$ und $A_2 \in \mathrm{L}(E', F)$, so ist $A_2 \circ A_1 \in \mathrm{L}(E, F)$ und

$$\|A_2 \circ A_1\| \leq \|A_2\| \cdot \|A_1\|\,;$$

daher ist

$$\mathrm{L}(E, E') \times \mathrm{L}(E', F) \to \mathrm{L}(E, F), (A_1, A_2) \mapsto A_2 \circ A_1$$

eine stetige bilineare Abbildung; sie ist also ein weiteres verallgemeinertes Produkt.

(d) Ist F ein Banachraum, so ist auch $\mathrm{L}(E, F)$ ein Banachraum.

Kommentar. Im nächsten Kapitel werden wir beweisen, daß $\mathrm{L}(E, F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(E, F)$, wann immer E endlich-dimensional ist.

Aufgabe (Spezielle Normen auf $\mathrm{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$)**.** Es seien n, $m \in \mathbf{N}_0$, $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$ und (a_{ik}) diejenige $(m \times n)$-Matrix, welche A bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbf{K}^n$ und $\mathbf{K}^m$ beschreibt. Auf dem $\mathbf{K}^n$ bzw. $\mathbf{K}^m$ betrachten wir die Normen

$$\|v\|_1 := \sum |v_k| \quad \text{und} \quad \|v\|_\infty := \max\{|v_k|\}.$$

Mit $\|A\|_1$ bzw. $\|A\|_\infty$ bezeichnen wir die in (a) im Theorem auf $\mathrm{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$ eingeführten Normen, und zwar jeweils bezüglich der korrespondierenden Normen des $\mathbf{K}^n$ bzw. $\mathbf{K}^m$. Hierfür gilt dann:

$$\|A\|_1 = \max\left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| \;\middle|\; k = 1, \dots, n \right\}$$

und

$$\|A\|_\infty = \max\left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \;\middle|\; i = 1, \dots, m \right\}.$$

(Deswegen heißt $\|A\|_1$ auch die *Spaltensummen-* und $\|A\|_\infty$ die *Zeilensummennorm* von A.)

11.8 Die Banachalgebra $L(E,E)$

Es sei E wieder ein $\mathbf{K}$-Banachraum. Dann ist nach Abschnitt 11.7 auch $\mathrm{L}(E,E)$ ein $\mathbf{K}$-Banachraum und

$$\forall A_1, A_2 \in \mathrm{L}(E,E)\colon A_1 \circ A_2 \in \mathrm{L}(E,E) \quad \text{und} \quad \|A_1 \circ A_2\| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\|\,.$$

Damit ist durch die Komposition auf $\mathrm{L}(E,E)$ eine stetige Multiplikation definiert. Diese Multiplikation besitzt ein neutrales Element, nämlich $1_E := \mathrm{id}_E$. Es gilt $\|1_E\| \leq 1$ und $\|1_E\| = 1$, wenn $\dim E > 0$. Definieren wir rekursiv

$$A^0 := 1_E \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbf{N}_0\colon A^{n+1} := A \circ A^n,$$

so gilt

$$\forall A \in \mathrm{L}(E,E)\, \forall n \in \mathbf{N}_0\colon\ \|A^n\| \leq \|A\|^n\,.$$

Definition. Die Elemente der *Banachalgebra* $\mathrm{L}(E,E)$ heißen *beschränkte lineare Operatoren* auf E.

Proposition. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_n \in \mathbf{K}$ und Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot A^n$$

für jedes Element $A \in \mathrm{L}(E,E)$ mit $\|A\| < \rho$ gegen ein Element in $\mathrm{L}(E,E)$, welches wir in suggestiver Weise mit $f(A)$ bezeichnen.

Bezeichnen wir mit $U_\rho^{\mathrm{L}(E,E)}(0)$ die ρ-Umgebung um 0 in dem Banachraum $\mathrm{L}(E,E)$, so ist

$$U_\rho^{\mathrm{L}(E,E)}(0) \to \mathrm{L}(E,E), A \mapsto f(A)$$

eine stetige Funktion.

Zum Beispiel ist auf diese Weise $\exp(A)$ für alle $A \in \mathrm{L}(E,E)$ definiert.

Aufgabe. Es seien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_n \in \mathbf{K}$ und Konvergenzradius $\rho > 0$ und $A \in \mathrm{L}(E,E)$ ein Operator mit $\|A\| < \rho$.

(a) Ist $\Phi\colon \mathrm{L}(E,E) \to F$ eine stetige lineare Abbildung in einen weiteren Banachraum F, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \Phi(A^n)$$

in F gegen $\Phi(f(A))$. Insbesondere konvergieren daher (?) für jeden Vektor $v \in E$ und für jeden Operator $C \in \mathrm{L}(E,E)$ die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (A^n(v)), \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (C \circ A^n) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (A^n \circ C)$$

gegen $f(A)(v)$ bzw. $C \circ f(A)$ bzw. $f(A) \circ C$.

(b) Ist $C \in \mathrm{L}(E,E)$ ein Operator, der mit A kommutiert, d. h. $A \circ C = C \circ A$, so gilt auch $C \circ f(A) = f(A) \circ C$.

(c) Ist $C \in \mathrm{GL}(E)$ (vgl. Abschnitt 11.9), und gilt auch $\|C \circ A \circ C^{-1}\| < \rho$, so ist

$$f(C \circ A \circ C^{-1}) = C \circ f(A) \circ C^{-1}.$$

11.9 Die Gruppe GL(E) der invertierbaren Elemente von $L(E,E)$

Definition. Mit $\mathrm{GL}(E)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten linearen Operatoren $A \in \mathrm{L}(E,E)$, die eine Umkehrabbildung $\check{A} \in \mathrm{L}(E,E)$ besitzen.

Mit der Komposition als Multiplikation und mit dem neutralen Element 1_E wird $\mathrm{GL}(E)$ zu einer Gruppe, der *allgemeinen linearen Gruppe* von E. Wie in der Gruppentheorie üblich schreiben wir A^{-1} anstatt $\check{A}$ für alle $A \in \mathrm{GL}(E)$.

Kommentar. Ist $A \in \mathrm{L}(E,E)$ bijektiv, so ist die Umkehrabbildung $\check{A}\colon E \to E$ bekanntlich wieder linear. Nach dem funktionalanalytischen *Satz vom inversen Operator* ist $\check{A}$ auch stetig, also $\check{A} \in L(E,E)$. Daher können wir $\mathrm{GL}(E)$ auch als die Menge aller *bijektiven* Abbildungen $A \in \mathrm{L}(E,E)$ definieren.

Theorem. Es ist $\mathrm{GL}(E)$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{L}(E,E)$, und die Inversenbildung

$$\mathrm{Inv}\colon\ \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GL}(E), A \mapsto A^{-1}$$

ist eine stetige Abbildung.

Aufgabe. Ist E endlich-dimensional, so ist die Gruppe $\mathrm{GL}(E)$ eine *dichte* Teilmenge von $\mathrm{L}(E,E) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(E,E)$ (vgl. Definition 2 aus Abschnitt 4.8).

(Tip: Man verwende das charakteristische Polynom von $A \in \mathrm{L}(E,E)$.)

11.10 Allgemeine lineare Differentialgleichungen

Die Kenntnis des Raumes $\mathrm{L}(E,E)$ und der Gruppe $\mathrm{GL}(E)$ erlaubt es uns, lineare Differentialgleichungssysteme elegant zu formulieren und allgemeine Ergebnisse leicht herzuleiten.

Definition. Es seien $A\colon J \to \mathrm{L}(E,E)$ und $b\colon J \to E$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y' = A(x)y + b, \qquad \text{(L-DGL)}$$

das heißt die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ mit $B = E$ und

$$f\colon J \times E \to E, (t,v) \mapsto A(t)(v) + b(t)$$

die *allgemeine lineare Differentialgleichung.* Ist $b = 0$, so sprechen wir von einer *homogenen* linearen Differentialgleichung, andernfalls von einer *inhomogenen.*

Offensichtlich ist die Funktion f stetig und genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Daher ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard und Lindelöf aus 11.2 auf die allgemeine lineare Differentialgleichung anwendbar.

Ist $E = \mathbf{K}^n$, so können wir die allgemeine lineare Differentialgleichung nach dem Muster aus Abschnitt 11.6 schreiben. Dazu beschreiben wir für jedes $t \in J$ die lineare Abbildung $A(t)\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbf{K}^n$ durch eine $(n \times n)$-Matrix $(a_{ik}(t))$ und den Vektor $b(t) \in \mathbf{K}^n$ durch seine Komponenten in der Form $b(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t))^\top$. Dann ist die i-te Komponente der obigen Funktion f gerade

$$f_i\colon J \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}, (t, v) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)v_k + b_i(t).$$

Daher ist ein n-Tupel $y = (y_1, \ldots, y_n)$ von Funktionen $y_i\colon I \to \mathbf{K}$ genau dann eine Lösung von (L-DGL), wenn

$$\forall t \in I\colon y_i'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)y_k(t) + b_i(t) \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Für allgemeine theoretische Überlegungen ist offensichtlich auch im Falle $E = \mathbf{K}^n$ unsere abstrakte Version von (L-DGL) handlicher als das letzte Differentialgleichungssystem.

Kommentar. Die Funktionen $b\colon J \to \mathbf{K}^n$ und $A\colon J \to \mathrm{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$ sind genau dann stetig, wenn die Komponentenfunktionen $b_i\colon J \to \mathbf{K}$ und $a_{ik}\colon J \to \mathbf{K}$ stetig sind, und zwar — wie wir im nächsten Kapitel sehen werden — unabhängig von der Norm, mit der $\mathbf{K}^n$ oder $\mathbf{K}^m$ versehen worden ist.

11.11 Fundamentallösungen für lineare Differentialgleichungen

Alle theoretischen Aussagen über (L-DGL) werden wir unmittelbar aus den Aussagen über spezielle Lösungen einer $\mathrm{L}(E, E)$-wertigen linearen Differentialgleichung herleiten. Diese behandeln wir zunächst.

Wie in Abschnitt 11.10 sei eine stetige Funktion $A\colon J \to \mathrm{L}(E, E)$ gegeben. Wir wollen Lösungen $Y\colon I \to \mathrm{L}(E, E)$ der homogenen linearen Differentialgleichung

$$Y' = A(x) \circ Y. \tag{F-DGL}$$

Wollen wir diese Differentialgleichung in der allgemeinen Gestalt von Abschnitt 11.1 beschreiben, so haben wir $B = \mathrm{L}(E, E)$ und

$$f\colon J \times L(E, E) \to L(E, E), (t, C) \mapsto A(t) \circ C$$

zu setzen. Offensichtlich ist diese Funktion f stetig und genügt einer lokalen Lipschitzbedingung. Daher ist der Picard–Lindelöfsche Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf (F-DGL) anwendbar.

Proposition. Es sei $Y\colon I \to \mathrm{L}(E,E)$ eine Lösung von (F-DGL). Dann gilt:

(a) Für jedes $v \in E$ ist die Funktion

$$y := Yv\colon I \to E, t \mapsto Y(t)v$$

eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y$.

(b) Für jedes $C \in \mathrm{L}(E,E)$ ist die Funktion

$$\tilde{Y} := Y \circ C\colon I \to \mathrm{L}(E,E), t \mapsto Y(t) \circ C$$

eine weitere Lösung von (F-DGL).

Theorem 1 (Fundamentallösungen für allgemeine lineare Differentialgleichungen)**.** Für jedes $\xi \in J$ ist die maximale Lösung Y_ξ der Anfangswertaufgabe

$$Y' = A(x) \circ Y \quad \text{mit} \quad Y(\xi) = 1_E$$

auf ganz J definiert, und es gilt $Y_\xi(J) \subseteq \mathrm{GL}(E)$.

Die Funktionen $Y_\xi\colon J \to \mathrm{GL}(E)$ nennen wir aufgrund der Ergebnisse des nächsten Abschnittes die *Fundamentallösungen* der linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y + b(x)$ zur Anfangszeit $t = \xi$.

Theorem 2 (Die Einparameter-Untergruppen γ_A)**.** Ist $A \in \mathrm{L}(E,E)$, so ist die Funktion

$$\gamma_A\colon \mathbf{R} \to \mathrm{GL}(E), t \mapsto \exp(tA)$$

beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$\gamma_A(0) = 1_E \quad \text{und} \quad \forall t \in \mathbf{R}\colon \gamma_A'(t) = A \circ \gamma_A(t), \quad \text{insbesondere also} \quad \gamma_A'(0) = A.$$

Daher ist für jedes $\xi \in \mathbf{R}$ die Funktion $\gamma_A(x-\xi)$ die Fundamentallösung Y_ξ für die Differentialgleichung $y' = Ay$ zur Anfangszeit $t = \xi$; folglich ist $\gamma_A(\mathbf{R}) \subseteq \mathrm{GL}(E)$, insbesondere ist

$$\forall A \in \mathrm{L}(E,E)\colon \exp(A) \in \mathrm{GL}(E).$$

In der Literatur findet man diese Differentialgleichung $y' = Ay$ unter dem Stichwort „lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten“.

Beweis. Um die Differenzierbarkeit von γ_A in $a \in \mathbf{R}$ zu beweisen, modifizieren wir den Beweis des Theorems aus 7.5. Für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ und $t \in \mathbf{R}$ ist

$$t^n - a^n = (t-a) \cdot Q_n(t) \quad \text{mit} \quad Q_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} a^j \cdot t^{n-j-1},$$

und daher

$$\gamma_A(t) - \gamma_A(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (t^n - a^n) = (t-a) \cdot h(t)$$

mit

$$a_n := \frac{1}{n!} \cdot A^n \in \mathrm{L}(E,E) \quad \text{und} \quad h\colon \mathbf{R} \to E, t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot Q_n(t).$$

Um die Stetigkeit von h in a zu beweisen, setzen wir $r := 2\,|a|$; dann gilt für alle $n \in \mathbf{N}_1$ und $t \in U_r(0)$, daß

$$|Q_n(t)| \leq nr^{n-1}, \quad \text{also } \|a_n \cdot Q_n(t)\| \leq \|A\| \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \|rA\|^{n-1}.$$

Wegen des Theorems aus 7.1 ist daher $h|U_r(0)$ stetig. Insbesondere ist h in a stetig und somit γ_A in a nach Abschnitt 6.5 differenzierbar.

Weil jeweils $Q_n(a) = na^{n-1}$, erhalten wir weiterhin nach Abschnitt 6.5, daß

$$\gamma_A'(a) = h(a) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n a^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(a \cdot A)^n \cdot A = A \cdot \gamma_A(a). \qquad \square$$

Aufgabe (Über $\exp\colon \mathrm{L}(E,E) \to \mathrm{GL}(E)$)**.**

(a) $\forall A, B \in \mathrm{L}(E,E)\colon (A \circ B = B \circ A \implies \exp(A+B) = \exp(A) \circ \exp(B))$.
(Tipp: $\frac{d}{dt}(\gamma_A(t) \circ \gamma_B(t)) = ?$.)

(b) Für jedes $A \in \mathrm{L}(E,E)$ ist γ_A ein Gruppenhomomorphismus, d. h.

$$\forall t, s \in \mathbf{R}\colon \gamma_A(t+s) = \gamma_A(t) \circ \gamma_A(s).$$

Wir nennen γ_A daher auch eine Einparameter-Untergruppe von $\mathrm{GL}(E)$ und A ihren Erzeuger. (Diese Aussage ist in der Theorie der Liegruppen von fundamentaler Bedeutung.)

11.12 Die grundlegenden Aussagen über lineare Differentialgleichungen

Die zugrundeliegende Situation sei wie in Abschnitt 11.10. Mit $C^1(J,E)$ bezeichnen wir den $\mathbf{K}$-Vektorraum aller stetig differenzierbaren Funktionen $J \to E$.

Theorem.

(a) Für jede Wahl des Anfangswertes $(\xi, \eta) \in J \times E$ ist die maximale Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = A(x)y + b(x) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta$$

auf ganz J definiert; sie ist also ein Element von $C^1(J,E)$ (für maximale Lösungen vgl. Abschnitt 11.2). Und zwar gilt für diese maximale Lösung $y\colon J \to E$ folgendes:

(i) Ist $b \equiv 0$, so ist $y = Y_\xi \eta$.

(ii) Ist $b \not\equiv 0$, so ergibt sich y mittels des Ansatzes

$$y = Y_\xi(x)v(x),$$

welcher für die Funktion $v\colon J \to E$ auf die Bedingungsgleichung

$$v' = Y_\xi(x)^{-1}b(x) \quad \text{mit} \quad v(\xi) = \eta$$

führt. Also gilt

$$\begin{aligned}\forall t \in J\colon y(t) &= Y_\xi(t)\left(\eta + \int_\xi^t Y_\xi(s)^{-1}b(s)\,ds\right)\\ &= Y_\xi(t)\eta + \int_\xi^t Y(s,t)\,b(s)\,ds \quad \text{mit} \quad Y(s,t) := Y_s(t).\end{aligned}$$

Ist $A(x) \equiv \text{const.}$, so ist $Y(s,t) = \exp((t-s)A)$ für alle t, $s \in J$.

(b) Die Gesamtheit aller *globalen* Lösungen $y\colon J \to E$ der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = A(x)y$$

ist ein zu E isomorpher Unterraum L von $C^1(J,E)$; und zwar bildet für jedes $\xi \in J$ die lineare Abbildung

$$\hat{\xi}\colon C^1(J,E) \to E, y \mapsto y(\xi)$$

den Unterraum L isomorph auf E ab. Insbesondere gilt:

$$\dim L = \dim E.$$

(c) Die Gesamtheit aller *globalen* Lösungen $y\colon J \to E$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = A(x)y + b(x)$$

ist ein *affiner Unterraum* L_b von $C^1(J,E)$ mit *Richtungsvektorraum* L, also

$$\forall y \in L_b\colon L_b = y + L.$$

Kommentar. Wenn wir also die Fundamentallösungen Y_ξ für eine lineare Differentialgleichung kennen, so können wir nach obigem daraus alle Lösungen der Differentialgleichung herleiten. Wie bekommen wir aber die Y_ξ? Dazu müssen wir dann doch i. a. die ursprüngliche Differentialgleichung $y' = A(x)y$ lösen.

Im endlich-dimensionalen Fall gelingt dies mit Rückgriff auf die *Jordansche Normalform* von Matrizen.

Beispiel. Wir nehmen an, daß es für die Differentialgleichung $y' = A(x)y + b(x)$ einen Vektor $\eta \in E \setminus \{0\}$ und stetige Funktionen λ, $g\colon J \to \mathbf{K}$ gibt, so daß

$$\forall t \in J\colon A(t)\eta = \lambda(t)\eta \wedge b(t) = g(t)\eta$$

gilt. (Also soll insbesondere für jedes t die Zahl $\lambda(t)$ ein Eigenwert und η ein Eigenvektor des Endomorpismus' $A(t)$ sein.) Ist dann $\varphi\colon J \to \mathbf{K}$ die maximale Lösung der $\mathbf{K}$-wertigen (inhomogenen) Anfangswertaufgabe

$$\varphi' = \lambda(x)\varphi + g(x) \quad \text{mit} \quad \varphi(\xi) = 1$$

(vgl. Abschnitt 11.4), so ist $y := \varphi \cdot \eta$ die maximale Lösung der E-wertigen Anfangswertaufgabe

$$y' = A(x)y + b(x) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta.$$

Der wichtigste Spezialfall ist der, für den $A \equiv \text{const.}$, $b \equiv 0$ und $\xi = 0$ ist; dann ist $\lambda \equiv \text{const.} \in \mathbf{K}$ und $y = e^{\lambda x}\eta\colon J \to \mathbf{K}\eta$.

Wir beachten insbesondere: Ist $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ und $\lambda = \alpha + i\beta$ mit α, $\beta \in \mathbf{R}$, so ist $e^{\lambda t} = e^{\alpha t} \cdot (\cos(\beta t) + i\sin(\beta))$; demnach beschreibt y eine lineare, kreisförmige oder eine spiralenförmige Bewegung in der Ebene $\mathbf{C}\eta$, je nachdem, ob $\beta = 0$, $\alpha = 0$ oder $\alpha\beta \neq 0$.

Aufgabe. Zu jeder stetigen Funktion $A\colon J \to \mathrm{L}(E,E)$ werde $Y(s,t) \in \mathrm{GL}(E)$ wie in Teil (a) des obigen Theorems definiert. Dann gilt

$$\forall r,s,t \in J\colon Y(s,t) \circ Y(r,s) = Y(r,t) \wedge Y(s,t)^{-1} = Y(t,s).$$

11.13 Gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung

In Abänderung der Festsetzungen in Abschnitt 11.1 sei jetzt B eine offene Teilmenge in dem n-fachen Produkt-Banachraum E^n. Wiederum bezeichne $f\colon J \times B \to E$ eine stetige Funktion und η einen Vektor aus B.

Für jede $(n-1)$-mal differenzierbare Funktion $y\colon I \to E$ setzen wir zur Abkürzung

$$j_n y\colon I \to E^n, t \mapsto (y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)).$$

(Das „j“ steht für „Jet“.)

Definition. Eine n-mal differenzierbare Funktion $y\colon I \to E$, wobei $I \subseteq J$ ein Intervall ist, heißt eine *Lösung* der *Differentialgleichung n-ter Ordnung*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{$*$}$$

wenn

$$j_n y(I) \subseteq B \quad \text{und} \quad \forall t \in I\colon y^{(n)}(t) = f(t, j_n y(t))$$

gilt.

Suchen wir Lösungen mit $j_n y(\xi) = \eta$, so sprechen wir wieder von einer Anfangswertaufgabe.

Proposition. Eine Funktion $y\colon I \to E$ ist genau dann eine Lösung der Differentialgleichung $(*)$, wenn es eine Lösung $z = (z_1, \ldots, z_n)\colon I \to E^n$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= f(x, z_1, \ldots, z_n) \end{aligned}$$

mit $z_1 = y$ gibt. Dann ist notwendigerweise $z = j_n y$. Solche Systeme lassen sich analog zu dem in Abschnitt 11.6 Gesagten in der Form

$$z' = F(x, z)$$

mit einer stetigen Funktion $F\colon J \times B \to E^n$ schreiben. Diese Funktion erfüllt genau dann eine lokale Lipschitzbedingung, wenn f eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt. In diesem Falle gilt daher der Picard–Lindelöfsche Existenz- und Eindeutigkeitssatz: Die Anfangswertaufgabe

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \quad \text{mit} \quad j_n y(\xi) = \eta$$

besitzt eine Lösung $y_0\colon I_0 \to E$, die im Sinne des Theorems aus 11.2 eindeutig und maximal ist.

11.14 Über lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Definition. Es seien $A_0, \ldots, A_{n-1}\colon J \to \mathrm{L}(E, E)$ und $g\colon J \to E$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) y^{(k)} + g \tag{$*$}$$

eine *lineare homogene* bzw. *inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung*, je nachdem, ob $g \equiv 0$ oder $g \not\equiv 0$.

Diese Differentialgleichung ordnet sich in den Rahmen von Abschnitt 11.13 ein, wenn wir die Funktion

$$f\colon J \times E^n \to E, (t, v) \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} A_k(t) v_k + g(t)$$

einführen. Die in Abschnitt 11.13 beschriebene Transformation in eine äquivalentes Differentialgleichungssystem erster Ordnung führt hier zu einer linearen Differentialgleichung, wie sie in Abschnitt 11.12 behandelt wurde. Daher sind die maximalen Lösungen von $(*)$ auf ganz J definiert.

Weiterhin gilt:

Theorem.

(a) Die Gesamtheit der globalen Lösungen $y\colon J \to E$ der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) y^{(k)}$$

ist ein zu E^n isomorpher Untervektorraum L des Vektorraumes $C^n(J, E)$ aller n-mal stetig differenzierbarer Funktionen $J \to E$; und zwar ist für jedes $\xi \in J$ die lineare Abbildung

$$L \to E^n, y \mapsto j_n y(\xi)$$

ein **K**-Vektorraum-Isomorphismus. Ist $m := \dim E < \infty$, so ist daher $\dim L = n \cdot m$.

(b) Die Gesamtheit der globalen Lösungen $y\colon J \to E$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) y^{(k)} + g$$

ist ein affiner Unterraum L_g des Vektorraumes $C^n(J, E)$ mit dem Richtungsvektorraum L, also

$$\forall y \in L_g\colon L_g = y + L.$$

11.15 Die Differentialgleichung $y'' + \kappa y = g$

In diesem Abschnitt sei $\kappa \in \mathbf{R}$ eine fest gewählte Zahl.

Definition. Wir definieren die Funktionen $\cos_\kappa, \sin_\kappa\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gemäß folgender Tabelle:

	$\cos_\kappa$	$\sin_\kappa$
$\kappa > 0$	$\cos(\sqrt{\kappa} \cdot x)$	$\sin(\sqrt{\kappa} \cdot x)/\sqrt{\kappa}$
$\kappa = 0$	1	x
$\kappa < 0$	$\cosh(\sqrt{-\kappa} \cdot x)$	$\sinh(\sqrt{-\kappa} \cdot x)/\sqrt{-\kappa}$

Die Beschreibung dieser Funktionen durch Potenzreihen ist

$$\cos_\kappa = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\kappa)^n}{(2n)!} x^{2n},$$
$$\sin_\kappa = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\kappa)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Proposition. Für t, t_1, $t_2 \in \mathbf{R}$ gelten die folgenden fundamentalen Identitäten:

$$\begin{aligned}
\cos_\kappa' &= -\kappa \cdot \sin_\kappa, \\
\sin_\kappa' &= \cos_\kappa, \\
\cos_\kappa(t_1 + t_2) &= \cos_\kappa(t_1) \cdot \cos_\kappa(t_2) - \kappa \cdot \sin_\kappa(t_1) \cdot \sin_\kappa(t_2), \\
\sin_\kappa(t_1 + t_2) &= \sin_\kappa(t_1) \cdot \cos_\kappa(t_2) + \cos_\kappa(t_1) \cdot \sin_\kappa(t_2), \\
\cos_\kappa(-t) &= \cos_\kappa(t), \\
\sin_\kappa(-t) &= -\sin_\kappa(t), \\
\cos_\kappa^2 + \kappa \cdot \sin_\kappa^2 &\equiv 1.
\end{aligned}$$

Theorem.

(a) Die Funktionen $\cos_\kappa$ und $\sin_\kappa$ sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$y'' + \kappa \cdot y = 0$$

mit den Anfangswerten

$$\cos_\kappa(0) = \sin_\kappa'(0) = 1 \quad \text{und} \quad \cos_\kappa'(0) = \sin_\kappa(0) = 0.$$

(b) Zu jeder Lösung $y\colon I \to \mathbf{R}$ der Differentialgleichung $y''+\kappa\cdot y = 0$ existieren eindeutige λ, $\mu \in \mathbf{R}$, so daß

$$y = (\lambda \cdot \cos_\kappa + \mu \cdot \sin_\kappa)|I.$$

Insbesondere bilden $\cos_\kappa$ und $\sin_\kappa$ eine Basis des Vektorraumes L aller Lösungen $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ von $y'' + \kappa \cdot y = 0$.

(c) Ist $g\colon J \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion und ist $\xi \in J$, so ist

$$y\colon J \to \mathbf{R}, t \mapsto \int_\xi^t \sin_\kappa(t - s) g(s)\, ds$$

die maximale Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'' + \kappa \cdot y = g \quad \text{mit} \quad y(\xi) = y'(\xi) = 0.$$

Für die weiteren Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $y'' + \kappa \cdot y = g$ vgl. (b) aus dem Theorem aus Abschnitt 11.14.

11.16 Die Differentialgleichung $y'' + 2ay' + by = g$

Theorem. Seien a, $b \in \mathbf{R}$, sei $\kappa := b - a^2$ und sei $g\colon J \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $y\colon J \to \mathbf{R}$ genau dann eine Lösung von

$$y'' + 2ay' + by = g,$$

wenn $z := y \cdot e^{ax}$ eine Lösung von

$$z'' + \kappa \cdot z = g \cdot e^{ax}$$

ist; vgl. Abschnitt 11.15.

Beispiel 1 (Der Kriechfall)**.** Es seien a, $b \in \mathbf{R}_+$ und $\kappa \leq 0$, also $b \leq a^2$. Dann hat die Differentialgleichung $y'' + 2ay' + by = 0$ die allgemeine Lösung

$$y = (mx + c) \cdot e^{-ax}$$

mit m, $c \in \mathbf{R}$ im Falle $\kappa = 0$ und

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

mit c_1, $c_2 \in \mathbf{R}$ im Falle $\kappa < 0$, wobei λ_1 und λ_2 die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b} < 0$ der *charakteristischen Gleichung* $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$ sind.

Für diese Lösungen gilt offenbar $\lim\limits_{\infty} y = 0$. Daher sprechen wir hier vom *Kriechfall.*

Beispiele 2.

(a) **Die eindimensionale freie, gedämpfte Schwingung.**

Die Bewegung eines Körpers mit der Masse $m > 0$ unter der Wirkung einer elastischen Kraft $-k \cdot a$, $k > 0$, die den Körper an der Stelle a in Richtung der Ruhelage bei 0 zurückzieht und einer Reibungskraft $-\rho \cdot v$, $\rho \geq 0$, die von der Geschwindigkeit v abhängt, wird durch die Differentialgleichung

$$m \cdot y'' + \rho \cdot y' + k \cdot y = 0$$

beschrieben. Hier ist $\kappa = (4mk - \rho^2)/(4m^2)$. Im Falle $\rho^2 \geq 4mk$ ist die Reibung also so groß, daß der Körper nicht schwingt (Kriechfall).

(b) **Der Schwingkreis.** Die Stromstärke in einem Schwingkreis, der aus einer Reihenschaltung eines Ohmschen Widerstandes R, einer Kapazität C und einer Induktivität L besteht, wird durch die Differentialgleichung

$$L \cdot y'' + R \cdot y' + \frac{1}{C} \cdot y = 0$$

beschrieben. Hier ist $\kappa = (4L - CR^2)/(4L^2C)$. Im Falle $CR^2 \geq 4L$ geht so viel elektromagnetische Energie im Ohmschen Widerstand verloren, daß der „Schwingkreis“ nicht schwingt.

11.17 Ein Randwertproblem

Proposition. Das *Randwertproblem*

$$y'' + \kappa \cdot y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y(1) = 0$$

hat nur für die Werte $\kappa = \omega^2$ mit den „diskreten Frequenzen“ $\omega = n\pi$, $n \in \mathbf{N}_1$, nicht triviale Lösungen, nämlich

$$y_c := c \cdot \sin(\omega x), \quad c \in \mathbf{R}^*.$$

Kapitel 12

Topologische Strukturen

In den bisherigen Kapiteln haben wir in den Fällen der normierten Vektorräume $\mathbf{K}^n$ nicht besonders betont, welche Norm wir jeweils zugrundegelegt haben. Im $\mathbf{R}^n$ haben wir zum Beispiel die Alternative zwischen der Norm $\|\cdot\|_\infty$, welche durch die Struktur von $\mathbf{R}^n$ als n-faches Produkt von $\mathbf{R}$ induziert wird, und der aus geometrischen Gründen häufig vorzuziehenden euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. In Abschnitt 3.4 haben wir bereits festgestellt, daß diese Alternative für den Begriff der Stetigkeit keine Konsequenz hat.

In den folgenden beiden Abschnitten werden wir sehen, daß auf jedem *endlich-dimensionalen* $\mathbf{K}$-Vektorraum jeweils zwei Normen *äquivalent* sind und daß sie aus diesem Grunde dieselbe topologische Struktur (vgl. Abschnitt 12.2) induzieren. Es hat sich herausgestellt, daß der Begriff der topologischen Struktur einer der grundlegenden Begriffe der Mathematik ist. Wir machen das dadurch augenfällig, daß wir die Begriffe wie Konvergenz, Stetigkeit und einige weitere auf der Grundlage der topologischen Struktur, d. h. in *topologischen Räumen* erneut definieren. Insbesondere erhalten wir dadurch ein besseres Verständnis dafür, warum wir auf endlich-dimensionalen $\mathbf{K}$-Vektorräumen bei vielen Problemen mit einer willkürlich gewählten Norm arbeiten dürfen. Gleichzeitig verbreitern wir den Anwendungsbereich analytischer Methoden, indem wir nun auch verstärkt topologische Räume in die Untersuchungen einbeziehen können, auf denen nicht (oder zumindest nicht in natürlicher Weise) Metriken eingeführt werden können. Ein Beispiel ist uns schon bekannt, nämlich die erweiterte Zahlengerade $\widehat{\mathbf{R}}$; bisher erfuhr dieser Raum stets eine gesonderte Behandlung. Andere Beispiele, viel wichtiger als $\widehat{\mathbf{R}}$ sind die Mannigfaltigkeiten, die zum Beispiel den kosmologischen Modellen und Zustandsräumen physikalischer Systeme zugrundeliegen.

12.1 Stetigkeit linearer Abbildungen und die Äquivalenz von Normen

Theorem. Sei E ein *endlich-dimensionaler* $\mathbf{K}$-Vektorraum.

(a) Jede lineare Abbildung $A\colon E \to F$ in einen beliebigen normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum F ist bezüglich jeder Norm von E stetig.

(b) Zu je zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ von E gibt es Konstanten m, $M \in \mathbf{R}_+$, so daß

$$\forall v \in E\colon m \cdot \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq M \cdot \|v\|_1 \,. \tag{$*$}$$

Gilt für zwei Normen eine derartige Abschätzung $(*)$, so sagen wir auch, die Normen seien *äquivalent*. Somit besagt (b):

Auf einem endlich-dimensionalen **K**-*Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent* (vgl. den Spezialfall aus Abschnitt 3.4).

Proposition. Sind zwei äquivalente Normen auf einem **K**-Vektorraum E gegeben, so gilt für jede Folge $(v_n)_{n \geq m}$ von Vektoren $v_n \in E$:

(a) Die Folge konvergiert genau dann bezüglich der einen Norm gegen einen Vektor $v \in E$, wenn sie bezüglich der anderen Norm gegen v konvergiert.

(b) Die Folge ist genau dann eine Cauchyfolge bezüglich der einen Norm, wenn sie eine Cauchyfolge bezüglich der anderen Norm ist.

Korollar.

(a) Jeder endlich-dimensionale normierte **K**-Vektorraum ist ein Banachraum.

(b) In einem normierten **K**-Vektorraum ist jeder endlich-dimensionale Untervektorraum abgeschlossen.

(c) In jedem endlich-dimensionalen normierten **K**-Vektorraum E gilt der Heine–Borelsche Satz:

Eine Teilmenge $K \subseteq E$ ist genau dann folgenkompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist (vgl. Abschnitt 4.11).

Insbesondere sind daher bezüglich jeder Norm $\|\cdot\|$ von E die Bälle

$$B_r(v) = \{u \in E \mid \|u - v\| \leq r\}$$

mit $r \in \mathbf{R}_+$ und $v \in E$ folgenkompakt.

Kommentar 1. In unendlich-dimensionalen normierten Vektorräumen sind die Bälle $B_r(v)$ niemals folgenkompakt.

Kommentar 2. Bei den Beweisen dieses Abschnittes nutzen wir im Falle $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, daß wir jeden normierten **C**-Vektorraum als normierten **R**-Vektorraum auffassen können, indem wir uns bei der Multiplikation mit Skalaren auf reelle Zahlen beschränken.

Aufgabe (Stetigkeit multilinearer Abbildungen)**.** Seien $E_1, \ldots, E_n$ endlich-dimensionale **K**-Vektorräume, F irgendein normierter **K**-Vektorraum Man zeige: Jede n-lineare Abbildung

$$\varphi\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$$

ist bezüglich jeder Wahl von Normen auf den E_k stetig.

(Tip: Für jedes $k = 1, \ldots, n$ wähle man eine Basis $(b_{k1}, \ldots, b_{km_k})$ von E_k und bezeichne mit $(\lambda_{k1}, \ldots, \lambda_{km_k})$ die dazu duale Basis von $E_k^* := \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(E_k, \mathbf{K})$, d. h. $\lambda_{ki} \colon E_k \to \mathbf{K}$ ist die Linearform, die durch

$$\forall j \in \{1, \ldots, m_k\} \colon \lambda_{ki}(b_{kj}) = \delta_{ij}$$

charakterisiert ist. Dann gilt (?)

$$\forall v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \colon \varphi(v) = \sum \lambda_{1i_1}(v_1) \cdots \lambda_{ni_n}(v_n) \cdot \varphi(b_{1i_1}, \ldots, b_{ni_n}),$$

wobei in der Summe der Index i_k jeweils die Zahlen $1, \ldots, m_k$ durchläuft.)

12.2 Topologische Räume

Definition. Sei E eine Menge. Dann heißt ein System $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P}(E)$ von Teilmengen von E eine *topologische Struktur* von E und das Paar $(E, \mathfrak{T})$ ein *topologischer Raum*, wenn die folgenden Axiome für $\mathfrak{T}$ gelten:

(T1) Es ist $E \in \mathfrak{T}$.

(T2) Für je zwei Mengen G_1 und $G_2 \in \mathfrak{T}$ ist auch $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{T}$.

(T3) Für jede Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Mengen $G_i \in \mathfrak{T}$ ist auch $\bigcup\limits_{i \in I} G_i \in \mathfrak{T}$.

Ist $(E, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, so werden wir $\mathfrak{T}$ auch mit $\mathfrak{T}(E)$ bezeichnen, die Mengen $G \in \mathfrak{T}(E)$ die *offenen Mengen* des topologischen Raumes nennen und häufig einfach sagen, daß E ein topologischer Raum ist.

Da in (T3) auch die leere Familie ($I = \emptyset$) erlaubt ist und die Vereinigung der leeren Familie die leere Menge ist, gilt insbesondere $\emptyset \in \mathfrak{T}$ für jede topologische Struktur $\mathfrak{T}$. Sind $G_1, \ldots, G_n \in \mathfrak{T}$ endlich viele offene Mengen von E, so folgt induktiv, daß $G_1 \cap \cdots \cap G_n \in \mathfrak{T}$ eine offene Teilmenge von E ist.

Beispiele.

(a) Ist (E, d) ein metrischer Raum, so bildet nach der Aufgabe aus Abschnitt 6.1 die Gesamtheit aller (gemäß der Definition aus Abschnitt 6.1) offenen Mengen eine topologische Struktur von E; wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{T}(E, d)$ oder auch einfach mit $\mathfrak{T}(E)$. In dieser Weise werden wir metrische Räume stets als topologische Räume betrachten. Per definitionem stimmen für metrische Räume der Begriff der „offenen Menge“ gemäß der Definition aus Abschnitt 6.1 und der Definition aus diesem Abschnitt überein. Es gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \forall p \in E \colon U_\varepsilon(p) \in \mathfrak{T}(E, d).$$

(b) Da jeder normierte $\mathbf{K}$-Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ insbesondere ein metrischer Raum ist (vgl. Abschnitt 5.3), können wir auch von der topologischen Struktur von $(E, \|\cdot\|)$ sprechen; sie soll mit $\mathfrak{T}(E, \|\cdot\|)$ oder einfach mit $\mathfrak{T}(E)$ bezeichnet werden.

(c) Unter Zuhilfenahme der ε-Umgebungen der Punkte ∞ und $-\infty$ können wir gemäß der Definition aus Abschnitt 6.1 ebenfalls offene Mengen von $\widehat{\mathbf{R}}$ definieren; deren Gesamtheit bildet die kanonische topologische Struktur von $\widehat{\mathbf{R}}$.

(d) Ist E eine Menge, so ist die *triviale Topologie* auf E durch $\mathfrak{T} = \{\emptyset, E\}$ gegeben. Die *diskrete Topologie* auf E ist durch $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(E)$ gegeben.

Theorem (Die topologischen Strukturen bezüglich äquivalenter Normen)**.** Es seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen eines $\mathbf{K}$-Vektorraumes E. Dann gilt:

$$\Big(\exists M \in \mathbf{R}_+\colon\ \|\cdot\|_1 \leq M \cdot \|\cdot\|_2\Big) \iff \Big(\mathfrak{T}(E, \|\cdot\|_1) \subseteq \mathfrak{T}(E, \|\cdot\|_2)\Big).$$

Folglich sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ genau dann äquivalent (vgl. Abschnitt 12.1), wenn $\mathfrak{T}(E, \|\cdot\|_1) = \mathfrak{T}(E, \|\cdot\|_2)$.

Aufgabe (Topologische Teilräume)**.** Sei E ein topologischer Raum und M eine nicht leere Teilmenge von E. Dann ist $\mathfrak{T}_M := \{G \cap M \mid G \in \mathfrak{T}(E)\}$ eine topologische Struktur von M, die sog. von E oder von $\mathfrak{T}(E)$ auf M induzierte *Teilraumtopologie.* $(M, \mathfrak{T}_M)$ heißt auch *topologischer Teilraum* von E.

Ist d eine Metrik auf E und $d_M := d|(M \times M)$ (vgl. Abschnitt 3.7), so ist $\mathfrak{T}(M, d_M)$ die von $\mathfrak{T}(E, d)$ auf M induzierte Teilraumtopologie.

12.3 Der Umgebungsbegriff in topologischen Räumen

Definition 1. Sei E ein topologischer Raum. Für jede Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(E)$ definieren wir

$$\mathfrak{U}^o(M) := \mathfrak{U}^o(M, E) := \{U \in \mathfrak{T}(E) \mid U \supseteq M\}$$

und

$$\mathfrak{U}(M) := \mathfrak{U}(M, E) := \{N \in \mathfrak{P}(E) \mid \exists U \in \mathfrak{U}^o(M)\colon U \subseteq N\}.$$

Für einzelne Punkte $p \in E$ schreiben wir kürzer

$$\mathfrak{U}^o(p) := \mathfrak{U}^o(p, E) := \mathfrak{U}^o(\{p\}, E)$$

und entsprechend

$$\mathfrak{U}(p) := \mathfrak{U}(p, E) := \mathfrak{U}(\{p\}, E).$$

Die Elemente $U \in \mathfrak{U}(M)$ bzw. $U \in \mathfrak{U}(p)$ heißen die *Umgebungen* von M bzw. von p im topologischen Raum E; die Elemente $U \in \mathfrak{U}^o(M)$ bzw. $U \in \mathfrak{U}^o(p)$ heißen die *offenen* Umgebungen von M bzw. von p im topologischen Raum E.

Aufgrund der Axiome für topologische Strukturen haben wir:

Proposition 1. Für jede Teilmenge $M \subseteq E$ eines topologischen Raumes E gilt:

(U1) $E \in \mathfrak{U}^o(M)$.

(U2) Sind $U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{U}^o(M)$ endlich viele offene Umgebungen von M, so ist auch $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathfrak{U}^o(M)$.

(U3) Ist $(U_i)_{i \in I}$ irgendeine nicht leere Familie offener Umgebungen $U_i \in \mathfrak{U}^o(M)$, so ist auch $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathfrak{U}^o(M)$.

Beispiel 1. Für jeden topologischen Teilraum $N \subseteq E$ von E gilt

$$\forall M \in \mathfrak{P}(N) \colon \mathfrak{U}^o(M, N) = \{U \cap N \mid U \in \mathfrak{U}^o(M, E)\}.$$

Proposition 2. In einem metrischen Raum (E, d) gilt für jeden Punkt $p \in E$ und für jede Teilmenge $M \subseteq E$:

(a) $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon U_\varepsilon(p) \in \mathfrak{U}^o(p, E) \wedge U_\varepsilon(M) := \bigcup\limits_{p \in M} U_\varepsilon(p) \in \mathfrak{U}^o(M, E)$,

(b) $\forall U \in \mathfrak{U}^o(p, E)\, \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon U_\varepsilon(p) \subseteq U$.

In Teil (b) der Proposition dürfen wir den Punkt p nicht durch eine beliebige Teilmenge ersetzen, wohl aber durch eine kompakte (vgl. Abschnitt 12.9).

Proposition 3 (Charakterisierung offener Mengen)**.** Gilt für eine Teilmenge $G \subseteq E$ eines topologischen Raumes E, daß

$$\forall p \in G\, \exists U \in \mathfrak{U}^o(p, E) \colon U \subseteq G,$$

so ist G eine offene Teilmenge von E.

Aufgabe (Produkte topologischer Räume)**.**

(a) Sei $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume und

$$E := \prod_{i \in I} E_i := \{p = (p_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I \colon p_i \in E_i\}$$

ihr Produkt. Mit $\mathrm{pr}_i \colon E \to E_i, (p_i)_{i \in I} \mapsto p_i$, $i \in I$, bezeichnen wir die kanonischen Projektionsabbildungen.

Dann nennen wir eine Teilmenge $G \subseteq E$ von E *offen*, wenn

$$\forall p \in G\, \exists i_1, \ldots, i_n \in I \exists U_1 \in \mathfrak{U}^o(p_{i_1}, E_{i_1}), \ldots, U_n \in \mathfrak{U}^o(p_{i_n}, E_{i_n}) \colon \\ \mathrm{pr}_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}_{i_n}^{-1}(U_n) \subseteq G.$$

Das System $\mathfrak{T}(E)$ der so definierten offenen Mengen von E ist eine topologische Struktur von E. Ist $G \in \mathfrak{T}(E_i)$, so ist $\mathrm{pr}_i^{-1}(G) \in \mathfrak{T}(E)$.

(b) Sind $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ metrische Räume, so stimmt die topologische Struktur $\mathfrak{T}(E, d)$ des in Abschnitt 3.3 definierten metrischen Produktraumes (E, d) mit der in (a) definierten topologischen Struktur $\mathfrak{T}(E)$ des Produktes der topologischen Räume $(E_i, \mathfrak{T}(E_i, d_i))_{i \in I}$ überein.

Definition 2 (Hausdorff-Räume)**.** Ein topologischer Raum E heißt *Hausdorff-Raum*, wenn sich je zwei verschiedene Punkte p und q von E durch *Umgebungen trennen* lassen, d h. wenn

$$\forall p, q \in E \colon p \neq q \implies \exists U \in \mathfrak{U}^o(p), V \in \mathfrak{U}^o(q) \colon U \cap V = \emptyset.$$

Beispiele 2. Metrische Räume und $\widehat{\mathbf{R}}$ sind Hausdorff-Räume; vgl. Abschnitte 3.1 und 2.1.

Ist E eine Menge mit mehr als einem Punkt, so ist E versehen mit der trivialen Topologie kein Hausdorff-Raum. An anderen Stellen treten nicht hausdorffsche topologische Räume in natürlicher Weise auf.

Indem wir die ε-Umgebungen aus der Theorie metrischer Räume durch die soeben eingeführten (offenen) Umgebungen ersetzen, können wir die fundamentalen Begriffe „Konvergenz“ und „Stetigkeit“ auf dem Niveau der topologischen Räume einführen. Die vorausgegangene Proposition 2 garantiert, daß im Falle metrischer Räume die neuen Definitionen im Einklang mit den alten stehen.

12.4 Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen

Definition 1. Sei $f \colon E \to E'$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen E und E'. Die Abbildung f heißt in einem Punkt $p \in E$ *stetig*, wenn

$$\forall V \in \mathfrak{U}^o(f(p), E')\, \exists U \in \mathfrak{U}^o(p, E) \colon f(U) \subseteq V.$$

Die Abbildung f heißt *(überall) stetig*, wenn sie in allen $p \in E$ stetig ist.

Kommentar. Wegen der Proposition 2 aus Abschnitt 12.3 steht diese Definition mit der Definition aus der Theorie der metrischen Räume im Einklang. Damit ist die Stetigkeit als ein *topologischer* Begriff erkannt, d. h. als Begriff, der im Falle von metrischen Räumen (bzw. von normierten Räumen) nicht von den zugrundeliegenden Metriken (bzw. Normen), sondern nur von den davon induzierten topologischen Strukturen abhängt. In diesem Zusammenhang sind der Teil (b) des Theorems aus 12.1 und das Theorem aus 12.2 von fundamentaler Bedeutung.

Warnung. Die *gleichmäßige* Stetigkeit von Abbildungen (vgl. Abschnitt 4.12) in der Theorie allgemeiner metrischer Räume ist kein topologischer Begriff; er hängt empfindlich von den zugrundeliegenden Metriken ab.

Sammlung von Resultaten. Wenn wir gegebenenfalls ε-Umgebungen durch beliebige offene Umgebungen ersetzen, gelten für beliebige topologische Räume mutatis mutandis

- die Beispiele (a) und (b) aus Abschnitt 3.2: die Identität id_E und konstante Abbildungen sind stetig;
- das Theorem aus Abschnitt 3.2 über die Komposition stetiger Abbildungen;
- die Propositionen 1 und 2 aus Abschnitt 3.3 über die Stetigkeit der Projektionen pr_k bzw. die Stetigkeit von Abbildungen $f = (f_1, \dots, f_n)$ in Produkträume;
- die Proposition und die beiden Aufgaben aus Abschnitt 3.7 über die Einschränkung stetiger Abbildungen auf Teilräume, den lokalen Charakter der Stetigkeit und das Aneinanderheften stetiger Abbildungen.

Theorem. Eine Abbildung $f\colon E \to E'$ zwischen topologischen Räumen E und E' ist genau dann stetig, wenn

$$\forall G \in \mathfrak{T}(E')\colon f^{-1}(G) \in \mathfrak{T}(E).$$

Demnach sind die stetigen Abbildungen die *strukturverträglichen* Abbildungen in der Theorie der topologischen Räume.

Definition 2. Die „Isomorphismen" in der Theorie topologischer Räume heißen *Homöomorphismen*; ausführlicher: Eine stetige Abbildung $f\colon E \to E'$ ist per definitionem ein *Homöomorphismus*, wenn sie eine stetige Umkehrabbildung $\check{f}\colon E' \to E$ besetzt.

Aufgrund des letzten Theorems ist eine Bijektion $f\colon E \to E'$ genau dann ein Homöomorphismus, wenn

$$\forall G \in \mathfrak{P}(E)\colon G \in \mathfrak{T}(E) \iff f(G) \in \mathfrak{T}(E').$$

Aufgabe (Die Riemannsche Zahlenkugel)**.** Ähnlich wie in Abschnitt 10.1 die Zahlengerade $\mathbf{R}$ zu $\widehat{\mathbf{R}}$ erweitert wurde, wird hier die komplexe Ebene $\mathbf{C}$ durch Hinzunahme *eines* Elementes ∞ zu $\widehat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ erweitert. Weiterhin definieren wir für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, daß

$$U_\varepsilon(\infty) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1/\varepsilon\} \cup \{\infty\}.$$

In dem wir mutatis mutandis die Definition aus Abschnitt 6.1 für offene Mengen benutzen, erhalten wir auf $\widehat{\mathbf{C}}$ eine topologische Struktur $\mathfrak{T}(\widehat{\mathbf{C}})$. Der dadurch definierte topologische Raum heißt die *Riemannsche Zahlenkugel*, vgl. (c).

(a) Die von $\mathfrak{T}(\widehat{\mathbf{C}})$ auf $\mathbf{C}$ induzierte Teilraumtopologie stimmt mit der kanonischen topologischen Struktur von $\mathbf{C}$ überein.

(b) Die Abbildung

$$j\colon \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}, z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbf{C}^*, \\ \infty & \text{für } z = 0 \text{ und} \\ 0 & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

ist ein Homöomorphismus.

(c) Die *stereographische Projektion* $f\colon \mathbf{S}^2 \to \widehat{\mathbf{C}}$ von der zwei-dimensionalen *Sphäre*

$$\mathbf{S}^2 := \{p \in \mathbf{R}^3 \mid x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2 = 1\}$$

auf $\widehat{\mathbf{C}}$, die den „Nordpol“ $N := (0,0,1)$ auf ∞ abbildet und die im übrigen durch

$$f|(\mathbf{S}^2 \setminus \{N\}) \equiv \frac{1}{1-z} \cdot (x + i \cdot y)|(\mathbf{S}^2 \setminus \{N\})$$

beschrieben ist, ist ein Homöomorphismus. Man fertige eine Skizze an, aus der ersichtlich ist, daß diese Abbildung die Punkte der $\mathbf{S}^2$ vom Projektionszentrum N auf die Äquatorialebene projiziert.

(Tip: Untersuchungen in der Nähe von $z = \infty \in \widehat{\mathbf{C}}$ kann man mit Hilfe der Abbildung j aus (b) auf Untersuchungen in der Nähe von $z = 0$ zurückführen.)

(d) Sei A eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit komplexwertigen Einträgen mit $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Dann existiert genau ein Homöomorphismus $f_A\colon \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$, der die *gebrochen-lineare Abbildung* (oder auch *Möbius-Transformation*)

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

fortsetzt.

(Tip: Man beachte den Tip zu (c) und mache eine Fallunterscheidung, je nachdem, ob $c = 0$ oder $c \neq 0$. In letzterem Falle kann man f_A als Komposition $f_B \circ j \circ f_C$ schreiben, wobei f_B und f_C vom Typ $(c,d) = (0,1)$ sind.)

12.5 Konvergenz von Punktfolgen in topologischen Räumen

Definition. Es seien E ein topologischer Raum, $(p_n)_{n\geq m}$ eine Punktfolge in E und $p^* \in E$. Wir sagen, daß die Folge $(p_n)_{n\geq m}$ *gegen* p^* *konvergiert*, wenn

$$\forall U \in \mathfrak{U}^o(p^*)\, \exists n_0 \geq m \forall n \geq n_0\colon p_n \in U.$$

Kommentar. Wegen der Proposition 2 aus Abschnitt 12.3 steht diese Definition mit der Definition aus der Theorie metrischer Räume (vgl. Abschnitt 4.1) in Einklang. Damit ist die Konvergenz von Punktfolgen als topologischer Begriff erkannt.

Warnung 1. In Hausdorff-Räumen kann eine Punktfolge höchstens gegen einen Punkt konvergieren (Eindeutigkeit des Grenzwertes). In nicht-hausdorffschen Räumen ist diese Aussage i. a. falsch.

Warnung 2. In der Theorie allgemeiner topologischer Räume kann der Begriff der *Cauchyfolge* nicht definiert werden. Daher ist hier auch der Begriff der *Vollständigkeit* nicht relevant. Dennoch folgt aus der Proposition aus Abschnitt 12.1 und des Theorems aus Abschnitt 12.2, daß in normierten Vektorräumen diese Begriffe nur von den topologischen Strukturen und nicht von den speziellen zugrundeliegenden Normen abhängen. Desgleichen hat der Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* für Folgen von Abbildungen in einen topologischen Raum keine Relevanz.

Übertragung weiterer Begriffe. Wie in den Abschnitten 4.6 und 4.9 werden in beliebigen topologischen Räumen *Häufungspunkte* einer Folge und *folgenkompakte* Teilmengen definiert.

Sammlung von Resultaten. Für beliebige topologische Räume gelten mutatis mutandis

- die Proposition 2 aus Abschnitt 4.1 über die Bedeutung der „Endstücke" von Folgen für ihre Konvergenz,
- die Proposition aus Abschnitt 4.2 über die Konvergenz von Teilfolgen,
- die Aussage der Aufgabe aus Abschnitt 4.4 über die Konvergenz in Teilräumen,
- die Proposition aus Abschnitt 4.5 über die Konvergenz in Produkträumen,
- das Theorem aus Abschnitt 4.11 über Produkte folgenkompakter Teilmengen,
- die Aussage (c) aus der Aufgabe aus Abschnitt 4.9 über Bilder folgenkompakter Teilmengen und
- das Theorem aus Abschnitt 4.10 über die Existenz von Extremwerten.

Zum Beweis der letzten beiden Punkte wurde im Falle von metrischen Räumen das Heine-Kriterium verwendet. Von diesem „Kriterium" gilt für topologische Räume nur die in der folgenden Proposition beschriebene Teilaussage. Diese liefert aber für die vorangegangenen beiden Punkte das entscheidende Argument.

Proposition. Es seien E und E' topologische Räume. Ist dann $f\colon E \to E'$ eine in $p^* \in E$ stetige Abbildung und $(p_n)_{n\geq m}$ eine Punktfolge in E, die gegen p^* konvergiert, so konvergiert die Bildfolge $(f(p_n))_{n\geq m}$ gegen $f(p^*)$.

12.6 Innere Punkte einer Teilmenge

Definition. Es sei M eine Teilmenge eines topologischen Raumes E.

(a) Ein Punkt $p \in E$ heißt ein *innerer* Punkt von M, wenn

$$\exists U \in \mathfrak{U}^o(p)\colon U \subseteq M.$$

(b) Der *offene Kern* von M ist die Menge M^o aller inneren Punkte von M.

Beispiele. In $E = \mathbf{R}$ gilt $\mathbf{Q}^o = \emptyset$; für jedes Intervall I von $\mathbf{R}$ ist $I^o :=]\inf I, \sup I[$ das bereits vielfach benutzte, maximale offene Teilintervall von I.

Proposition. Sind M und N Teilmengen eines topologischen Raumes E, so gilt:

(a) $M^o \subseteq M$,

(b) $M \subseteq N \implies M^o \subseteq N^o$.

(c) $(M^o)^o = M^o$.

(d) M^o ist die größte offene Teilmenge von E, welche in M enthalten ist; damit erhalten wir die Darstellung

$$M^o = \bigcup \{G \in \mathfrak{T}(E) \mid G \subseteq M\}.$$

(Dies ist auch der Grund für die Bezeichnung „offener Kern“.) Daher:

(e) $M \in \mathfrak{T}(E) \iff M^o = M$.

Aufgabe. Man zeige $(M \cap N)^o = M^o \cap N^o$. Gilt auch $(M \cup N)^o = M^o \cup N^o$?

12.7 Berührungspunkte und abgeschlossene Teilmengen

In Abschnitt 4.8 haben wir definiert, wann eine Teilmenge eines metrischen Raumes *abgeschlossen gegenüber Limesbildung* heißt. Wir haben dann im folgenden einfach von „abgeschlossenen Teilmengen“ gesprochen. Natürlich könnten wir die Definition aus 4.8 für Teilmengen beliebiger topologischer Räume übernehmen. Die dadurch charakterisierten Teilmengen werden wir jetzt konsequent *abgeschlossen gegenüber Limesbildung* nennen, da wir im folgenden einen neuen Abgeschlossenheitsbegriff einführen, der zwar für metrische Räume mit dem alten Begriff übereinstimmt (Proposition 6), in beliebigen topologischen Räumen aber differiert und nützlicher ist. Desweiteren werden wir den Begriff der *abgeschlossenen Hülle* neu festlegen.

Definition. Sei M eine Teilmenge eines topologischen Raumes E.

(a) M heißt *abgeschlossen* (in E), wenn $E \setminus M$ offen ist.

(b) Ein Punkt $p \in E$ heißt *Berührungspunkt* von M, wenn

$$\forall U \in \mathfrak{U}^o(p) \colon M \cap U \neq \emptyset.$$

(c) Mit $\overline{M}$ bezeichnen wir die Menge aller Berührungspunkte von M in E; sie wird die *abgeschlossene Hülle* von M genannt; vgl. die Proposition aus Abschnitt 4.8.

(d) $\partial M := \overline{M} \setminus M^o$ heißt der *Rand* von M.

(e) Im Falle $\overline{M} = E$ sagen wir, daß M in E *dicht* liegt; vgl. Abschnitt 2.4 und 4.8.

Beispiel 1. In Hausdorff-Räumen sind die einpunktigen Mengen abgeschlossen (vgl. Beispiel (b) aus 4.8).

In Dualität zu den Axiomen (T1)–(T3) topologischer Strukturen gilt infolge der de-Morganschen-Regeln (vgl. Abschnitt 0.7):

Proposition 1. In jedem topologischen Raum gelten (vgl. aus Abschnitt 4.8 den Teil (a) des Beispieles und die Teile (b) und (c) der Aufgabe):

(A1) Es sind $\emptyset$ und E abgeschlossene Teilmenge von E.

(A2) Sind A_1 und A_2 zwei abgeschlossene Teilmengen von E, so ist auch $A_1 \cup A_2$ eine abgeschlossene Teilmenge von E.

(A3) Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie abgeschlossener Teilmengen von E, so ist auch $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ eine abgeschlossene Teilmenge von E.

Sind $A_1, \ldots, A_n$ endlich viele abgeschlossene Teilmengen von E, so folgt induktiv, daß $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ eine abgeschlossene Teilmenge von E ist.

Proposition 2. Sei $f\colon E \to E'$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Für jede abgeschlossene Teilmenge B von E' ist dann auch deren Urbild $f^{-1}(B)$ eine abgeschlossene Teilmenge von E; vgl. Aufgabe (d) aus Abschnitt 4.8.

Proposition 3. Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes E ist genau dann abgeschlossen, wenn
$$\forall p \in E \setminus M \; \exists U \in \mathfrak{U}^o(p)\colon M \cap U = \emptyset.$$

Beispiel 2. Sind E und E' zwei topologische Räume, sind $f, g\colon E \to E'$ stetige Abbildungen und ist E' *hausdorffsch*, so ist
$$\{p \in E \mid f(p) = g(p)\}$$
eine abgeschlossene Teilmenge von E. Insbesondere ist also die *Verschwindungsmenge*
$$V(f) := \{p \in E \mid f(p) = 0\}$$
einer jeden stetigen Funktion $f\colon E \to F$ in einem normierten Vektorraum F eine abgeschlossene Teilmenge von E.

Aufgabe 1. Es seien A und B zwei abgeschlossene Teilmengen eines topologischen Raumes E, und $f\colon A \to E'$ und $g\colon B \to E'$ zwei stetige Abbildungen in einen topologischen Raum E', und es gelte $f|(A \cap B) = g|(A \cap B)$. Dann existiert genau eine Abbildung $h\colon A \cup B \to E'$ mit $h|A = f$ und $h|B = g$, und diese ist stetig.

(Diese Aussage über das Aneinanderheften stetiger Abbildungen verallgemeinert offenbar die entsprechende Aussage aus der Aufgabe 2 von Abschnitt 3.7.)

Proposition 4. Für jede Teilmenge M eines topologischen Raumes E gilt
$$E \setminus \overline{M} = (E \setminus M)^o \quad \text{und} \quad E \setminus M^o = \overline{E \setminus M}.$$

In Dualität zu der Proposition aus Abschnitt 12.6 gilt:

Proposition 5. Sind M und N Teilmengen eines topologischen Raumes E, so gilt:

(a) $M \subseteq \overline{M}$.

(b) $M \subseteq N \implies \overline{M} \subseteq \overline{N}$.

(c) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

(d) $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von E, welche M umfaßt; damit erhalten wir die Darstellung

$$\overline{M} = \bigcap \{A \in \mathfrak{P}(E) \mid A \text{ ist abgeschlossen mit } A \supseteq M\}.$$

(Dies der Grund für die Bezeichnung „abgeschlossene Hülle".)

(e) M ist genau dann abgeschlossen, wenn $\overline{M} = M$; vgl. Definition 1 aus Abschnitt 4.8.

Aufgabe 2. Sind M und N Teilmengen eines topologischen Raumes E, so gilt:

(a) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

(b) Der Rand ∂M ist eine abgeschlossene Teilmenge von E; für ihn gilt weiterhin

$$\partial M = \{p \in E \mid \forall U \in \mathfrak{U}^o(p) \colon M \cap U \neq \emptyset \wedge (E \setminus M) \cap U \neq \emptyset\}.$$

(c) Sind M und N jeweils offen und dicht, so ist auch $M \cap N$ eine offene und dichte Teilmenge von E.

Proposition 6. Es seien E ein metrischer Raum, der in kanonischer Weise als topologischer Raum aufgefaßt wird, und M eine Teilmenge von E. Dann stimmt die in Abschnitt 4.8 eingeführte abgeschlossene Hülle von M mit der oben definierten abgeschlossenen Hülle überein; d. h. ein Punkt $p \in E$ ist genau dann Berührungspunkt von M, wenn es in M eine Punktfolge $(p_n)_{n \geq m}$ gibt, die (in E) gegen p konvergiert. Aufgrund dieser Tatsache ist M genau dann abgeschlossen (im Sinne obiger Definition), wenn M abgeschlossen gegenüber Limesbildung (im Sinne von Abschnitt 4.8) ist.

Aufgabe 3. Es seien E ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum, $v \in E$ und $r \in \mathbf{R}_+$. Dann gilt:

$$\overline{U_r(v)} = B_r(v) := \{u \in E \mid \|u - v\| \leq r\}$$

und

$$B_r(v)^o = U_r(v).$$

Gelten diese Aussagen auch in beliebigen metrischen Räumen?

12.8 Zusammenhängende topologische Räume

Sei E ein topologischer Raum. Dann sind auf jeden Fall $\emptyset$ und E Teilmengen, die zugleich offen und abgeschlossen sind. Im Falle der diskreten Topologie, d. h. $\mathfrak{T}(E) = \mathfrak{P}(E)$, ist jede Teilmenge von E gleichzeitig offen und abgeschlossen; dies ist eine eher atypische Situation. Ein typischeres Beispiel ist der topologische Teilraum $E = [-2,-1] \cup [1,2]$ von $\mathbf{R}$; in diesem Raum sind außer $\emptyset$ und E auch $[-2,-1]$ und $[1,2]$ zugleich offen und abgeschlossen; der Grund liegt offenbar darin, daß in diesem Falle der Raum E in die beiden Teilintervalle „sichtbar“ zerfällt. Aufgrund derartiger Beispiele definieren wir:

Definition. Sei E ein topologischer Raum.

(a) Ein topologischer Raum E heißt *zusammenhängend*, wenn er genau zwei Teilmengen besitzt, die *gleichzeitig* offen und abgeschlossen sind. Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes heißt *zusammenhängend*, wenn M als topologischer Teilraum (in letzterem Sinne) zusammenhängend ist.

(b) Eine stetige Abbildung $\alpha\colon I \to E$ von einem Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ in E heißt ein *Weg*.

(c) Der topologische Raum E heißt *wegweise zusammenhängend*, wenn ein Punkt $p_0 \in E$ existiert und zu jedem weiteren Punkt $p \in E$ ein Weg $\alpha\colon [0,1] \to E$ mit $\alpha(0) = p_0$ und $\alpha(1) = p$ existiert. Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes heißt *wegweise zusammenhängend*, wenn M als topologischer Teilraum (im letzteren Sinne) wegweise zusammenhängend ist.

Die beiden gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen eines zusammenhängenden topologischen Raumes E sind natürlich genau $\emptyset$ und E. Es sei beachtet, daß der leere topologische Raum $E = \emptyset$ gemäß unserer Definition nicht zusammenhängend ist, da er nur eine gleichzeitig offene und abgeschlossene Teilmenge besitzt. Er ist ebenfalls nicht wegweise zusammenhängend. (Der Grund für diese Konvention ist der gleiche, warum 1 keine Primzahl ist; jede Primzahl p hat genau zwei Teiler (in $\mathbf{N}_1$), nämlich 1 und p; dagegen hat 1 nur einen einzigen Teiler.)

Aufgabe 1.

(a) Jedes Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ ist zusammenhängend. (Tip: Ist $M \subseteq I$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raumes I, so ist die Funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ mit $f|M \equiv 1$ und $f|(I \setminus M) \equiv 0$ stetig. Also ...?)

(b) Ist $f\colon E \to E'$ eine stetige Abbildung und M eine zusammenhängende bzw. wegweise zusammenhängende Teilmenge von E, so ist $f(M)$ eine zusammenhängende bzw. wegweise zusammenhängende Teilmenge von E'.

(c) Jede wegweise zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes ist auch zusammenhängend. (Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch, vgl. Aufgabe 2.)

(d) Es sei g eine Gerade im $\mathbf{R}^2$. Man zeige, daß es keinen Homöomorphismus von $\mathbf{R}^2$ auf $\mathbf{R}^2 \setminus g$ gibt.

Aufgabe 2. Es seien folgende Teilmengen des $\mathbf{R}^2$ definiert:

$$\begin{aligned} A_n &:= \{(1/n, t) \mid 0 \le t \le 1\} && \text{für } n \in \mathbf{N}_1, \\ I &:= \{(t, 0) \mid 0 \le t \le 1\}, \\ E' &:= I \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}_1} A_n \end{aligned}$$

und

$$E := E' \cup \{(0,1)\}.$$

Man zeige, daß E ein zusammenhängender topologischer Teilraum von $\mathbf{R}^2$ ist, der aber nicht wegweise zusammenhängend ist.

(Tip: Für den Zusammenhang von E überlege man zunächst, daß E' wegweise zusammenhängend (und somit auch zusammenhängend) ist.)

Aufgabe 3 (Identitätssatz für reell analytische Funktionen)**.** Es seien J ein offenes Intervall von $\mathbf{R}$, $t_0 \in J$ und f, $g\colon J \to \mathbf{R}$ zwei reell analytische Funktion (vgl. Abschnitt 9.5). Existiert eine Folge $(t_n)_{n \ge 1}$ von Punkten in $J \setminus \{t_0\}$, die gegen t_0 konvergiert und gilt $f(t_n) = g(t_n)$ für alle $n \ge 1$, so ist $f \equiv g$.

(Tip: Man zeige, daß der offene Kern der Menge $\{t \in J \mid f(t) = g(t)\}$ in J auch abgeschlossen ist; man beachte den Identitätssatz für Potenzreihen.)

Aufgabe 4. Es gibt *keinen* Homöomorphismus

$$f\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1].$$

(Tip: Man untersuche $I \setminus \{1/2\}$ und $([0,1] \times [0,1]) \setminus \{f(1/2)\}$ auf wegweisen Zusammenhang.)

12.9 Kompakte Mengen

Definition. Sei E ein topologischer Raum.

(a) Eine Familie $(G_i)_{i \in I}$ offener Mengen G_i von E heißt eine *offene Überdeckung* einer Teilmenge $K \in \mathfrak{P}(E)$, wenn
$$\bigcup_{i \in I} G_i \supseteq K.$$

(b) Eine Teilmenge $K \subseteq E$ heißt *quasikompakt*, wenn es für jede Überdeckung $(G_i)_{i \in I}$ von K eine *endliche* Teilmenge $J \subseteq I$ gibt, so daß bereits
$$\bigcup_{i \in J} G_i \supseteq K.$$

(c) Eine Teilmenge $K \subseteq E$ heißt *kompakt*, wenn sie quasikompakt und (als topologischer Teilraum von E) hausdorffsch ist.

Beispiele 1. (a) Jede endliche Teilmenge eines topologischen Raumes ist quasikompakt. Jede endliche Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist kompakt.

(b) Ist $(p_n)_{n \geq m}$ eine Punktfolge eines topologischen Raumes E, die gegen einen Punkt p^* konvergiert, so ist

$$K := \{p_n \mid n \geq m\} \cup \{p^*\}$$

quasikompakt, und sogar kompakt, wenn E hausdorffsch ist.

Proposition 1. Sei E ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $K \subseteq E$ ist genau dann quasikompakt bzw. kompakt, wenn K als topologischer Teilraum von E ein quasikompakter bzw. kompakter Raum ist.

Lemma 1. Ist K eine kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes E und $p \in E \setminus K$, so existieren $U \in \mathfrak{U}^o(K)$ und $V \in \mathfrak{U}^o(p)$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Proposition 2. Für jede Teilmenge K eines topologischen Raumes E gilt:

(a) Ist E ein Hausdorff-Raum und ist K kompakt, so ist K eine abgeschlossene Teilmenge von E.

(b) Ist K quasikompakt bzw. kompakt und A eine abgeschlossene Teilmenge von K, so ist auch A quasikompakt bzw. kompakt.

(c) Ist $(K_i)_{i \in I}$ eine nicht leere Familie kompakter Teilmengen K_i von E und ist E ein Hausdorff-Raum, so ist $\bigcap\limits_{i \in I} K_i$ ebenfalls kompakt.

(d) Sind $K_1, \ldots, K_n \subseteq E$ (endlich viele) kompakte Teilmengen, so ist auch $\bigcup\limits_{i \in I} K_i$ kompakt.

Aufgabe 1. Ist K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes E, so gilt (vgl. Proposition 2 aus Abschnitt 12.3), daß

$$\forall U \in \mathfrak{U}^o(K, E)\, \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon U_\varepsilon(K) \subseteq U.$$

Aufgabe 2 (Tubenlemma)**.** Es seien E und E' topologische Räume, $q \in E$ ein beliebiger Punkt, $K \subseteq E'$ eine kompakte Teilmenge und $G \in \mathfrak{U}^o(\{q\} \times K, E \times E')$ (vgl. Aufgabe aus Abschnitt 12.3). Dann gilt: Es gibt eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(q, E)$, so daß sogar die „Tube" $U \times K$ Teilmenge von G ist.

Proposition 3 (Bilder quasikompakter Mengen)**.** Sei $f \colon E \to E'$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen E und E'. Dann gilt:

(a) Das Bild $f(K)$ einer jeden quasikompakten Teilmenge $K \subseteq E$ ist quasikompakt; vgl. auch Teil (c) der Aufgabe aus Abschnitt 4.9.

(b) Ist E quasikompakt, E' ein Hausdorff-Raum und f bijektiv, so ist f bereits ein Homöomorphismus (vgl. Definition 2 aus Abschnitt 12.4).

Aufgabe 3. Es gibt keine injektiven *Peano-Wege*, d.h. keine bijektiven stetigen Abbildungen

$$\alpha\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1].$$

Proposition 4 (Extremwerte auf quasikompakten Mengen)**.** Ist K eine quasikompakte Teilmenge eines topologischen Raumes E, so nimmt jede stetige Funktion $f\colon K \to \mathbf{R}$ ihr Maximum und Minimum in K an; vgl. auch Abschnitt 4.10.

Ein wichtiger Schritt bei dem Beweis dieser Proposition ist der Beweis des folgenden Lemmas.

Lemma 2. In einem metrischen Raum ist jede kompakte Teilmenge beschränkt (vgl. Abschnit 4.10).

Lebesguesches Lemma. Ist K eine folgenkompakte Teilmenge eines metrischen Raumes E, so existiert zu jeder offenen Überdeckung $(G_i)_{i\in I}$ von K ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, eine sogenannte *Lebesguesche Zahl* der Überdeckung, so daß

$$\forall p \in K\, \exists i \in I\colon U_\varepsilon(p) \subseteq G_i.$$

Insbesondere gilt daher: Ist A eine Teilmenge von E mit Durchmesser $\operatorname{diam}(A) < \varepsilon$ (vgl. die Aufgabe aus Abschnitt 4.14) und gilt $A \cap K \neq \emptyset$, so existiert ein $i \in I$ mit $A \subseteq G_i$.

Beweis. Angenommen, es gebe eine folgenkompakte Teilmenge von E und eine offene Überdeckung $(G_i)_{i\in I}$ von K, zu der keine Lebesguesche Zahl existiert. Insbesondere können wir dann aufgrund des Auswahlaxioms zu jedem $n \in \mathbf{N}_1$ eine Teilmenge $A_n \subseteq E$ mit $A_n \cap K \neq \emptyset$ und mit

$$\operatorname{diam}(A_n) < 1/n$$

und

$$\forall i \in I\colon A_n \not\subseteq G_i$$

wählen. Wiederum nach dem Auswahlaxiom können wir gleichzeitig für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ ein $p_n \in A_n \cap K$ wählen.

Da K folgenkompakt ist, existiert dann eine Teilfolge $(p_{n_k})_k$, die gegen ein $p^* \in K$ konvergiert. Weiterhin gibt es ein $i_0 \in I$ mit $p^* \in G_{i_0}$. Weil G_{i_0} offen ist, existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß

$$U_{2\delta}(p^*) \subseteq G_{i_0}$$

ist. Wegen $p^* = \lim_k p_{n_k}$ existiert schließlich ein n^* mit $d(p_{n^*}, p^*) < \delta$ und $1/n^* < \delta$. Dann folgt $A_{n^*} \subseteq G_{i_0}$, ein Widerspruch. Denn: Für jedes $p \in A_{n^*}$ gilt $d(p,p^*) \leq d(p,p_{n^*}) + d(p_{n^*},p^*)$, wobei $d(p_{n^*},p^*) < \delta$ und $d(p,p_{n^*}) \leq \operatorname{diam}(A_{n^*}) < 1/n^* < \delta$; damit ist $d(p,p^*) < 2\delta$, also $p \in U_{2\delta}(p^*) \subseteq G_{i_0}$. □

Theorem. In einem metrischen Raum E ist eine Teilmenge K genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß in metrischen Räumen die Begriffe „kompakt“ und „quasikompakt“ austauschbar sind, da metrische Räume hausdorffsch sind.

$\Longrightarrow$ **.** Es sei K kompakt und $(p_n)_{n\geq m}$ eine Folge von Punkten $p_n \in K$. Wir nehmen an, daß $(p_n)_{n\geq m}$ keine Teilfolge besitzt, die in K konvergiert. Damit existiert für alle $p \in K$ ein $\varepsilon(p) \in \mathbf{R}_+$, so daß $\#\{n \mid p_n \in U_{\varepsilon(p)}(p)\} < \infty$. (Denn wenn dies für ein $p \in K$ nicht richtig wäre, lägen in allen Umgebungen $U_{1/k}(p)$ mit $k \in \mathbf{N}_1$ unendlich viele Glieder der Folge $(p_n)_{n\geq m}$; deswegen ließe sich aus $(p_n)_{n\geq m}$ dann eine gegen p konvergierende Teilfolge extrahieren.) Da K kompakt und $(U_{\varepsilon(p)})_{p\in K}$ eine offene Überdeckung von K ist, existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq K$, so daß bereits $\bigcup\limits_{p\in J} U_{\varepsilon(p)}(p) \supseteq K$. Damit könnten aber nur endlich viele Punkte p_n in K liegen, d.h. $\#\{p_n \mid n \geq m\} < \infty$, ein Widerspruch. Damit haben wir bewiesen, daß K doch folgenkompakt ist.

$\Longleftarrow$ **.** Sei K jetzt als folgenkompakt vorausgesetzt und eine offene Überdeckung $(G_i)_{i\in I}$ von K vorgegeben. Hierzu existiert nach dem Lebesgueschen Lemma eine Lebesguesche Zahl $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$. Für jedes $p \in E$ gilt wegen der Dreiecksungleichung, daß $\operatorname{diam}(U_\delta(p)) < \varepsilon$ mit $\delta := \varepsilon/3$. Aufgrund der Eigenschaft der Lebesgueschen Zahl ε gilt daher

$$\forall p \in K\, \exists i \in I\colon U_\delta(p) \subseteq G_{i(p)}.$$

Daher genügt es zu zeigen, daß eine endliche Menge $J \subseteq K$ mit $\bigcup\limits_{p\in J} U_\delta(p) \supseteq K$ existiert. (Denn dann gilt ja erst recht $\bigcup\limits_{p\in J} G_{i(p)} \supseteq K$, womit wir die Kompaktheit von K bewiesen haben.)

Nehmen wir an, eine solche Menge J existiere nicht. Dann können wir nach dem Auswahlaxiom für jede endliche Teilmenge $J \subseteq K$ ein $q_J \in K \setminus \bigcup\limits_{p\in J} U_\delta(p)$ auswählen. Hiermit definieren wir rekursiv eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ durch $p_0 := q_\emptyset$ und $p_{n+1} := q_{\{p_0,\ldots,p_n\}}$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Nach Konstruktion gilt dann jeweils $p_{n+1} \in K \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{n} U_\delta(p_k)$; also

$$\forall n, m \in \mathbf{N}_0\colon \big(n \neq m \implies d(p_n, p_m) \geq \delta\big).$$

Da K als folgenkompakt vorausgesetzt ist, besitzt die Folge $(p_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ eine konvergente Teilfolge, welche natürlich eine Cauchyfolge ist; dies ist allerdings ein Widerspruch zu $d(p_n, p_m) \geq \delta$ für $n \neq m$. Damit ist der Beweis vollendet. □

Indem wir dieses Theorem mit Teil (c) des Korollars aus Abschnitt 12.1 verbinden, erhalten wir:

Theorem von Heine/Borel. In jedem endlich-dimensionalen normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum E ist eine Teilmenge $K \in \mathfrak{P}(E)$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Es sei beachtet, daß in beliebigen metrischen Räumen die Rückrichtung, das heißt die Tatsache, daß kompakte Teilmengen abgeschlossen und beschränkt sind, stets gilt.

Beispiel 2. Die Intervalle $[a, b]$ mit $-\infty < a \leq b < \infty$ sind kompakte Teilmengen von $\mathbf{R}$; die n-dimensionale Sphäre

$$\mathbf{S}^n := \left\{ p \in \mathbf{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = 1 \right\}$$

ist ein kompakter Raum.

Aufgabe 4. Es seien E ein beliebiger topologischer Raum, $\alpha\colon [a,b] \to E$ ein Weg in E mit $-\infty < a < b < \infty$ und $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung der Spur $\alpha([a,b])$ des Weges α. Dann existiert eine äquidistante Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots t_n = b$ des Intervalls $[a,b]$, so daß jedes Teilstück $\alpha|[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$, des Weges jeweils ganz in einer Teilmengen V_i verläuft.

(Tip: Man verwende das Theorem aus Abschnitt 12.4.)

Aufgabe 5. Die Räume $\widehat{\mathbf{R}}$ und $\widehat{\mathbf{C}}$ sind kompakt (vgl. Beispiel (c) aus Abschnitt 12.2 und die Aufgabe aus Abschnitt 12.4).

(Tip: Unter Verwendung der Aufgabe aus Abschnitt 12.4 kann man für $\widehat{\mathbf{C}}$ einen ganz kurzen Beweis geben.)

Aufgabe 6. Es sei E ein metrischer Raum, in dem der Satz von Heine–Borel gelte, d. h. jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von E sei kompakt. Man zeige, daß E notwendigerweise vollständig ist.

Kommentar 1. Ist X ein kompakter Raum, so gibt über die Kompaktheit von Teilmengen in dem Banachraum $(C^0(X, \mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$ der berühmte Satz von Arzelà–Ascoli Auskunft.

Kommentar 2. Die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ sind *relative* Begriffe, d. h. sie ergeben nur Sinn für *Teilmengen* eines fixierten topologischen Raumes. Hingegen haben die Begriffe „zusammenhängend“, „hausdorffsch“, „quasikompakt“ und „kompakt“ einen absoluten Charakter: Diese Eigenschaften kommen topologischen Räumen zu; und wenn sie auf Teilmengen angewendet werden, so sind diese als topologische Teilräume zu betrachten.

12.10 Hilberträume

Thematisch gehört dieser Abschnitt in Kapitel 5, wo normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume eingeführt wurden. Zu diesem Zeitpunkt waren jedoch die einschlägigen Kenntnisse aus der Linearen Algebra noch nicht vorhanden. Für das folgende müssen wir wissen, was ein Skalarprodukt auf einem reellen bzw. komplexen Vektorraum ist. Dabei schließen wir uns der Physiker-Konvention an, daß komplexe Skalarprodukte im ersten Argument antilinear und im zweiten Argument linear sind.

Definition 1. Ein *Prähilbertraum H* über dem Körper $\mathbf{K}$ ist ein $\mathbf{K}$-Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ versehen ist. Ist $\dim H < \infty$, so sprechen wir bekanntlich von einem *euklidischen* bzw. einem *unitären* Vektorraum, je nachdem ob $\mathbf{K}$ der Körper der reellen oder der Körper der komplexen Zahlen ist.

Aufgrund der positiven Definitheit von Skalarprodukten wird durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad v \in H$$

auf H eine Norm definiert. Prähilberträume werden immer auf diese Weise als normierte Vektorräume aufgefaßt. Ist der so entstehende normierte Vektorraum vollständig (also ein Banachraum), so heißt H (zusammen mit dem zugrundeliegenden Skalarprodukt) ein *Hilbertraum.*

Ein Beispiel für einen nicht vollständigen Prähilbertraum liefert der $\mathbf{K}$-Vektorraum $C^0([a,b],\mathbf{K})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b \overline{f}g\,dx.$$

Ein wesentlicher Sinn der Lebesgueschen Integrationstheorie besteht darin, diesen Raum zu einem Hilbertraum zu vervollständigen.

Proposition 1. In einem Prähilbertraum H gilt die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung,

$$\forall v, w \in H\colon\ |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|\,,$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn v und w linear abhängig sind.

Aufgrund der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung ist folgende Definition des Winkels möglich:

Definition 2. Zwei Vektoren v, $w \in H$ in einem Prähilbertraum H heißen *orthogonal*, wenn $\langle v, w\rangle = 0$ ist. Allgemeiner ist der Winkel zwischen v und w im Falle v, $w \neq 0$ durch

$$\measuredangle(v, w) := \arccos\Big(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}\Big)$$

definiert.

Konsequenz der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung ist ebenfalls:

Korollar 1. Ist H ein $\mathbf{K}$-Prähilbertraum, so ist die Funktion

$$H \times H \to \mathbf{K}, (v, w) \to \langle v, w\rangle$$

stetig.

Da selbst im Fall $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ diese Funktion $\mathbf{R}$-bilinar ist, können wir die Aussagen dieser Vorlesung anwenden, die wir für stetige bilineare Abbildungen B formuliert haben; vgl. Abschnitt 5.4, Abschnitt 5.13 (Produkte von Reihen), Abschnitt 6.7 (Produktregel) und Abschnitt 8.7 (partielle Integration).

Proposition 2. In jedem Prähilbertraum H gilt die Parallelogrammgleichung

$$\forall v, w \in H\colon \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Beweis. Unter Ausnutzung der $\mathbf{R}$-Bilinearität des Skalarproduktes erhalten wir

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle + \langle v - w, v - w\rangle\\ &= 2\,\langle v, v\rangle + 2\,\langle w, w\rangle\\ &= 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.\end{aligned}$$

□

Proposition 3. Sei H ein endlich-dimensionaler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(a_1, \dots, a_n)$, d. h.

$$\forall i, k = 1, \dots, n\colon \; \langle a_i, a_k \rangle = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k. \end{cases}$$

Dann gilt für alle $v \in H$ die „Fourierdarstellung"

$$v = \sum_i \langle a_i, v \rangle \cdot a_i$$

und für alle v, w die „Parsevalschen Gleichungen"

$$\langle v, w \rangle = \sum_i \langle v, a_i \rangle \cdot \langle a_i, w \rangle \,,$$
$$\|v\|^2 = \sum_i |\langle a_i, v \rangle|^2 \,.$$

Die Bezeichnungen für diese Identitäten sind der Funktionalanalysis entnommen. Dort wird ein geeigneter Begriff von Orthonormalbasis auch für unendlich-dimensionale Hilberträume eingeführt; damit lassen sich dann die Fourierdarstellung und die Parsevalschen Gleichungen in der unendlich-dimensionalen Situation erhalten.

Proposition 4. Ist $M \subseteq H$ eine Teilmenge eines Prähilbertraumes H, so ist

$$M^\perp := \{u \in H \mid \forall v \in M\colon \; \langle u, v \rangle = 0\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von H.

Theorem. Ist U ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes H, so ist

$$H = U \oplus U^\perp,$$

d. h. jeder Vektor $v \in H$ kann auf genau eine Weise in der Form $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in U$ und $v_2 \in U^\perp$ geschrieben werden. Wir nennen $U^\perp$ das *orthogonale Komplement* von U.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Summe von U und $U^\perp$ direkt ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß $U \cap U^\perp = \emptyset$. Sei also $v \in U \cap U^\perp$. Es folgt $\langle v, v \rangle = 0$ und aufgrund der positiven Definitheit des Skalarproduktes damit $v = 0$.

Sei jetzt $v \in H$ beliebig. Wir müssen zeigen, daß es $v_1 \in U$ und $v_2 \in U^\perp$ gibt, so daß $v = v_1 + v_2$. Dazu betrachten wir den „quadratischen Abstand von v zu U", d. h.

$$d := \inf\{\|u - v\|^2 \mid u \in U\}.$$

Da $U \neq \emptyset$ und $\|\cdot\|^2 \geq 0$ folgt $d \in [0, \infty[$.

Nach Definition des Infimums können wir nach dem Auswahlaxiom eine Folge $(u_n)_{n \geq 1}$ in U mit $\|u_n - v\|^2 < d + 1/n$ wählen. Für n, $m \geq 1$ gilt dann nach der Parallelogrammungleichung

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &= \|(u_n - v) - (u_m - v)\|^2 \\ &= 2\|u_n - v\|^2 + 2\|u_n - v\|^2 - \|u_n + u_m - 2v\|^2 \\ &< 2(d + 1/n) + 2(d + 1/m) - 4\|(u_n + u_m)/2 - v\|^2 \\ &\leq 2(d + 1/n) + 2(d + 1/m) - 4d \\ &= 2/n + 2/m, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Ungleichung ausgenutzt haben, daß $(u_n + u_m)/2 \in U$. Ist dann zu vorgegebenem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ eine Zahl $n_0 \in \mathbf{N}_1$ mit $n_0 \geq 4/\varepsilon^2$ gewählt, so folgt $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ für alle n, $m \geq n_0$. Damit ist $(u_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchyfolge.

Da U als abgeschlossener Unterraumes eines Hilbertraumes wieder abgeschlossen ist, folgt, daß

$$v_1 := \lim_{n\to\infty} u_n \in U$$

existiert. Es folgt

$$\|v_1 - v\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|u_n - v\|^2 = d.$$

Wir setzen dann

$$v_2 := v - v_1.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $v_2 \in U^\perp$, daß also $\langle u, v_2\rangle = 0$ für alle $u \in U$. Dazu betrachten wir für $\alpha \in \mathbf{C}$ die Funktion

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \|t\alpha u - v_2\|^2 = \|t\alpha u + v_1 - v\|^2 = d + 2t\Re(\overline{\alpha}\,\langle u, v_2\rangle) + t^2\,|\alpha|^2\,\|u\|^2\,.$$

Nach Definition von v_1 nimmt f an der Stelle $t = 0$ das Minimum an. Nach dem notwendigen Kriterium für lokale Extrema aus Abschnitt 6.8 folgt $f'(0) = 0$, also $\Re(\overline{\alpha}\,\langle u, v_2\rangle) = 0$. In dem wir $\alpha = 1$ oder $\alpha = i$ setzen, sehen wir, daß $\langle u, v_2\rangle = 0$. □

Kommentar. In einem beliebigen Banachraum E gibt es zu einem abgeschlossenen Untervektorraum U unter Umständen keinen abgeschlossenen Untervektorraum U', so daß $E = U \oplus U'$ gelten würde.

Korollar 2 (Rieszscher Darstellungssatz)**.** In jedem $\mathbf{K}$-Hilbertraum existiert zu jeder stetigen Linearform $\lambda\colon H \to \mathbf{K}$ genau ein Vektor $u \in H$, so daß

$$\forall v \in H\colon \lambda(v) = \langle u, v\rangle$$

gilt.

Beweis. Weisen wir zunächst die Eindeutigkeit von $u \in H$ nach. Seien etwa u_1, $u_2 \in H$ mit $\lambda(v) = \langle u_1, v\rangle = \langle u_2, v\rangle$ für alle $v \in H$. Es folgt $\langle u_1 - u_2, v\rangle = 0$. Setzen wir $v = u_1 - u_2$, so folgt aus der positiven Definitheit des Skalarproduktes $u_1 - u_2 = 0$, also $u_1 = u_2$ und damit Eindeutigkeit.

Um die Existenz von u zu beweisen, definieren wir den Unterraum $U := \ker\lambda$. Dieser ist abgeschlossen, da λ nach Voraussetzung eine stetige Linearform ist (vgl. Beispiel 2 aus Abschnitt 12.7). Weiter können wir davon ausgehen, daß $U \subsetneq H$, denn sonst wäre $\lambda \equiv 0$ und wir könnten einfach $u = 0$ wählen.

Nach obigem Theorem gilt $H = U \oplus U^\perp$ und $U^\perp \neq 0$ (denn sonst müßte $U = H$ gelten). Damit existiert ein $\tilde{u} \in U^\perp$ mit $\tilde{u} \neq 0$, also $\lambda(\tilde{u}) \neq 0$, da $\ker\lambda \cap U^\perp = 0$. Wir setzen dann $u := \alpha\tilde{u}$ mit $\alpha = \overline{\lambda(\tilde{u})}/\langle\tilde{u}, \tilde{u}\rangle$. Es folgt damit $\lambda(u) = |\alpha|^2\,\langle\tilde{u}, \tilde{u}\rangle = \langle u, u\rangle$.

Ist dann $v \in H$ beliebig, so können wir $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 = v - (\lambda(v)/\langle u, u\rangle)u$ und $v_2 = (\lambda(v)/\langle u, u\rangle)u$ schreiben. Es folgt $\lambda(v_1) = 0$, also $v_1 \in U$, also $\langle u, v_1\rangle = 0$. Weiter ist $\lambda(v_2) = \lambda(v) = \langle u, v_2\rangle$. Aufgrund der Linearität des Skalarproduktes in der zweiten Variablen folgt $\lambda(v) = \langle u, v\rangle$. □

Aufgabe 1. Man beweise den Rieszschen Darstellungssatz für endlich-dimensionale Hilberträume ohne Verwendung des obigen Theorems.

(Tip: ist $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Orthonormalbasis des fraglichen Hilbertraumes, so betrachte man $u := \sum_i \overline{\lambda(a_i)} \cdot a_i$.)

Aufgabe 2. Es seien H und H' jeweils $\mathbf{K}$-Hilberträume, $n := \dim H < \infty$, und es sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Orthonormalbasis von H. Man zeige, daß auf dem $\mathbf{K}$-Vektorraum $L(H, H')$ (vgl. Abschnitt 11.7) durch

$$\langle A, B \rangle := \sum_i \langle Aa_i, Ba_i \rangle$$

ein Skalarprodukt definiert wird, daß dieses von der speziellen Wahl der Orthonormalbasis $(a_1, \ldots, a_n)$ unabhängig ist, und daß gilt

$$\forall A \in L(H, H')\, \forall v \in H \colon \|Av\|^2 \leq \langle A, A \rangle \cdot \|v\|^2.$$

Schließlich ist die durch $\sqrt{\langle A, A \rangle}$ definierte Norm äquivalent zur Operatornorm $\|\cdot\|$ (vgl. Abschnit 11.7), und es wird $L(H, H')$ mit dieser Norm zu einem Hilbertraum.

Aufgabe 3. Es sei H ein $\mathbf{K}$-Hilbertraum und $f \in C^0([a, b], H)$. Gilt

$$\left\| \int_a^b f \, dx \right\| = \int_a^b \|f\| \, dx,$$

so existiert eine Funktion $\varphi \in C^0([a, b], \mathbf{K})$, so daß

$$f = \varphi \cdot v \quad \text{mit} \quad v := \int_a^b f \, dx$$

gilt.

(Tip: $\left\langle v, \int\limits_a^b f \, dx \right\rangle$.)

Aufgabe 4 (Der Hilbertsche Folgenraum ℓ^2)**.** Es sei $V := \{a \colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{K}\}$ der Vektorraum der $\mathbf{K}$-wertigen Funktionen auf $\mathbf{N}_0$ (also der $\mathbf{K}$-wertigen Folgen),

$$N \colon V \to \widehat{\mathbf{R}}, a \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} |a(k)|^2$$

und

$$\ell^2 := \{a \in V \mid N(a) < \infty\}.$$

Man zeige:

(a) Für a, $b \in \ell^2$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{a(k)} \cdot b(k)$ in $\mathbf{K}$. Daher können wir

$$\langle a, b \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a(k)} \cdot b(k)$$

definieren. Es gilt

$$\forall a, b \in \ell^2\colon\ |\langle a, b\rangle|^2 \leq N(a) \cdot N(b).$$

(Tip: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \overline{a(k)} \cdot b(k) = \langle (a(0), \ldots, a(n-1)), (b(0), \ldots, b(n-1))\rangle_{\mathbf{K}^n}$.)

(b) ℓ^2 ist ein Untervektorraum von V und $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein **K**-Prähilbertraum.

(Tip: $N(a+b) = ?$.)

(c) $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist vollständig und somit ein **K**-Hilbertraum.

(Tip: Ist $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge in $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, so ist für jedes $k \in \mathbf{N}_0$ die Folge $(a_n(k))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{K}$. — Definiert man $N_j(a) := \sum\limits_{k=0}^{j} |a(k)|^2$ für $a \in \ell^2$, so gilt $N_j(a_n - a_m) \leq N(a_n - a_m)$. — Es könnte hilfreich sein, sich den Beweis des Theorems 2 aus Abschnitt 5.6 anzuschauen.)

Mit dem detaillierten Studium der (unendlich-dimensionalen) Hilberträume beschäftigt sich die Funktionalanalysis. Es sollte auch bemerkt werden, daß der Begriff des Hilbertraumes für die Quantentheorie von grundlegender Bedeutung ist.

Kapitel 13

Differentialrechnung in Banachräumen

Festsetzung. In diesem Kapitel seien E und F (sowie jeder andere Banachraum) stets reelle Banachräume, G eine offene Teilmenge von E, $f\colon G \to F$ eine Funktion, und $a \in G$.

Wir wollen in diesem Kapitel die Differentialrechnung von Funktionen $f\colon G \to F$ behandeln. In den Kapiteln 6 und 9 ist dies bereits für $E = \mathbf{R}$ geschehen.

13.1 Partielle Differenzierbarkeit

Zunächst werden wir uns mit dem Fall $E = \mathbf{R}^n$ beschäftigen. Dazu sei G eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbf{R}^n$ und $x_1, \ldots, x_n\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ die kanonischen Koordinatenfunktionen wie in Abschnitt 3.3.

Definition 1. Eine Funktion $f\colon G \to F$ heißt in $a \in G$ *partiell nach x_k differenzierbar*, wenn die Funktion

$$t \mapsto f(a + t \cdot e_k)$$

im Sinne von Abschnitt 6.4 in $t = 0$ differenzierbar, d. h. wenn die *partielle Ableitung*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \coloneqq \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_k) - f(a)}{t} \in F$$

existiert.

Die Berechnung dieser partiellen Ableitung (im Falle ihrer Existenz) geschieht dadurch, daß in f die Variablen x_i für $i \neq k$ durch die Konstanten $a_i \coloneqq x_i(a)$ ersetzt und die so entstehende Funktion nach der einzigen verbliebenen Variablen x_k an der Stelle $a_k \coloneqq x_k(a)$ differenziert wird. Existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ für alle $a \in G$, so können wir uns zur Berechnung der Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\colon a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

das Einsetzen der Konstanten a_i ersparen; wir denken uns einfach die x_i als konstant und führen dann die erforderliche Differentiation durch.

Beispiel. Für $f = \sin(x_1 \cdot x_2)$ erhalten wir beispielsweise die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \cdot \cos(x_1 \cdot x_2).$$

Definition 2. Sei G_k der offene Kern der Teilmenge aller Punkte $p \in G$, für die die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_k}(p)$ existiert. Ist die Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \colon G_k \to F$$

dann in $p \in G_k$ partiell nach x_i differenzierbar, so schreiben wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(p) \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k}(p).$$

Im Falle $i = k$ kürzen wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(p) \coloneqq \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}(p)$$

ab.

Rekursiv werden nach demselben Verfahren die weiteren höheren partiellen Ableitungen definiert.

Existieren auf ganz G alle möglichen partiellen Ableitungen bis (einschließlich) zu der Ordnung r und sind diese auch noch stetige Funktionen $G \to F$, so heißt f eine C^r-Funktion. Ist f eine C^r-Funktion für alle $r \in \mathbf{N}_0$, so wird f eine C^∞-Funktion genannt.

Definition 3. Ist $f = (f_1, \dots, f_m) \colon G \to \mathbf{R}^m$ eine Funktion, für die in $a \in G$ die partiellen Ableitungen nach den Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_n$ existieren, so heißt

$$J_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

die *Jacobische* oder *Funktionalmatrix* von f in a.

Definition 4. Für eine Funktion $f \colon G \to \mathbf{R}$, die in a alle partiellen Ableitungen bis mindestens zur zweiten Ordnung besitzt, heißt

$$H_a f \coloneqq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a) \right)_{i,k=1,\dots,n}$$

die *Hessesche Matrix* von f in a.

Proposition. Sind f, $g \colon G \to F$ und $\varphi \colon G \to \mathbf{R}$ in a partiell nach x_k differenzierbar, so sind auch $f + g$, $\varphi \cdot f$ in a partiell nach x_k differenzierbar.

13.2 Differenzierbarkeit in höheren Dimensionen

Ist $\dim E = n$, so könnte ein erster Versuch, die Differenzierbarkeit von Funktionen $f\colon G \to F$ zu definieren, wie folgt aussehen: Wir wählen eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von E. Diese induziert einen Vektorraumisomorphismus

$$\Phi\colon \mathbf{R}^n \to E, u \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot b_i$$

mit Umkehrabbildung $\check{\Phi}$. Dann ist $\tilde{G} := \check{\Phi}(G)$ eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ und $\tilde{a} := \check{\Phi}(a)$ ein Punkt in $\tilde{G}$. Wir können dann die partielle Differenzierbarkeit von $f \circ \Phi\colon \tilde{G} \to F$ in $\tilde{a}$ nach $x_1, \ldots, x_n$ untersuchen, d. h. wir untersuchen die infinitesimale Änderung von f in a in die Richtungen $b_1, \ldots, b_n$. Da die Basiswahl $(b_1, \ldots, b_n)$ jedoch im allgemeinen völlig willkürlich sein wird, sind diese speziellen Änderungen i. a. auch nicht von besonderer Bedeutung.

Einen zufriedenstellenden Differenzierbarkeitsbegriff erhalten wir jedoch, wenn wir die Idee der linearen Approximierbarkeit aus Abschnitt 6.5 auf höhere Dimensionen übertragen.

Definition. Eine Funktion $f\colon G \to F$ heißt *in $a \in G$ differenzierbar*, wenn es eine stetige lineare Abbildung $A \in \mathrm{L}(E, F)$ und eine Funktion $R\colon G \to F$ gibt, so daß

$$\forall p \in G\colon f(p) = f(a) + A(p - a) + R(p) \tag{1}$$

gilt, wobei das „Restglied“ R für $p \to a$ *stärker als von erster Ordnung gegen* 0 *geht*, d. h.

$$\lim_{p \to a} \frac{R(p)}{\|p - a\|} = 0. \tag{2}$$

Die Funktion f heißt *differenzierbar*, wenn f in allen Punkten $p \in G$ differenzierbar ist.

Kommentar.

(a) Aus (1) folgt $R(a) = 0$ und aus (2) die Stetigkeit von R in a. Ist f in a differenzierbar, so ist daher f in a erst recht stetig.

(b) Ob f in a differenzierbar ist, hängt im allgemeinen von den zugrundeliegenden Normen der Vektorräume E und F ab. Ist jedoch E bzw. F endlich-dimensional, so spielt die spezielle Wahl der entsprechenden Norm (wegen Abschnitt 12.1) keine Rolle.

Theorem. Ist $f\colon G \to F$ in a differenzierbar, so ist die lineare Abbildung A aus (1) durch f eindeutig festgelegt. Sie wird mit $D_a f$ oder $d_a f$ bezeichnet und das *(totale) Differential* von f in a genannt. (Die unterschiedlichen Bezeichnungen gehen darauf zurück, daß $D_a^2 f$ und $d_a^2 f$ unterschiedliche Differentiationsprozesse zweiter Ordnung beschreiben.)

Für jedes $v \in E$ gilt

$$D_a f(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t}.$$

Im Falle von $v \neq 0$ schreiben wir auch

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = D_a f(v)$$

und sprechen von der *(Richtungs-)Ableitung von f in a in Richtung v.*

Ein Verfahren zum Beweis der Differenzierbarkeit ist das folgende: Wir raten $A = D_a f$ und prüfen dann, ob

$$\lim_{p \to a} \frac{f(p) - f(a) - A(p - a)}{\|p - a\|} = 0.$$

Beispiele.

(a) Ist $f \equiv \text{const.}$, so ist f differenzierbar mit

$$\forall a \in G \colon D_a f = 0 \in \mathrm{L}(E, F).$$

(b) Jede stetige lineare Abbildung $A \in \mathrm{L}(E, F)$ ist differenzierbar mit

$$\forall a \in G \colon D_a A = A.$$

Wichtiger Spezialfall. Die Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_n$ des $\mathbf{R}^n$ sind differenzierbar mit

$$\forall p \in \mathbf{R}^n \, \forall v \in \mathbf{R}^n \colon d_p x_i(v) = x_i(v) = v_i.$$

(c) Es sei $J \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f \colon J \to F$ ist genau dann im obigen Sinne in $a \in J$ differenzierbar, wenn f im Sinne von Abschnitt 6.4 differenzierbar ist. Im Falle der Differenzierbarkeit gilt

$$\forall t \in \mathbf{R} \colon D_a f(t) = t \cdot f'(a),$$

also insbesondere

$$f'(a) = D_a f(1).$$

(d) Es seien $E = \mathbf{R}^n$ und $f \colon G \to F$ in a differenzierbar. Dann ist f in a partiell nach den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ des $\mathbf{R}^n$ differenzierbar und

$$d_a f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot d_a x_i.$$

Ist außerdem $F = \mathbf{R}^m$, also $f = (f_1, \ldots, f_m)$, so können wir $D_a f$ mit der Jacobischen Matrix $J_a f$ aus Abschnitt 13.1 berechnen:

$$D_a f(v) = (J_a f) \cdot v,$$

wobei auf der rechten Seite eine Matrixmultiplikation steht.

(e) Es sei $F = \prod_{i=1}^{m} F_i$ das Produkt von Banachräumen $F_1, \ldots, F_m$ und $f = (f_1, \ldots, f_m)$ mit Funktionen $f_i \colon G \to F_i$. Dann ist f genau dann in $a \in G$ differenzierbar, wenn alle Komponentenfunktionen $f_i \colon G \to F_i$ in a differenzierbar sind. Im Falle der Differenzierbarkeit ist

$$\forall v \in E \colon D_a f(v) = \big(D_a f_i(v)\big)_{i=1,\ldots,m}.$$

Wichtiger Spezialfall. Ist $F_1 = \cdots = F_m = \mathbf{R}$, so wird damit das Problem der Differenzierbarkeit einer Funktion $f \colon G \to \mathbf{R}^m$ auf die Untersuchung von Funktionen der Form $G \to \mathbf{R}$ reduziert.

Aufgabe 1 (Höhenfunktionen)**.** Seien H ein Hilbertraum, $p_0, u \in H$, und h die *Höhenfunktion*

$$h \colon H \to \mathbf{R}, p \mapsto \langle p - p_0, u \rangle .$$

Man zeige, daß h differenzierbar ist, und daß

$$\forall a \in H \, \forall v \in H \colon D_a h(v) = \langle v, u \rangle$$

gilt.

(Offenbar ist die Gleichung $h(p) = 0$ die *Hessesche Normalform* der Gleichung der Hyperebene E durch p_0, die senkrecht zu u ist, und $|h(p)|$ ist der Abstand von p zu E.)

Aufgabe 2 (Über anziehende und abstoßende Fixpunkte)**.** Es sei $G \subseteq E$ eine offene Teilmenge eines Banachraumes und $f \colon G \to E$ eine in $a \in G$ differenzierbare Abbildung mit Fixpunkt a. Die Norm von E induziert gemäß Abschnitt 11.7 bekanntlich eine Norm auf $\mathrm{L}(E, E)$. Damit ist $\|D_a f\|$ definiert. Man zeige:

(a) Ist

$$\|D_a f\| < 1, \tag{3}$$

so ist a ein Attraktor von f.

(b) Existiert hingegen ein $M > 1$, so daß

$$\forall v \in E \colon \; \|D_a f(v)\| \geq M \cdot \|v\| , \tag{4}$$

so ist a ein abstoßender Fixpunkt von f. (Man beachte, daß (4) nicht aus $\|D_a f\| \geq M$ folgt; warum eigentlich nicht?)

(c) Ist a ein nicht isolierter Fixpunkt (vgl. Definition (c) aus Abschnitt 6.2), so gilt weder Voraussetzung (3) noch (4). Im Falle $\dim E < \infty$ ist dann außerdem $\lambda = 1$ ein Eigenwert des Endomorphismus $D_a f \colon E \to E$.

13.3 Lineare Operationen mit differenzierbaren Funktionen

Proposition. Sind f, $g\colon G \to F$ in $a \in G$ differenzierbar und ist $c \in \mathbf{R}$, so sind auch $f+g$ und $c \cdot f$ in a differenzierbar mit

$$D_a(f+g) = D_a f + D_a g \quad \text{und} \quad D_a(c \cdot f) = c \cdot D_a f.$$

13.4 Kettenregel

Theorem. Es seien E, E' und E'' Banachräume, $G \subseteq E$ und $G' \subseteq E'$ offene Teilmengen $g\colon G \to E'$ eine in $a \in G$ differenzierbare Abbildung mit $g(G) \subseteq G'$ und $f\colon G' \to E''$ eine in $b \coloneqq g(a)$ differenzierbare Funktion. Dann ist $f \circ g\colon G \to E''$ in a differenzierbar und

$$D_a(f \circ g) = \big(D_{g(a)} f\big) \circ (D_a g).$$

Wir haben also folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "D_a g"'] \arrow[rr, bend left, "D_a(f \circ g)"] & E' \arrow[r, "D_b f"'] & E'' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (G,a) \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & (G',b) \arrow[r, "f"] & E'' \end{tikzcd}$$

Kommentar. Wir wollen diesen Sachverhalt noch etwas geometrischer beschreiben. Dazu interpretieren wir ein Paar $(p,v) \in G \times E$ als einen in p angetragenen Vektor v in E. Für eine offene Teilmenge G von E und einen Punkt $p \in G$ nennen wir

$$T_p G \coloneqq \{p\} \times E = \{(p,v) \mid v \in E\}$$

den *Tangentialraum* von G in p und

$$TG \coloneqq \bigcup_{p \in G} T_p G = G \times E$$

das *Tangentialbündel* von G. Ist $f\colon G \to E'$ eine in $p \in G$ differenzierbare Abbildung, so definieren wir die *Tangentialabbildung* von f in p durch

$$T_p f\colon T_p G \to T_{f(p)} E', (p,v) \mapsto \big(f(p), D_p f(v)\big).$$

Ist f auf ganz G differenzierbar, so können wir weiterhin

$$Tf\colon TG \to TE' \coloneqq E' \times E', (p,v) \mapsto T_p f(p,v)$$

definieren. Entsprechend verfahren wir mit der Abbildung $g\colon G' \to E''$, die wir für das folgende Diagramm auch als differenzierbar auf ganz G' voraussetzen.

Die Kettenregel können wir jetzt sehr einprägsam durch das folgende kommutative Diagramm ausdrücken:

$$\begin{tikzcd}
TG \arrow[r, "Tg"'] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "T(f\circ g)"] & TG' \arrow[r, "Tf"'] \arrow[d] & TE'' \arrow[d] \\
G \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & G' \arrow[r, "f"] & E''
\end{tikzcd}$$

Hierbei stellen die vertikalen Pfeile die kanonischen Projektionen auf die erste Komponente dar.

Die Einführung des Tangentialraumes und der Tangentialabbildung sind für das geometrische bzw. physikalische Verständnis von großer Bedeutung. Hier wird die Zweideutigkeit von Elementen aus den zugrundeliegenden Vektorräumen wenigstens teilweise aufgelöst, d. h. ihre Interpretation einmal als Punkte und einmal als Richtungsvektoren. Offenbar ist das Differential die wesentliche Größe für die Abbildung von Richtungsvektoren.

Regeln.

(a) Sind $f\colon G \to F$ in a differenzierbar und $\alpha\colon J \to G$ ein in $s \in J$ differenzierbarer Weg mit $\alpha(s) = a$, so ist $f \circ \alpha$ eine in s differenzierbare Funktion mit der Ableitung

$$(f \circ \alpha)'(s) = (D_a f)(\alpha'(s)).$$

Ist insbesondere $E = \mathbf{R}^n$ und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, so ist

$$(f \circ \alpha)'(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i'(s).$$

(b) Sind $J \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall, $\varphi\colon J \to F$ eine in $s \in J$ differenzierbare Funktion, $f\colon G \to \mathbf{R}$ eine in $a \in G$ differenzierbare Funktion mit $f(G) \subseteq J$ und $f(a) = s$, so ist $\varphi \circ f$ eine in a differenzierbare Funktion mit dem totalen Differential

$$d_a(\varphi \circ f) = \varphi'(f(a)) \cdot d_a f.$$

(c) Sind $E = \mathbf{R}^n$, $E' = \mathbf{R}^{n'}$ und $E'' = \mathbf{R}^{n''}$ und sind im übrigen die Voraussetzungen des Theorems erfüllt, so erhalten wir die Funktionalmatrix von $f \circ g$ durch Matrixmultiplikation aus den Funktionalmatrizen von f und g:

$$J_a(f \circ g) = (J_{g(a)} f) \circ (J_a g).$$

Aufgabe 1. Es seien $b_1, \ldots, b_m$ irgendwelche Vektoren des Banachraumes F, $f_1, \ldots, f_m \colon G \to \mathbf{R}$ Funktionen und $f := \sum\limits_k f_k \cdot b_k$.

(a) Sind $f_1, \ldots, f_m$ in $a \in G$ differenzierbar, so ist auch f in a differenzierbar, und zwar gilt:
$$\forall v \in E \colon D_a f(v) = \sum_k D_a f_k(v) \cdot b_k.$$

(b) Ist $(b_1, \ldots, b_m)$ sogar eine Basis von F und ist f in a differenzierbar, so sind auch alle Funktionen f_k in a differenzierbar.

Definition. Eine Funktion $f \colon E \to F$ heißt *homogen* von einem Grad $n \in \mathbf{N}_0$, wenn
$$\forall p \in E, \lambda \in \mathbf{R} \colon f(\lambda \cdot p) = \lambda^n \cdot f(p);$$
sie heißt *positiv homogen* von einem Grad $r \in \mathbf{R}_+$, wenn
$$\forall p \in E, \lambda \in [0, \infty[\colon f(\lambda \cdot p) = \lambda^r \cdot f(p).$$

Beispiele. Ist $f \colon E \to \mathbf{R}$ eine (positiv) homogene Funktion vom Grad n, so ist die m-te Potenz f^m (positiv) homogen vom Grad $n \cdot m$. Jede Norm ist positiv homogen vom Grad 1, aber (im allgemeinen) nicht homogen. In Abschnitt 13.6 werden wir weitere homogene Funktionen kennenlernen, nämlich Polynome.

Aufgabe 2. Ist f stetig und auf $E \setminus \{0\}$ differenzierbar, so ist f genau dann positiv homogen vom Grad r, wenn f für $p \neq 0$ die folgende *Eulersche Differentialgleichung*
$$D_p f(p) = r \cdot f(p)$$
erfüllt. Man beachte, daß es sich hierbei um eine *partielle* Differentialgleichung handelt. (Tip: $y(t) := f(t \cdot p)$.)

Aufgabe 3 (Holomorphie von Funktionen)**.** Es sei $f \colon G \to \mathbf{C}$ eine Funktion, die auf einer offenen Teilmenge G von $\mathbf{C}$ definiert ist.

(a) Die Funktion f ist genau dann holomorph, wenn f als Abbildung von $G \subseteq \mathbf{R}^2$ in den $\mathbf{R}^2$ im Sinne dieses Kapitels differenzierbar ist und wenn in jedem Punkt $z \in G$ das Differential $D_z f$ eine $\mathbf{C}$-lineare Abbildung ist. Im Falle der Holomorphie gilt
$$\forall z \in G \,\forall w \in \mathbf{C} \colon D_z f(w) = f'(z) \cdot w.$$
(Tip: Abschnitt 6.5.)

(b) Ist $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, so stellt die $\mathbf{C}$-lineare Abbildung $A \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto a \cdot z$ eine *Drehstreckung* dar, d. h. es gibt ein $r \in \mathbf{R}_+$ und einen Winkel $\varphi \in \mathbf{R}$, so daß $\forall z \in \mathbf{C} \colon Az = rR_\varphi(z)$; vgl. Abschnitt 7.14.

(c) Wir sagen, daß sich zwei in 0 differenzierbare Wege α, $\beta \colon [0,1] \to G$ zum Zeitpunkt 0 unter einem Winkel φ schneiden, wenn $z_0 := \alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha'(0) \neq 0$, $\beta'(0) \neq 0$ und $\measuredangle(\alpha'(0), \beta'(0)) = \varphi$ gelten; vgl. Abschnitt 12.10. In dieser Situation zeige man: Ist f holomorph und $f'(z_0) \neq 0$, so schneiden sich auch die Bildwege $f \circ \alpha$ und $f \circ \beta$ zum Zeitpunkt 0 unter dem Winkel φ. Diese Eigenschaft wird als die *Winkeltreue* holomorpher Abbildungen bezeichnet.

13.5 Die Leibniz-Regel

Für den Begriff der *n-linearen Abbildung* verweisen wir auf die einschlägige Literatur der linearen Algebra.

Es sei $E = \prod_k E_k$ das Produkt normierter Vektorräume $(E_1, \|\cdot\|_1)$, ..., $(E_n, \|\cdot\|_n)$ und F ein weiterer normierter Vektorraum. Wir versehen E mit der Norm gegeben durch

$$\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in E \colon\ \|v\| \coloneqq \max\{\|v_k\|_k \mid k = 1, \dots, n\},$$

wodurch E bekanntlich zu einem normierten Vektorraum und insbesondere zu einem topologischen Raum wird. Mit $\mathrm{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ bezeichnen wir den Vektorraum aller *stetigen* n-linearen Abbildungen $\varphi \colon E \to F$. In Verallgemeinerung der Aussagen aus Aufgabe 2 aus Abschnitt 5.3 und des Theorems aus Abschnitt 5.4 gilt:

Proposition. Eine n-lineare Abbildung $\varphi \colon E = \prod_k E_k \to F$ ist genau dann stetig, wenn es eine Zahl $M \in [0, \infty[$ gibt, so daß

$$\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in E \colon\ \|\varphi(v)\| \leq M \cdot \|v_1\|_1 \cdots \|v_n\|_n\,. \tag{1}$$

Gilt (1) für eine solche Konstante M, so ist

$$\|\varphi\| \coloneqq \sup\{\|\varphi(v)\| \mid v \in E \wedge \|v\| \leq 1\}$$

die kleinste Zahl $M \in [0, \infty[$, für die (1) gilt. Die Funktion

$$\mathrm{L}(E_1, \dots, E_n; F) \to \mathbf{R}, \varphi \mapsto \|\varphi\|$$

ist eine Norm auf $\mathrm{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, welche diesen Raum zu einem normierten Vektorraum macht.

Es sei beachtet, daß im Falle von endlich-dimensionalen Räumen E_1, ..., E_n jede n-lineare Abbildung $\varphi \colon E \to F$ automatisch stetig ist; vgl. die Aufgabe aus Abschnitt 12.1.

Im folgenden seien E_1, ..., E_n und F nun Banachräume.

Theorem. Jede stetige n-lineare Abbildung $\varphi \colon E = \prod_k E_k \to F$ ist differenzierbar mit

$$\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in E\ \forall v = (v_1, \dots, v_n) \in E \colon$$
$$D_a\varphi(v) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(a_1, \dots, a_{k-1}, v_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Beispiel 1 (Leibnizregel)**.** Die wichtigsten Beispiele sind „stetige Produkte“, d. h. stetige bilineare, also 2-lineare, Abbildungen $B \colon E_1 \times E_2 \to F$. Diese sind also differenzierbar, und für sie gilt die *Leibniz-Regel*

$$\forall a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2\ \forall v = (v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 \colon D_a B(v) = B(v_1, a_2) + B(a_1, v_2).$$

Beispiel 2 (Universelle Produktregel)**.** Ist $B\colon E_1 \times E_2 \to F$ ein stetiges Produkt und sind $f_1\colon G \to E_1$ und $f_2\colon G \to E_2$ in $a \in G$ differenzierbar, so ist auch

$$g := B(f_1, f_2)\colon p \mapsto B(f_1(p), f_2(p))$$

in a differenzierbar, und für die Differentiale gilt die *universelle Produktregel*

$$\forall v \in E\colon D_a g(v) = B(D_a f_1(v), f_2(a)) + B(f_1(a), D_a f_2(v)).$$

Beispiele 3 (Konkrete Anwendungen)**.**

(a) Die Polarkoordinaten-Abbildung

$$F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

ist überall differenzierbar und hat im Punkt (r, φ) das Differential

$$D_{(r,\varphi)}F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, v \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

(b) In jedem Hilbertraum H ist die Funktion

$$g\colon H \to \mathbf{R}, p \mapsto \langle p, p \rangle$$

überall differenzierbar, und für ihr Differential gilt

$$\forall p \in H\, \forall v \in H\colon d_p g(v) = 2\langle p, v \rangle.$$

Daher ist für jedes $p_0 \in H$ die *Abstandsfunktion*

$$r\colon H \to \mathbf{R}, p \mapsto \|p - p_0\| = \sqrt{\langle p - p_0, p - p_0 \rangle}$$

in allen Punkten $p \neq p_0$ differenzierbar mit

$$d_p r(v) = \frac{1}{r(p)} \cdot \langle p - p_0, v \rangle = \left\langle \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}, v \right\rangle.$$

(c) Seien E, E' und E'' Banachräume und G eine offene Teilmenge von E. Ist dann eine Abbildung $F\colon G \to \mathrm{L}(E', E'')$ in $a \in G$ differenzierbar, so ist für jedes $w \in E'$ die Funktion

$$g\colon G \to E'', p \mapsto F(p)w := F(p)(w)$$

in a differenzierbar mit

$$\forall v \in E\colon D_a g(v) = (D_a F(v))w.$$

13.6 Polynome in vielen Dimensionen

Es seien E und F Banachräume und $n \in \mathbf{N}_0$ eine natürliche Zahl.

Definition. (a) Mit $\mathrm{L}^n(E, F)$ bezeichnen wir den normierten Vektorraum

$$\mathrm{L}(\underbrace{E, \ldots, E}_{n}; F),$$

und mit $\mathrm{L}^n_{\mathrm{sym}}(E, F)$ den abgeschlossenen Untervektorraum der *symmetrischen* Abbildungen $\varphi \in \mathrm{L}^n(E, F)$. Weiter sei

$$S\colon \mathrm{L}^n(E, F) \to \mathrm{L}^n_{\mathrm{sym}}(E, F), \varphi \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \varphi(\mathrm{pr}_{\pi(1)}, \ldots, \mathrm{pr}_{\pi(n)})$$

der *Symmetrisierungsoperator*; dabei wird die Summe über die $n!$ vielen Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ gebildet. Offenbar ist S eine *Projektion*, d h. eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $S \circ S = S$: Es gilt $S(\mathrm{L}^n(E, F)) = \mathrm{L}^n_{\mathrm{sym}}(E, F)$ und $S(\varphi) = \varphi$ für alle $\varphi \in \mathrm{L}^n_{\mathrm{sym}}(E, F)$.

(b) Eine Funktion $P\colon E \to F$ heißt ein *homogenes Polynom* n-ten Grades, wenn es ein $\varphi \in \mathrm{L}^n(E, F)$ gibt, so daß

$$P = \varphi \circ \Delta_n$$

mit

$$\Delta_n\colon E \to E^n, v \mapsto (v, \ldots, v),$$

also

$$\forall v \in E\colon P(v) = \varphi(v, \ldots, v).$$

Offenbar ist dann auch $P = S(\varphi) \circ \Delta_n$, d. h. zur Beschreibungen von homogenen Polynomen können wir daher stets symmetrische n-lineare Abbildungen benutzen. Wir nennen Δ_n die *Diagonaleinbettung* von E in E^n.

Homogene Polynome nullten Grades sind konstante Funktionen; homogene Polynome ersten Grades sind stetige lineare Funktionen. Unter (allgemeinen) *Polynomen* vom Grad höchstens n verstehen wir Summen homogener Polynome, deren Grade höchstens n sind.

Homogene Polynome vom Grad n heißen nicht nur so, sondern sind tatsächlich im Sinne der Definition aus Abschnitt 13.4 homogen vom Grad n:

Aufgabe 1.

(a) Man zeige, daß jedes Polynom $P\colon E \to F$ differenzierbar ist und daß im Falle eines homogenen Polynoms n-ten Grades der Form $P = \varphi \circ \Delta_n$ gilt:

$$\forall p \in E\, \forall v \in E\colon D_p P(v) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(p, \ldots, p, \underbrace{v}_{k}, p, \ldots, p).$$

Wird φ als symmetrisch vorausgesetzt, so vereinfacht sich die Formel zu

$$\forall p \in E\, \forall v \in E\colon D_p P(v) = n \cdot \varphi(p, \ldots, p, v).$$

(b) Die *quadratischen Formen*, d h. die homogenen Polynome $P\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ vom Grad 2 sind gerade die Funktionen, die sich mittels einer symmetrischen $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ik})$ durch

$$P(v) = v^\top A v = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} v_i v_k, \quad \text{also} \quad P = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

beschreiben lassen, wobei in dem Ausdruck $v^\top A v$ der Vektor v als ein Spaltenvektor und $v^\top$ als sein Transponiertes betrachtet wird.

(c) Wie lautet das Differential $D_A P$ des Polynoms

$$P\colon \mathrm{L}(E,E) \to \mathrm{L}(E,E), A \mapsto A^3 = A \circ A \circ A?$$

In Beispiel (c) aus Abschnitt 13.13 werden wir sehen, daß jedes homogene Polynom n-ten Grades nur mit Hilfe einer einzigen symmetrischen n-linearen Abbildung beschrieben werden kann.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir die Determinante differenzieren. Dazu sei E ein n-dimensionaler Vektorraum; in diesem Falle ist also $\mathrm{L}(E,E) = \mathrm{End}(E)$, der Vektorraum der Endomorphismen von E, also der linearen Abbildungen von E nach E. Für jeden Endomorphismus $A \in \mathrm{End}(E)$ schreiben wir sein charakteristisches Polynom $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot 1_E)$ in der Form

$$P_A(\lambda) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \cdot s_{n-r}(A) \cdot \lambda^r.$$

Damit werden Funktionen

$$s_0, \ldots, s_n\colon \mathrm{End}(E) \to \mathbf{R}$$

definiert. Wie sich jeder überlegen möge, ist

$$s_0 \equiv 1, \quad s_1 = \mathrm{tr}, \quad s_n = \det,$$

wobei wir tr für die Spurabbildung $\mathrm{tr}\colon \mathrm{End}(E) \to \mathbf{R}$ geschrieben haben.

Bekanntlich kann die Determinante $\det(A)$ eines Endomorphismus $A \in \mathrm{End}(E)$ folgendermaßen charakterisiert werden: Ist ω eine *Volumenform* auf E, das ist eine alternierende n-lineare Funktion[1] $\omega\colon E^n \to \mathbf{R}$, so gilt

$$\forall v_1, \ldots, v_n \in E\colon \omega(Av_1, \ldots, Av_n) = \det(A) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_n). \tag{1}$$

Wählen wir eine Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ von E, so existiert dazu genau eine Volumenform ω auf E mit $\omega(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Diese Form sei für das folgende fixiert. Dann bedeutet (1) einfach nur

$$\det(A) = \omega(Aa_1, \ldots, Aa_n). \tag{2}$$

[1] Die n-lineare Funktion $\omega\colon E^n \to \mathbf{R}$ heißt *alternierend*, falls ω verschwindet, wenn zwei gleiche Vektoren $v \in E$ eingesetzt werden, d.h. $\omega(\ldots, v, \ldots, v, \ldots) = 0$.

Hiermit berechnen wir noch einmal das charakteristische Polynom:

$$P_A(\lambda) = \omega((A - \lambda \cdot 1_E)a_1, \dots, (A - \lambda \cdot 1_E)a_n).$$

Auf die rechte Seite wenden wir das Distributivgesetz an, d. h. wir nutzen aus, daß ω multilinear ist, sammeln nach den Potenzen von λ und machen einen Koeffizientenvergleich, der uns folgende Darstellung liefert:

$$s_r(A) = \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_n=r \\ \nu_1,\dots,\nu_n\in\{0,1\}}} \omega(A^{\nu_1}a_1, \dots, A^{\nu_n}a_n). \tag{3}$$

Das sieht allerdings komplizierter aus, als es ist. Für $r = n$ erhalten wir die Formel (2) zurück. Für $r = 1$ erhalten wir die bekannte Formel

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \omega(a_1, \dots, a_{k-1}, Aa_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Der ganze Aufwand hat sich gelohnt, denn jetzt läßt sich ganz schnell folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe 2. Für jedes $r \in \{0, \dots, n\}$ ist die Funktion

$$s_r \colon \operatorname{End}(E) \to \mathbf{R}$$

ein homogenes Polynom vom Grad r, also insbesondere differenzierbar.
(Tip: (3).)

Natürlich erhält man so auch einen Ausdruck für das Differential der Determinanten. Um aber eine Darstellung zu bekommen, in welcher die willkürlich gewählte Basis $(a_1, \dots, a_n)$ nicht eingeht, müssen wir etwas kompliziert vorgehen:

Aufgabe 3.

(a) Definieren wir die *Adjunkte*

$$\hat{A} := \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \cdot s_{n-1-r}(A) \cdot A^r \in \operatorname{End}(E)$$

für alle $A \in \operatorname{End}(E)$, so gilt

$$A \circ \hat{A} = \det(A) \cdot 1_E.$$

(Tip: Satz von Cayley–Hamilton.)

In der Matrizenrechnung entspricht $\hat{A}$ der *Kofaktormatrix*.

(b) Es gilt

$$\forall A \in \mathrm{End}(E)\, \forall X \in \mathrm{End}(E)\colon d_A \det(X) = \mathrm{tr}(\hat{A} \circ X) = \mathrm{tr}(X \circ \hat{A}),$$

also insbesondere (?)

$$d_{1_E} \det = \mathrm{tr}\,.$$

(Tip: Man benutze (2), setze zunächst $A \in \mathrm{GL}(E)$ voraus und beachte dabei (1).)

(c) Es seien $A\colon J \to \mathrm{End}(E)$ eine stetige Funktion und $Y\colon J \to \mathrm{End}(E)$ eine Lösung der Endomorphismen-wertigen Differentialgleichung

$$Y' = A(x) \circ Y$$

(vgl. Abschnitt 11.11). Man zeige: Dann ist die Funktion $y := \det \circ Y\colon J \to \mathbf{R}$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' = \mathrm{tr}(A(x))y.$$

Man beweise mit diesem Ergebnis erneut: Existiert ein $\xi \in J$, so daß $Y(\xi) \in \mathrm{GL}(E)$ ist, so ist $Y(J) \subseteq \mathrm{GL}(E)$. (Natürlich gilt dieser Beweis nur für $\dim E < \infty$.)

(d) Mit Hilfe von (c) beweise man

$$\forall A \in \mathrm{End}(E)\colon\ \det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A)).$$

Kommentar. In der *nichtlinearen Funktionalanalysis* werden die in diesem Abschnitt beschriebenen homogenen Polynome $P_n = \varphi_n \circ \Delta_n$ benutzt, um *allgemeine analytische Funktionen* einzuführen, und zwar als unendliche Reihen der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n$. Unter anderem gilt folgende wunderschöne Verallgemeinerung der eindimensionalen Funktionentheorie:

> Ist eine Funktion zwischen komplexen Banachräumen komplex differenzierbar, so ist sie analytisch.

13.7 Differenzierbarkeit der Inversenbildung auf $\mathrm{GL}(E)$

Theorem. Die Abbildung $\mathrm{Inv}\colon \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{L}(E, E)$ (vgl. Abschnitt 11.9) ist überall differenzierbar, und ihr Differential ist durch

$$\forall A \in \mathrm{GL}(E)\, \forall X \in \mathrm{L}(E, E)\colon D_A \mathrm{Inv}(X) = -A^{-1} \circ X \circ A^{-1}$$

gegeben.

13.8 Der Gradient einer reellwertigen Funktion

Sei im folgenden H ein Hilbertraum.

Definition. Seien G eine offene Teilmenge von H und $f\colon G \to \mathbf{R}$ eine in $a \in G$ differenzierbare Funktion. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (vgl. Abschnitt 12.10) existiert zu der Linearform $d_a f\colon H \to \mathbf{R}$ genau ein Vektor $u \in H$, so daß $d_a f(v) = \langle u, v\rangle$ für alle $v \in H$ gilt. Dieser Vektor heißt der *Gradient* von f in a; er wird mit $\operatorname{grad}_a f$ bezeichnet. Es gilt also die charakteristische Gleichung des Gradienten:

$$\forall v \in H\colon d_a f(v) = \langle \operatorname{grad}_a f, v\rangle .$$

Es sei beachtet, daß der Gradient nur definiert werden kann, wenn ein Skalarprodukt definiert ist. Beispielsweise tauchen aus diesem Grunde in der Thermodynamik keine Gradienten, aber um so mehr Differentiale auf.

Beispiele. (a) Für die Funktion $g\colon H \to \mathbf{R}, p \mapsto \langle p, p\rangle$ ist $\operatorname{grad}_p g = 2 \cdot p$.

(b) Für die Abstandsfunktion $r\colon H \to \mathbf{R}, p \mapsto \sqrt{\langle p - p_0, p - p_0\rangle}$ gilt

$$\operatorname{grad}_p r = \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|} = \frac{p - p_0}{r(p)} \quad \text{für } p \neq p_0$$

und

$$\operatorname{grad}_p(1/r) = -\frac{p - p_0}{r^3(p)} \quad \text{für } p \neq p_0.$$

Die letzte Formel ist bekanntlich in der Mechanik und Elektrodynamik von fundamentaler Bedeutung, und zwar für das Potential der Anziehungskraft einer in p_0 befindlichen Punktmasse bzw. des elektrischen Kraftfeldes einer in p_0 befindlichen Punktladung.

Theorem. Seien G eine offene Teilmenge eines Hilbertraumes H und $f\colon G \to \mathbf{R}$ eine in $a \in G$ differenzierbare Funktion.

(a) Der Vektor $\operatorname{grad}_a f$ weist in Richtung des stärksten Anstieges von f; genauer: Ist $\operatorname{grad}_a f \neq 0$ und $v_0 := \frac{\operatorname{grad}_a f}{\|\operatorname{grad}_a f\|}$, so gilt für jeden Einheitsvektor $v \neq v_0$, daß

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) < \frac{\partial f}{\partial v_0}(a) = \|\operatorname{grad}_a f\| .$$

Natürlich gilt: $\operatorname{grad}_a f = 0 \iff d_a f = 0$. In Falle $\operatorname{grad}_a f = 0$ gilt also

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$$

für alle $v \in H$.

(b) Der Vektor $\operatorname{grad}_a f$ steht *senkrecht* auf der *Niveaufläche*

$$M := \{p \in G \mid f(p) = f(a)\};$$

genauer: Ist $\alpha\colon I \to M$ ein in t_0 differenzierbarer Weg mit $\alpha(t_0) = a$, so gilt

$$\langle \operatorname{grad}_a f, \alpha'(t_0)\rangle = 0.$$

(c) Ist $H = \mathbf{R}^n$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das kanonische Skalarprodukt, so gilt

$$\operatorname{grad}_a f = \Big(\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\Big)_{i=1,\dots,n}.$$

Aufgabe. Sei $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion, die in Polarkoordinaten beschrieben werden kann, d. h. es existiert eine differenzierbare Funktion $g\colon [0,\infty[\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, so daß

$$\forall (r,\varphi) \in [0,\infty[\times\mathbf{R}\colon f(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) = g(r,\varphi).$$

Dann gilt für jedes $a := (r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi))$ mit $(r,\varphi) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, daß sich $\operatorname{grad}_a f$ aus dem Vektor $(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi), \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial g}{\partial\varphi}(r,\varphi))$ durch Drehung um den Winkel φ in mathematisch positiver Richtung erhalten läßt.

13.9 Wie sich von partieller auf totale Differenzierbarkeit schließen läßt

Wir beginnen zunächst mit einer Definition.

Definition. Unter dem *Differential* einer differenzierbaren Abbildung $f\colon G \to F$ verstehen wir die Funktion

$$Df\colon G \to \mathrm{L}(E,F), p \mapsto D_p f.$$

Im folgenden sei $E = \mathbf{R}^n$, also G eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}^n$ und $a \in G$ ein Punkt. Sei wie gehabt $f\colon G \to F$ eine Abbildung.

Beispiel. Läßt sich f in der Form $f = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k \cdot b_k$ darstellen, wobei die $b_k \in F$ irgendwelche Vektoren sind und die Funktionen $f_k\colon G \to \mathbf{R}$ aus den kanonischen Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_n$ durch Anwendung arithmetischer Operationen und differenzierbarer Funktionen hervorgehen, so ist f differenzierbar. Ein typisches Beispiel für eine solche Funktion ist etwa

$$f_k = \sin\Big(x_k \cdot \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big).$$

Theorem.

(a) Ist f auf ganz G partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ in a stetig, so ist f in a (total) differenzierbar.

(b) Die Funktion f ist genau dann eine C^1-Funktion (im Sinne von Abschnitt 13.1), wenn f differenzierbar und das Differential $Df\colon G \to \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, F)$ eine stetige Funktion ist.

Beweis. Wir versehen $\mathbf{R}^n$ mit der Norm $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$.

Zu (a). Da $A\colon \mathbf{R}^n \to F, v \mapsto \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot v_k$ eine stetige lineare Abbildung ist, können wir die Differenzierbarkeit von f in a durch das in Abschnitt 13.2 beschriebene Verfahren beweisen, indem wir zeigen, daß

$$\lim_{p \to a} \frac{f(p) - f(a) - A(p-a)}{\|p - a\|} = 0. \tag{1}$$

Sei also ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ vorgegeben. Aufgrund der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von f in a existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $U_\delta(a) \subset G$ und

$$\forall q \in U_\delta(a)\, \forall k \in \{1, \ldots, k\}\colon \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(q) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right\| < \frac{\varepsilon}{n}. \tag{2}$$

Zum Beweis von (1) reicht es zu zeigen, daß

$$\forall p \in U_\delta(a)\colon \|f(p) - f(a) - A(p-a)\| < \varepsilon \cdot \|p - a\|. \tag{3}$$

Sei dazu $p \in U_\delta(a)$ fest gewählt. Wir definieren jetzt für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ den Weg

$$\alpha_k\colon [0,1] \to \mathbf{R}^n, t \mapsto (p_1, \ldots, p_{k-1}, a_k + t \cdot (p_k - a_k), a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

Da die Menge $U_\delta(a)$ bezüglich der Supremumsnorm definiert ist, gilt $\alpha_k([0,1]) \subseteq U_\delta(a)$. Außerdem gilt

$$\alpha_1(0) = a, \quad \forall k = 1, \ldots, n-1\colon \alpha_{k+1}(0) = \alpha_k(1) \quad \text{und} \quad \alpha_n(1) = p \tag{4}$$

und

$$\forall k = 1, \ldots, n\colon \alpha_k' = (p_k - a_k) \cdot e_k.$$

Da die Funktion f partiell nach x_k differenzierbar ist, ist die Funktion

$$g_k\colon [0,1] \to F, t \mapsto f(\alpha_k(t)) - t \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot (p_k - a_k)$$

differenzierbar und besitzt die Ableitung

$$g_k'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\alpha_k(t)) \cdot (p_k - a_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot (p_k - a_k).$$

Daraus folgt wegen (2), daß

$$\|g_k'(t)\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\alpha_k(t)) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right\| \cdot |p_k - a_k| < \frac{\varepsilon}{n} \cdot |p_k - a_k| < \frac{\varepsilon}{n} \|p - a\|.$$

Aufgrund des Theorems von der kontrollierten Schwankung aus Abschnitt 6.15 folgt hieraus

$$\|g_k(1) - g_k(0)\| < \frac{\varepsilon}{n} \cdot \|p - a\|.$$

Nach Definition von g_k liest sich diese Abschätzung als

$$\left\| f(\alpha_k(1)) - f(\alpha_k(0)) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot (p_k - a_k) \right\| < \frac{\varepsilon}{n} \cdot \|p - a\|. \tag{5}$$

Wegen (4) ist $f(p) - f(a) = \sum\limits_k (f(\alpha_k(1)) - f(\alpha_k(0)))$. Daher erhalten wir unter Beachtung der Dreiecksungleichung und der Definition der linearen Abbildung A aus der Ungleichung (5) die gewünschte Abschätzung (3).

Zu (b) $\Longrightarrow$. Ist f eine C^1-Funktion im Sinne von Abschnitt 13.1, so ist nach (a) die Abbildung f im Sinne von Abschnitt 13.2 differenzierbar mit $D_pf(v) = \sum\limits_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \cdot v_k$. Daher folgt

$$\begin{aligned}
\|D_pf - D_af\| &= \sup_{\|v\|\le 1} \|D_pf(v) - D_af(v)\| \\
&\le \sup_{\|v\|\le 1} \sum_{k=1}^n \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right\| \cdot \|v_k\| \right) \\
&\le \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right\| .
\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Funktionen folgt daher die Stetigkeit des Differentials Df.

Zu (b) $\Longleftarrow$. Wegen $\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = D_pf(e_k)$ und der Stetigkeit der bilinearen Abbildung

$$\mathrm{L}(\mathbf{R}^n, F) \times \mathbf{R}^n \to F, (A, v) \mapsto A(v)$$

folgt aus der Stetigkeit des Differentials sofort, daß f eine C^1-Funktion ist. □

13.10 Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen

Im folgenden sei der Vektorraum $\mathrm{L}(E, F)$ mit der in Abschnitt 11.7 eingeführten Norm versehen.

Theorem. Sei $f\colon G \to F$ eine differenzierbare Funktion. Weiter sei C konvexe Teilmenge von E mit $C \subseteq G$, vgl. Abschnitt 5.3. Dann gilt die Implikation

$$L := \sup\{\|D_pf\| \mid p \in C\} < \infty \implies \forall p, q \in C\colon\ \|f(q) - f(p)\| \le L \cdot \|q - p\| .$$

Korollar 1. Ist $G \subseteq E$ offen und zusammenhängend (vgl. Abschnitt 12.8), so gilt für jede differenzierbare Funktion $f\colon G \to F$, daß

$$\big(\forall p \in G\colon d_pf = 0\big) \implies f \equiv \text{const.}$$

Kommentar. Für offene Mengen eines normierten Vektorraumes ist der Zusammenhang zum wegweisen Zusammenhang äquivalent (vgl. Abschnitt 12.8). Offenbar ist jede nicht leere konvexe Menge eines normierten Vektorraumes wegweise zusammenhängend.

Korollar 2. Es seien $f\colon G \to F$ eine differenzierbare Funktion, $A \in \mathrm{L}(E, F)$, C eine konvexe Teilmenge von E mit $C \subseteq G$ und $L \in [0, \infty[$ eine Konstante. Dann gilt die Implikation

$$\big(\forall p \in C\colon\ \|D_pf - A\| \le L\big) \implies \big(\forall p, q \in C\colon\ \|f(q) - f(p) - A(q - p)\| \le L \cdot \|q - p\|\big).$$

13.11 Vererbung der Differenzierbarkeit

Definition. Sind E ein topologischer und (E', d) ein metrischer Raum, so sagen wir, daß eine Folge $(f_n)_{n\geq m}$ von Abbildungen $f_n \colon E \to E'$ *lokal gleichmäßig* gegen eine weitere Abbildung $f \colon E \to E'$ konvergiert, wenn zu jedem Punkt $p \in E$ eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(p, E)$ existiert, so daß die Folge $(f_n|U)_{n\geq m}$ gleichmäßig gegen $f|U$ konvergiert.

2. Vererbungssatz. Es seien G eine offene, zusammenhängende Teilmenge von E und $(f_n)_{n\geq m}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n \colon G \to F$, für welche folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(a) Es existiert ein Punkt $a \in G$, so daß die Folge $(f_n(a))_{n\geq m}$ in F konvergiert.

(b) Die Folge $(Df_n)_{n\geq m}$ der Differentiale konvergiert lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $g \colon G \to \mathrm{L}(E, F)$.

Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ lokal gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f \colon G \to F$, und deren Differential ist g.

Korollar (Spezialfall)**.** Ist $E = \mathbf{R}$, also $G = I$ ein offenes Intervall[2], so ist die Bedingung (b) äquivalent zu

(b') Die Folge $(f'_n)_{n\geq m}$ der Ableitungen konvergiert lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $h \colon I \to F$.

Ist zusätzlich (a) erfüllt, so konvergiert also die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ lokal gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f \colon I \to F$ und deren Ableitung ist h.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß die Folge beim Index $m = 0$ beginnt. Es sei

$$M := \{p \in G \mid (f_n(p))_{n\geq 0} \text{ konvergiert in } F\}.$$

Diese Menge ist nicht leer, weil nach Voraussetzung (a) der Punkt a in M liegt. Auf M können wir die Funktion

$$f \colon M \to F, p \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(p)$$

definieren. Wir bilden die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ von M in G (!) und werden zeigen

$$\overline{M} \subseteq M^o. \tag{1}$$

Was wir davon haben? Nun, aus (1) folgt natürlich $M \subseteq \overline{M} \subseteq M^o \subseteq M$, also $M^o = M = \overline{M}$, d. h. die Menge M ist gleichzeitig offen und abgeschlossen in G. Weil G zusammenhängend und M nicht leer ist, folgt $M = G$, d. h. wir wissen damit, daß die Folge (f_n) auf ganz G gegen eine Funktion $f \colon G \to F$ konvergiert.

Um (1) zu zeigen, sei p_0 ein beliebiger Punkt von $\overline{M}$. Dann wählen wir eine Umgebung $U := U_r(p_0) \subseteq G$, auf der die Folge $(Df_n|U)_{n\geq 1}$ gleichmäßig gegen U konvergiert. Eine solche Umgebung U existiert nach Voraussetzung (b). Wegen $p_0 \in \overline{M}$ existiert ein $p_1 \in M \cap U$. Nach Definition von M gilt dann

$$(f_n(p_1)) \text{ ist eine Cauchy-Folge in } F. \tag{2}$$

[2]Tatsächlich darf I ein beliebiges Intervall sein.

Aufgrund der Dreiecksungleichung haben wir natürlich

$$\forall p \in U\colon\ \|p - p_1\| < 2r. \tag{3}$$

Wir zeigen jetzt

$$U \subseteq M \quad \text{und sogar} \quad (f_n|U) \text{ konvergiert auf } U \text{ gleichmäßig gegen } f|U. \tag{4}$$

Damit ist insbesondere $p_0 \in M^o$, also insgesamt die Behauptung (1) bewiesen.

Um (4) zu zeigen, sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ vorgegeben. Dann wählen wir ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 0$, so daß

$$\forall n, m \geq n_0\colon\ \|f_n(p_1) - f_m(p_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

und

$$\forall n, m \geq n_0\, \forall p \in U\colon\ \|D_p f_n - D_p f_m\| \leq \frac{\varepsilon}{6r}.$$

Dies ist nach (2) und nach der Wahl von U möglich. Da $U = U_r(p_0)$ konvex ist, folgt nach dem Theorem aus Abschnitt 13.10 und aufgrund von (3) die Ungleichung

$$\forall n, m \geq n_0(\varepsilon)\, \forall p \in U\colon\ \left\|\big(f_n(p) - f_m(p)\big) - \big(f_n(p_1) - f_m(p_1)\big)\right\| < \frac{\varepsilon}{6r} \cdot \|p - p_1\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Wegen (5) folgt daraus

$$\forall n, m \geq n_0\, \forall p \in U\colon\ \|f_n(p) - f_m(p)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \|f_n(p_1) - f_m(p_1)\| < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Insbesondere haben wir damit bewiesen, daß für jedes $p \in U$ die Folge $(f_n(p))$ eine Cauchy-Folge ist, womit $U \subseteq M$ bewiesen ist. Aber mehr noch: In (7) können wir m gegen ∞ gehen lassen. Dann folgt

$$\forall n \geq n_0\, \forall p \in U\colon\ \|f_n(p) - f(p)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Damit ist sogar die gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_n) über U gegen f bewiesen, womit (4) verifiziert ist. Aufgrund des vorher gesagten, haben wir die lokal gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_n) über ganz G gegen f bewiesen.

Es bleibt, die Differenzierbarkeit von f und die Aussage $Df = g$ zu beweisen, und zwar für einen jeden Punkt $p_0 \in G$, d. h. wir zeigen

$$\lim_{p \to p_0} \frac{R(p)}{\|p - p_0\|} = 0 \quad \text{mit} \quad R(p) := f(p) - f(p_0) - g(p_0)(p - p_0).$$

Sei also $\tilde{\varepsilon} \in \mathbf{R}_+$ vorgegeben. Dazu haben wir ein $\delta \in \mathbf{R}_+$ zu finden, so daß

$$U_\delta(p_0) \subseteq G \quad \text{und} \quad \forall p \in U_\delta(p_0)\colon\ \|R(p)\| < \tilde{\varepsilon} \cdot \|p - p_0\| \tag{8}$$

gilt. Da wir bereits $M = G$ wissen, können wir erneut den obigen Beweis durchgehen, wobei wir jetzt $p_1 = p_0$ wählen. Aufgrund der Dreiecksungleichung erhalten wir für jedes $n \geq 0$, daß

$$\|R(p)\| \leq A(n,p) + B(n,p) + C(n,p)$$

mit

$$A(n,p) := \left\|\big(f(p) - f(p_0)\big) - \big(f_n(p) - f_n(p_0)\big)\right\|,$$
$$B(n,p) := \|f_n(p) - f_n(p_0) - D_{p_0} f_n(p - p_0)\|$$

und

$$C(n,p) := \|D_{p_0} f_n(p-p_0) - g(p_0)(p-p_0)\| .$$

Wir werden jetzt $n \geq 0$ und $\delta \in]0,r]$ so wählen, daß für alle $p \in U_\delta(p_0)$ gilt:

$$A(n,p), B(n,p), C(n,p) \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} \cdot \|p-p_0\| .$$

Damit ist dann (8) bewiesen und der Beweis vollendet.

Eine Abschätzung für $C(n,p)$ erhalten wir wie folgt: Es ist

$$C(n,p) \leq \|D_{p_0} f_n - g(p_0)\| \cdot \|p-p_0\| .$$

Da nach Voraussetzung für $n \to \infty$ die lineare Abbildung $D_{p_0} f_n$ gegen $g(p_0)$ konvergiert, existiert ein $n_1 \geq 0$ mit

$$\forall n \geq n_1 \, \forall p \in E\colon C(n,p) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} \cdot \|p-p_0\| .$$

Um $A(n,p)$ abzuschätzen, wählen wir $\varepsilon := 2r\tilde{\varepsilon}$ im ersten Teil des Beweises. Aus (6) folgt dann für $n_2 := \max\{n_0(\varepsilon), n_1\}$, daß

$$\forall p \in U_r(p_0)\colon A(n_2,p) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} \cdot \|p-p_0\| .$$

Schließlich schätzen wir $B(n,p)$ ab: Da f_{n_2} in p_0 differenzierbar ist, existiert ein $\delta \in]0,r]$, so daß

$$\forall p \in U_r(p_0)\colon B(n_2,p) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} \cdot \|p-p_0\| .$$

Das Paar (n_2,δ) erfüllt alle erforderlichen Eigenschaften. □

13.12 Der Banachraum $\mathrm{L}^n(E,F)$

Es seien E_1, …, E_m, E_1', …, E_n' und F normierte Vektorräume. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 13.5 gilt dann:

Theorem. Für jedes $\mu \in \mathrm{L}(E_1,\dots,E_m;\mathrm{L}(E_1',\dots,E_n';F))$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi_{m,n}(\mu)\colon E_1 \times \cdots \times E_m \times E_1' \times \cdots \times E_n' &\to F,\\ (v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_n) &\mapsto \mu(v_1,\dots,v_m)(w_1,\dots,w_n)\end{aligned}$$

ein Element des normierten Vektorraumes $\mathrm{L}(E_1,\dots,E_m,E_1',\dots,E_n';F)$ mit der Eigenschaft $\|\Phi_{n,m}(\mu)\| = \|\mu\|$ und die dadurch definierte Abbildung

$$\Phi_{m,n}\colon \mathrm{L}(E_1,\dots,E_m;\mathrm{L}(E_1',\dots,E_n';F)) \to \mathrm{L}(E_1,\dots,E_m,E_1',\dots,E_n';F)$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Wir wollen $\Phi_{m,n}$ den *Vereinfachungsisomorphismus* nennen.

Korollar. Ist F ein Banachraum, so ist auch $\mathrm{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ ein Banachraum.

Definition. Sind E und F Banachräume, so bezeichne $\mathrm{L}^n(E,F)$ den Banachraum $\mathrm{L}(E,\dots,E;F)$ aller *stetigen* n-linearen Abbildungen $\varphi\colon E^n \to F$; vgl. Abschnitt 13.5 und Abschnitt 13.6. Dabei ist $\mathrm{L}^0(E,F) = F$.

13.13 Mehrmalige Differenzierbarkeit

Definition. Wir definieren eine Folge von Teilmengen $(G_n)_{n\geq 0}$ von G und eine Folge $(D^n f)_{n\geq 0}$ von Funktionen

$$D^n f\colon G_n \to \mathrm{L}^n(E,F), p \mapsto D_p^n f$$

rekursiv wie folgt: Wir setzen $G_0 := G$ und $D^0 f := f$. Sind G_n und $D_p^n f$ schon definiert, so setzen wir

$$G_{n+1} := \{p \in G_n^o \mid D^n f \text{ ist in } p \text{ differenzierbar}\}$$

und

$$D_a^{n+1} f := \Phi_{1,n}(D_a(D^n f))\colon (v_0,\dots,v_n) \mapsto \big(D_a(D^n f)(v_0)\big)(v_1,\dots,v_n)$$

für jedes $a \in G_{n+1}$ mit Hilfe von $\Phi_{1,n}\colon \mathrm{L}^1(E,\mathrm{L}^n(E,F)) \to \mathrm{L}^{n+1}(E,F)$, des Vereinfachungsisomorphismus aus Abschnitt 13.12. (Man beachte, daß $D_a(D^n f)(v_0) \in \mathrm{L}^n(E,F)$ ist.)

Ist $G = G_r$ für ein $r \in \mathbf{N}_0$, so heißt f mindestens r-mal *differenzierbar*. Die Abbildung $D^n f$ heißt das n-te *Differential* von f.

Das Differential zweiter Ordnung $D_a^2 f$ heißt auch die *Hessesche Form* von f in a.

Die Abbildung f heißt eine C^r-Funktion, wenn f auf ganz G mindestens r-mal differenzierbar und das r-te Differential $D^r f\colon G \to \mathrm{L}^r(E,F)$ stetig ist. Ist f unendlich oft differenzierbar, so heißt f eine C^∞-Funktion; aufgrund von Abschnitt 13.9 steht diese Definition mit dem in Abschnitt 13.1 Gesagtem in Einklang. Die Menge der C^r- bzw. C^∞-Funktionen $G \to F$ wird mit $C^r(G,F)$ bzw. $C^\infty(G,F)$ bezeichnet.

Eine Abbildung heißt $f \in C^r(G,F)$ heißt ein *C^r-Diffeomorphismus in F*, wenn das Bild $f(G)$ eine offene Teilmenge $f(G)$ von F, f ein Homöomorphismus auf $f(G)$ (vgl. Abschnitt 12.4) und die Umkehrabbildung $\check{f}\colon f(G) \to E$ ebenfalls eine C^r-Abbildung ist. Analog werden C^∞-Diffeomorphismen definiert.

Proposition 1. Ist $f\colon G \to F$ ein C^r-Diffeomorphismus in F, $a \in G$ und $b := f(a)$, so ist $D_a f$ ein Vektorraumisomorphismus $E \to F$, dessen Umkehrung durch

$$(D_a f)^{-1} = D_b \check{f}$$

gegeben ist.

Beispiele.

(a) Jede stetige lineare Abbildung $A\colon E \to F$ ist eine C^∞-Funktion; es gilt

$$DA \equiv \text{const.}, \quad \text{also } \forall n \geq 2\colon D^n A \equiv 0.$$

(b) Jede stetige bilineare Abbildung $B\colon E_1 \times E_2 \to F$ ist eine C^∞-Funktion; ihr Differential DB ist eine lineare Abbildung $A\colon E_1 \times E_2 \to \mathrm{L}(E_1 \times E_2; F)$, und daher ist

$$(D^2 B\colon E_1 \times E_2 \to \mathrm{L}^2(E_1 \times E_2; F)) \equiv \text{const.} = \Phi_{1,1}(DA) \in \mathrm{L}^2(E_1 \times E_2; F);$$

und zwar ist

$$\forall a \in E_1 \times E_2 \, \forall v, w \in E_1 \times E_2 \colon D_a^2 B(v,w) = B(v_1, w_2) + B(w_1, v_2).$$

(c) Jedes Polynom (vgl. Abschnitt 13.6) ist eine C^∞-Funktion. Ist $P\colon E \to F$ ein homogenes Polynom vom Grade r, welches mit einer Hilfe einer symmetrischen r-linearen Funktion $\varphi \in \mathrm{L}^r_{\mathrm{sym}}(E,F)$ durch $P(v) = \varphi(v,\ldots,v)$ dargestellt ist, so ist für jedes $n \in \{1,\ldots,r\}$ das Differential $D^n P$ das homogene Polynom $E \to \mathrm{L}^n(E,F)$ vom Grade $r-n$, welches für $p \in E$ und $v_1,\ldots,v_n \in E$ durch

$$D_p^n P(v_1,\ldots,v_n) = r \cdot (r-1) \cdots (r-n+1) \cdot \varphi(p,\ldots,p,v_1,\ldots,v_n)$$

beschrieben ist; insbesondere ist

$$D^r P \equiv \text{const.} = r! \cdot \varphi.$$

Somit ist die symmetrische r-lineare Funktion φ durch P eindeutig festgelegt.

Theorem 1. Eine n-mal differenzierbare Funktion $f\colon G \to F$ ist genau dann in $a \in G$ eine $(n+m)$-mal (stetig) differenzierbare Funktion, wenn $D^n f$ in a eine m-mal (stetig) differenzierbare Funktion ist. Im Falle der $(n+m)$-maligen Differenzierbarkeit von f in a gilt

$$D_a^{m+n} f = \Phi_{m,n}(D_a^m(D^n f)),$$

wobei $\Phi_{m,n}$ den Vereinfachungsisomorphismus aus Abschnitt 13.12 bezeichnet.

Außerdem gilt: Für beliebige Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in E$ ist die Funktion

$$g\colon G \to F, p \mapsto (D_p^n f)(w_1,\ldots,w_n) \tag{1}$$

in a eine m-mal (stetig) differenzierbare Funktion mit

$$\forall v_1,\ldots,v_m \in E\colon (D_a^m g)(v_1,\ldots,v_m) = D_a^{m+n} f(v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,w_n). \tag{2}$$

Beweis. Sei n ein für alle Mal vorgegeben; sei also f eine n-mal differenzierbare Funktion. Dann ist $G_n = G$, und $\tilde{f} \coloneqq D^n f$ ist eine Funktion $\tilde{f}\colon G \to \tilde{F} \coloneqq \mathrm{L}^n(E;F)$.

Weiter fixieren wir das n-Tupel $(w_1,\ldots,w_n) \in E^n$ und führen die stetige lineare Abbildung

$$A\colon \mathrm{L}^n(E,F) \to F, \varphi \mapsto \varphi(w_1,\ldots,w_n)$$

ein; damit kann die Funktion g aus dem zu beweisenden Satz durch

$$g = A \circ \tilde{f}$$

beschrieben werden.

Sei $m \in \mathbf{N}_0$. Wir zeigen zunächst, daß (2) aus (1) folgt, wenn $\tilde{f}$ mindestens m-mal in a differenzierbar ist: Dazu überlegen wir uns zunächst, daß mit vollständiger Induktion und der Kettenregel aufgrund der Linearität von A folgt, daß

$$D_a^m g = A \circ D_a^m \tilde{f}.$$

Also erhalten wir für jedes m-Tupel $(v_1, \ldots, v_m) \in E$, daß

$$\begin{aligned} D_a^m g(v_1, \ldots, v_m) &= A(D_a^m \tilde{f}(v_1, \ldots, v_m)) \\ &= \big(D_a^m \tilde{f}(v_1, \ldots, v_m)\big)(w_1, \ldots, w_n) \\ &= \big(\Phi_{m,n}(D_a^m \tilde{f})\big)(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_m) \\ &= D_a^{m+n} f(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit nach Definition des Vereinfachungsisomorphismus $\Phi_{m,n}$ und die letzte Gleichheit nach Annahme (1) gilt.

Bleibt also (1) zu beweisen, welches wir per Induktion über $m \in \mathbf{N}_0$ machen. Dazu bezeichnen wir mit $\tilde{G}_0$, $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$, … diejenigen offenen Mengen, die im gleichen Verhältnis zu $\tilde{f}$ stehen wie die offenen Mengen G_0, G_1, G_2, … zu f.

Im Falle $m = 0$ ist die fragliche Aussage trivial. Sei also die Aussage und (1) für ein $m \in \mathbf{N}_0$ erfüllt. Wir wollen zeigen, daß sie dann auch für $m + 1$ gilt. Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, daß $\tilde{G}_m = G_{n+m}$, also auch $\tilde{G}_m^o = G_{n+m}^o$ und

$$D^{n+m} f = \Phi_{m,n} \circ D^m \tilde{f}. \tag{3}$$

Da die Abbildung $\Phi_{m,n}$ sowohl ein Vektorraumisomorphismus als auch ein Homöomorphismus ist, gelten für jedes $a \in \tilde{G}_m^o$ die horizontale Äquivalenz in folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} D^{m+n} f \text{ ist in } a \\ \text{differenzierbar} \end{array} & \Longleftrightarrow & \begin{array}{c} D^m \tilde{f} \text{ ist in } a \\ \text{differenzierbar} \end{array} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \begin{array}{c} f \text{ ist in } a \text{ mindestens} \\ (n+m+1)\text{-mal differenzierbar} \end{array} & & \begin{array}{c} \tilde{f} \text{ ist in } a \text{ mindestens} \\ (m+1)\text{-mal differenzierbar} \end{array} \end{array}$$

Die vertikalen Äquivalenzen gelten einfach aufgrund der Definition der mehrmaligen Differenzierbarkeit.

Damit bleibt im Falle der $(n + m + 1)$-maligen Differenzierbarkeit von f in a die Formel (1) für $m + 1$ anstelle von m zu beweisen. Jedenfalls folgt aus (3) im Falle der Differenzierbarkeit mit der Kettenregel, daß

$$D_a(D^{m+n} f) = \Phi_{m,n} \circ D_a(D^m \tilde{f}).$$

Somit erhalten wir für alle v_0, …, $v_m \in E$, daß

$$\begin{aligned} (D^{m+n+1} f)(v_0, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n) &= \big(D_a(D^{m+n} f)(v_0)\big)(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n) \\ &= \big(\Phi_{m,n}(D_a(D^m \tilde{f})(v_0))\big)(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_m) \\ &= \big((D_a(D^m \tilde{f})(v_0))(v_1, \ldots, v_m)\big)(w_1, \ldots, w_m) \\ &= \big((D_a^{m+1} \tilde{f})(v_0, \ldots, v_m)\big)(w_1, \ldots, w_m) \\ &= \big(\Phi_{m+1,n}(D_a^{m+1} \tilde{f})\big)(v_0, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_m), \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit aufgrund der vorangegangenen Formel gilt.

Die Aussagen über Stetigkeit folgen aus dem schon Bewiesenen, da $\Phi_{m,n}$ ein Homöomorphismus ist. Damit ist das Theorem vollständig bewiesen. □

Korollar. Es seien $f\colon G \to F$ ein Funktion, $a \in G$, $v \in E$, und es bezeichne α die geradlinige Kurve $\alpha\colon \mathbf{R} \to E, t \mapsto a + tv$. Dann ist $U := \alpha^{-1}(G)$ eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}$, und für jedes $t \in U$ gilt: Ist f in $\alpha(t)$ eine n-mal differenzierbare Funktion, so ist $f \circ \alpha\colon U \to F$ in t eine n-mal differenzierbare Funktion und

$$(f \circ \alpha)^{(n)}(t) = D^n_{\alpha(t)} f(v, \ldots, v).$$

Beweis. Daß U offen ist, folgt aus der Offenheit von G und der Tatsache, daß α stetig ist. Um die eigentliche Aussage des Korollars zu zeigen, führen wir Induktion über n aus. Im Falle von $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei die Behauptung also schon für n bewiesen. Wir müssen sie für $n + 1$ folgern. Dazu definieren wir die Funktion

$$g\colon U \to F, p \to D^n_p f(v, \ldots, v).$$

Nach Theorem 1 ist g in $\alpha(t)$ differenzierbar, wenn f in $\alpha(t)$ insgesamt $(n+1)$-mal differenzierbar ist.

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\forall t \in U\colon (f \circ \alpha)^{(n)}(t) = D^n_{\alpha(t)} f(v, \ldots, v) = (g \circ \alpha)(t)$$

Mit der expliziten Formel in Theorem 1 folgt dann:

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)^{(n+1)}(t) &= (g \circ \alpha)'(t)\\ &= D_{\alpha(t)} g(\alpha'(t))\\ &= D^{n+1}_{\alpha(t)} f(\alpha'(t), v, \ldots, v)\\ &= D^{n+1}_{\alpha(t)} f(v, \ldots, v).\end{aligned}$$

□

Theorem 2. Seien E, E', E_1, E_2 und F Banachräume und G eine offene Teilmenge von E und G' eine offene Teilmenge von E'. Seien weiter $B\colon E_1 \times E_2 \to F$ eine stetige Bilinearform und $c \in \mathbf{R}$ eine Konstante.

Sind dann $f, g\colon G \to F$ und $f_1\colon G \to E_1$ und $f_2\colon G \to E_2$ und $f'\colon G' \to E$ mindestens r-mal (stetig) differenzierbare Funktionen mit $f'(G') \subseteq G$, so sind auch $f + g$, cf und $B(f_1, f_2)$ und $f \circ f'$ mindestens r-mal (stetig) differenzierbare Funktionen. Insbesondere sind daher $C^r(G, F)$ und $C^\infty(G, F)$ Untervektorräume des Vektorraumes $C^0(G, F)$ aller stetigen Funktionen $G \to F$.

Beweis. Im folgenden wird jeweils vollständige Induktion nach der Differentiationsordnung r durchgeführt. Die Induktionsvoraussetzung ist dabei, daß die für r fragliche Aussage jeweils für *alle* möglichen E, E', …, f, g, … gilt. Im Falle der Induktionsvoraussetzung $r = 0$ ist die Aussage über Differenzierbarkeit jeweils trivial, und die entsprechende Aussage über 0-fache stetige Differenzierbarkeit ist genau eine schon bekannte Aussagen über stetige Funktionen. Es reicht also, jeweils die Induktionsschritte von r auf $r + 1$ der jeweiligen Aussagen zu beweisen.

$f + g$**.** Sind f und g beide $(r+1)$-mal (stetig) differenzierbar, so sind Df und Dg nach Theorem 1 noch r-mal (stetig) differenzierbare Funktionen. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit auch $D(f+g) = Df + Dg$ r-mal (stetig) differenzierbar. Wieder nach Theorem 1 folgt die $(r+1)$-malige (stetige) Differenzierbarkeit von $f + g$.

cf. Ist f insgesamt $(r+1)$-mal (stetig) differenzierbar, so ist Df nach Theorem 1 eine noch r-mal (stetig) differenzierbare Funktion. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit $D(cf) = cDf$ auch r-mal (stetig) differenzierbar. Wieder nach Theorem 1 folgt die $(r+1)$-malige (stetige) Differenzierbarkeit von cf.

$B(f_1, f_2)$. Sind f_1 und f_2 beide $(r+1)$-mal (stetig) differenzierbar, so sind Df_1 und Df_2 nach Theorem 1 noch r-mal (stetig) differenzierbare Funktionen. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit $D(B(f_1, f_2)) = B(Df_1, f_2) + B(f_1, Df_2)$ auch r-mal (stetig) differenzierbar. Wieder nach Theorem 1 folgt die $(r+1)$-malige (stetige) Differenzierbarkeit von $B(f_1, f_2)$.

$f \circ f'$. Sind f und f' beide $(r+1)$-mal (stetig) differenzierbar, so sind Df und Df' nach Theorem 1 jeweils r-mal stetig differenzierbar. Führen wir jetzt die stetige bilineare Abbildung

$$B\colon \mathrm{L}(E;F) \times \mathrm{L}(E';E) \to \mathrm{L}(E;F), (A, A') \mapsto A \circ A'$$

ein, so gilt nach der Kettenregel

$$D(f \circ f') = B((Df) \circ f', Df').$$

Nach dem schon Bewiesenen ist die rechte Seite mindestens r-mal (stetig) differenzierbar und damit auch die linke Seite. Wieder nach Theorem 1 folgt die $(r+1)$-malige Differenzierbarkeit von $f \circ f'$. □

Aufgabe 1. Die Inversenbildung

$$\mathrm{Inv}\colon\ \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{L}(E, E)$$

ist eine C^∞-Abbildung.

(Tip: Man stelle das Differential $D\,\mathrm{Inv}$ mit Hilfe eines geeigneten homogenen Polynoms $P\colon \mathrm{L}(E,E) \to \mathrm{L}(\mathrm{L}(E,E), \mathrm{L}(E,E))$ zweiten Grades dar.)

Wir haben in Beispiel (c) gesehen, wie sich für ein Polynom $P\colon E \to F$ vom Grade n die symmetrische n-lineare Funktion φ, welche das Polynom in der Form $P\colon v \mapsto \varphi(v, \ldots, v)$ beschreibt, rekonstruieren läßt, nämlich mit Hilfe des Differentials D^nP. Für praktische Zwecke ist jedoch die explizite Polarisationsformel geeigneter:

Polarisationsformel. Seien $\varphi \in \mathrm{L}^n_{\mathrm{sym}}(E, F)$ und $P = \varphi \circ \Delta_n$ das von φ induzierte homogene Polynom. Setzen wir für alle $w = (w_1, \ldots, w_n) \in E^n$ und alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$

$$w_I := \sum_{i \in I} w_i,$$

so gilt

$$\forall w \in E^n\colon \varphi(w) = \frac{1}{n!} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{n-|I|} \cdot P(w_I).$$

Als Spezialfälle haben wir:

$n = 2$. $2\varphi(u, v) = P(u + v) - P(u) - P(v)$.

$n = 3$. $6\varphi(u, v, w) = P(u+v+w) - P(u+v) - P(u+w) - P(v+w) + P(u) + P(v) + P(w)$.

Um die Polarisationsformel herzuleiten, führen wir den Vektorraum $M(E, F)$ aller Abbildungen $E \to F$ ein. Auf diesem Vektorraum sei für jedes $h \in E$ der offensichtlich lineare Operator

$$\Delta_h \colon M(E, F) \to M(E, F), f \mapsto (\Delta_h f \colon v \to f(v + h) - f(v))$$

definiert (nicht zu verwechseln mit der Diagonalabbildung $\Delta_n \colon E \to E^n$). Mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbf{N}_0$ läßt sich schnell zeigen:

Proposition 2. Sind $h_1, \ldots, h_n, v \in E$ beliebige Vektoren, und setzen wir

$$h_I := \sum_{i \in I} h_i$$

für alle $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, so gilt

$$\forall f \in M(E, F) \colon \Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_n} f(v) = \sum_{I \subseteq \{1, \ldots, n\}} (-1)^{n - |I|} \cdot f(v + h_I).$$

Aus dieser Formel entnehmen wir sofort:

Proposition 3. Ist π eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$, so ist

$$\Delta_{h_{\pi(1)}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_{\pi(n)}} = \Delta_{h_1} \circ \cdots \circ \Delta_{h_n} \colon M(E, F) \to M(E, F),$$

d. h. die Funktion

$$E^n \to \mathrm{L}(M(E, F); M(E, F)), (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \Delta_{h_1} \circ \cdots \circ \Delta_{h_n}$$

ist symmetrisch.

Das folgende Theorem beweist in Verbindung mit Proposition 2 nun die Polarisationsformel:

Theorem 3. Sei $f = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k \colon E \to F$ ein Polynom vom Grad höchstens n, wobei die P_k homogene Polynome vom Grad k sind. Dann gilt:

(a) Es ist $\Delta_h f$ ein Polynom vom Grad höchstens $n - 1$ (wobei wir dem Nullpolynom formal den Grad $-\infty$ zuordnen).

(b) Für jedes n-Tupel $(h_1, \ldots, h_n)$ ist die Funktion $\Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_n} f$ konstant, und die Funktion

$$\varphi \colon E^n \to F, (h_1, \ldots, h_n) \mapsto (\Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_n} f)(0)$$

ist diejenige symmetrische stetige n-lineare Funktion ψ mit

$$\forall h \in E \colon n! \cdot P_n(h) = \psi(h, \ldots, h).$$

Beweis. Wir führen vollständige Induktion per n durch. Im Falle $n = 0$ ist f notwendigerweise konstant und die Aussage des Theorems trivial. Sei die Aussage also schon für n bewiesen. Wir wollen sie für $n + 1$ folgern.

Sei also $f = \sum_{k=0}^{n+1} P_k$. Für jedes $h \in E$ ist

$$\Delta_h f = \Delta_h P_{n+1} + \Delta_h \Big(\sum_{k=0}^{n} P_k \Big).$$

Nach Induktionsannahme ist der rechte Summand ein Polynom höchstens vom Grad $n - 1$. Zu Beweis von (a) für $n + 1$ müssen wir also nur noch zeigen, daß $\Delta_h P_{n+1}$ ein Polynom vom Grad höchstens n ist. Dazu sei $\psi \in \mathrm{L}^{n+1}_{\mathrm{sym}}(E, F)$ mit $P_{n+1}(v) = \psi(v, \ldots, v)$ für alle $v \in E$. Es folgt

$$\Delta_h P_{n+1}(v) = \psi(v + h, \ldots, v + h) - \psi(v, \ldots, v).$$

Ausnutzen der Multilinearität von φ liefert daraus, daß $\Delta_h P_{n+1}$ ein Polynom vom Grade höchstens n ist, dessen homogene Komponente vom Grad n gerade

$$v \mapsto (n + 1) \cdot \psi(v, \ldots, v, h) \tag{4}$$

ist.

Es bleibt (b) für $n + 1$ zu folgern. Dazu seien $h_1, \ldots, h_{n+1} \in E$. Nach (a) wissen wir, daß $\Delta_{h_{n+1}} P$ ein Polynom vom Grade höchstens n ist, so daß wir darauf Teil (b) der Induktionsvoraussetzung anwenden können. Danach ist $\Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_n} \Delta_{h_{n+1}} f$ eine Konstante, die aufgrund von (4) und der Induktionsannahme gerade $n! \cdot (n + 1) \cdot \psi(h_1, \ldots, h_{n+1})$ ist. Folglich ist

$$(n + 1)! \cdot P_{n+1}(h) = (n + 1)! \cdot \psi(h, \ldots, h) = \big(\Delta_h^{n+1} f\big)(0). \qquad \square$$

Aufgabe 2 (Der Banachraum $C^r(I, E)$)**.** Seien $I \subseteq \mathbf{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und E ein Banachraum. Mit $C^r(I, E)$ bezeichnen wir den Vektorraum der r-mal stetigen differenzierbaren Funktionen $I \to E$, wobei $r \in \mathbf{N}_0$ ist; vgl. Abschnitt 9.1. Man zeige, daß dieser dann durch die Setzung

$$\|f\|_{(r)} := \max_{i=0,\ldots,r} \left\| f^{(i)} \right\|_\infty$$

zu einem Banachraum wird.

(Tip: Man beachte den Spezialfall des 2. Vererbungssatzes (Abschnitt 13.11); tatsächlich darf dort I ein beliebiges (nicht-entartetes) Intervall sein. In unserem Falle, wo $I = [a, b]$ ist, ist wegen der Kompaktheit von I lokal gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen $(f_n \colon I \to E)_{n \geq m}$ zur gleichmäßigen Konvergenz äquivalent.)

13.14 Koordinatendarstellung der höheren Differentiale

Definition. Seien $E_1, \ldots, E_n$ beliebige Mengen und $f_k \colon E_k \to \mathbf{R}$, $k = 1, \ldots, n$ Funktionen. Dann ist das *Tensorprodukt* von $f_1, \ldots, f_n$ die Funktion

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \colon \prod_{k=1}^{n} E_k \to \mathbf{R}, (p_1, \ldots, p_n) \mapsto f_1(p_1) \cdots f_n(p_n).$$

Proposition. Sei jetzt $G \subseteq \mathbf{R}^n$ eine offene Teilmenge, und sei $f\colon G \to F$ in $a \in G$ eine r-mal differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$D_a^r f = \sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{n} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}(a) \cdot d_a x_{i_1} \otimes \cdots \otimes d_a x_{i_r}.$$

Insbesondere gilt im Falle $F = \mathbf{R}$ für das zweite Differential:

$$\forall v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbf{R}^n \colon D_a^2 f(v, w) = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \cdot H_a f \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

13.15 Symmetrie der höheren Differentiale

Theorem 1 (Eine Darstellung der Hesseschen Form)**.** Ist $f\colon G \to F$ in a mindestens zweimal differenzierbar, so gilt für alle v, $w \in E$, daß

$$D_a^2 f(v, w) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv + tw) - f(a + tv) - f(a + tw) + f(a)}{t^2}. \tag{1}$$

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, erinnern wir an die Definition der Differenzoperatoren Δ_h aus Abschnitt 13.13, die wir für den Beweis der Polarisationsformel benutzt haben. Wir stellen fest, daß für jede in a differenzierbare Funktion $f\colon G \to F$ für jedes $a + h \in G$ das Restglied in der Definition der Differenzierbarkeit durch

$$R(a + h) = (\Delta_h) f(a) - D_a f(h)$$

gegeben ist. Daher existiert zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ ein $\delta \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\delta(a) \subseteq G$ und

$$\forall h \in U_\delta(0) \colon \left\| (\Delta_h f)(a) - D_a f(h) \right\| \leq \varepsilon \cdot \|h\|. \tag{2}$$

Im folgenden Beweis leiten wir nun eine entsprechende Abschätzung für das Differential zweiter Ordnung her:

Beweis. Wir wählen ein $r \in \mathbf{R}_+$, so daß $U_{2r}(a) \subseteq G$ und so daß f auf $U_r(a)$ differenzierbar ist. Für v, $w \in U_r(0)$ ist dann

$$(\Delta_v \Delta_w f)(a) = f(a + v + w) - f(a + v) - f(a + w) + f(a).$$

Wir wollen hierfür folgende Tatsache beweisen:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \left]0, r\right] \forall v, w \in U_\delta(0) \colon \left\| (\Delta_v \Delta_w f)(a) - D_a^2 f(v, w) \right\| \leq \varepsilon (\|v\| + \|w\|)^2. \tag{3}$$

Sei dazu $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ vorgegeben. Aufgrund der Differenzierbarkeit auf $U_r(a)$ können wir dort die Funktion Df bestimmen und um a linear approximieren, d. h. es existiert eine Funktion $R\colon U_r(a) \to \mathrm{L}(E, F)$, so daß

$$\forall p \in U_r(a) \colon D_p f = D_a f + D_a(Df)(p - a) + R(p) \quad \text{mit} \quad \lim_{p \to a} \frac{R(p)}{\|p - a\|} = 0. \tag{4}$$

Wir wählen ein $\delta \in]0, r]$, so daß

$$\forall p \in \dot{U}_\delta(a)\colon \frac{\|R(p)\|}{\|p-a\|} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Damit gilt

$$\forall v \in U_\delta(0)\colon \|R(a+v)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}\|v\|. \tag{5}$$

Wir zeigen jetzt, daß die Abschätzung in (3) mit dieser Wahl von δ gilt: Aufgrund der Dreiecksungleichung haben wir

$$\left\|(\Delta_v \Delta_w f)(a) - D_a^2 f(v,w)\right\| \leq A(v,w) + B(v,w) \tag{6}$$

mit

$$A(v,w) \coloneqq \|(\Delta_v \Delta_w f)(a) - D_{a+v}f(w) + D_a f(w)\|$$

und

$$B(v,w) \coloneqq \left\|D_{a+v}f(w) - D_a f(w) - D_a^2 f(v,w)\right\|.$$

Aufgrund $D_a^2 f(v,w) = D_a(DF)(v)(w)$ folgt für $v \in U_\delta(0)$, daß

$$\begin{aligned} B(v,w) &\leq \|D_{a+v}f - D_a f - D_a(Df)(v)\| \cdot \|w\| \\ &= \|R(a+v)\| \cdot \|w\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \|v\| \cdot \|w\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}(\|v\| + \|w\|)^2, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei wir (4) für die Gleichheit in der zweiten Zeile und (5) für die Abschätzung in der dritten Zeile benutzt haben. Zur Abschätzung von $A(v,w)$ wählen für für beliebiges, aber dann fest gewähltes $v \in U_\delta(0)$ die differenzierbare Funktion

$$g\colon U_\delta(0) \to F, w \mapsto f(a+v+w) - f(a+w) - D_{a+v}f(w) + D_a f(w).$$

Es ist damit

$$A(v,w) = \|g(w) - g(0)\|. \tag{8}$$

Außerdem

$$\begin{aligned} D_w g &= D_{a+v+w}f - D_{a+w}f - D_{a+v}f + D_a f \\ &= (D_a f + D_a(Df)(v+w) + R(a+v+w)) - (D_a f + D_a(Df)(w) + R(a+w)) \\ &\quad - (D_a(Df)(v) + R(a+v)) \\ &= R(a+v+w) - R(a+w) - R(a+v), \end{aligned}$$

wieder aufgrund der Definition des Restgliedes R. Folglich gilt wegen (5) und der Dreiecksungleichung, daß

$$\|D_w g\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot (\|v+w\| + \|v\| + \|w\|) \leq \frac{2\varepsilon}{3} \cdot (\|w\| + \|v\|).$$

Wegen (8) und des Theorems aus Abschnitt 13.10 folgt daraus

$$\|A(v,w)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \cdot (\|v\| + \|w\|) \cdot \|w\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \cdot (\|v\| + \|w\|)^2.$$

Durch Kombination dieser Abschätzung mit (6) und (7) erhalten wir (3).

Es bleibt aus (3) die behauptete Limesdarstellung für $D_a^2 f(v,w)$ für alle $v, w \in E$ zu finden. Unter Verwendung der Differenzoperatoren lautet sie

$$D_a^2 f(v,w) = \lim_{t\to 0} \frac{(\Delta_{tv}\Delta_{tw} f)(a)}{t^2}. \tag{9}$$

Für $v = 0$ oder $w = 0$ gilt sowohl $D_a^2 f(v,w) = 0$ als auch $(\Delta_{tv}\Delta_{tw} f)(a) = 0$, weswegen (9) trivialerweise gilt. Wir können also $v \neq 0$ und $w \neq 0$ voraussetzen. Ist dann ein $\tilde{\varepsilon} \in \mathbf{R}_+$ vorgegeben, so setzen wir $\varepsilon := \tilde{\varepsilon}/(\|v\| + \|w\|)^2$ und wählen $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß (3) gilt. Ist dann $t \in \dot{U}_{\tilde{\delta}}(0)$ mit $\tilde{\delta} := \delta/(\|v\| + \|w\|)$, so können wir auf tv und tw (anstelle von v und w) die Abschätzung in (3) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{(\Delta_{tv}\Delta_{tw} f)(a)}{t^2} - D_a^2 f(v,w) \right\| &= \frac{1}{t^2} \cdot \big\| (\Delta_{tv}\Delta_{tw} f)(a) - D_a^2 f(tv,tw) \big\| \\
&\leq \frac{1}{t^2} \cdot \varepsilon \cdot (\|tv\| + \|tw\|)^2 \\
&= \varepsilon \cdot (\|v\| + \|w\|)^2 \\
&= \tilde{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

(Hierbei gilt die Ungleichung gerade wegen (3).) Damit ist (9) bewiesen. □

Kommentar. Die Gestalt der Formeln (2) und (3) läßt vermuten, daß es eine allgemeine Formel für Differentiale beliebiger Ordnung gibt, und dies ist tatsächlich der Fall, denn es gilt:

Theorem 2. Es sei $f\colon G \to F$ eine in $a \in G$ mindestens n-mal differenzierbare Funktion und $r \in \mathbf{R}_+$ mit $U_{nr}(a) \subseteq G$ und so daß f auf $U_r(a)$ mindestens $(n-1)$-mal differenzierbar ist. Dann:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \,]0,r]\, \forall v_1, \ldots, v_n \in U_\delta(0)\colon$$
$$\|(\Delta_{v_1} \cdots \Delta_{v_n} f)(a) - D_a^n f(v_1, \ldots, v_n)\| \leq \varepsilon \cdot \Big(\sum_{i=1}^n \|v_i\|\Big)^n.$$

Für $n = 1$ bzw. $n = 2$ ist dies gerade (2) und (3). Für alle $v_1, \ldots, v_n \in E$ können wir wie oben aus dem Theorem folgern, daß

$$D_a^n f(v_1, \ldots, v_n) = \lim_{t\to 0} \frac{(\Delta_{tv_1} \cdots \Delta_{tv_n} f)(a)}{t^n}. \tag{10}$$

Es sei aber bemerkt, daß diese Gleichung ein schwächeres Resultat als die Abschätzung im Theorem ist, weil letztere etwas über die lokale Gleichmäßigkeit der Limesgleichung aussagt.

Das Theorem ist für die numerische Mathematik interessant, da die Berechnung der Funktion $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto (\Delta_{v_1} \cdots \Delta_{v_n} f)(a)$ lediglich Auswertung der Funktion f selbst und arithmetische Operationen benötigt und wegen des Theorems das n-te Differential sehr gut (nämlich besser als von n-ter Ordnung) approximiert.

Theorem 3 (Der Schwarzsche Vertauschungssatz)**.** Ist f eine in a mindestens r-mal differenzierbare Funktion, so ist $D_a^r f$ eine *symmetrische* r-lineare Abbildung. Im Spezialfall $E = \mathbf{R}^n$ gilt daher für jede Permutation π von $\{1, \dots, r\}$, daß

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_{\pi(1)}} \cdots \partial x_{i_{\pi(r)}}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots x_{i_r}}.$$

für alle $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Wir führen vollständige Induktion über die Ordnung des Differentials durch. Für Differentiale $D_a f$ erster Ordnung ist nichts zu zeigen. Für Differentiale $D_a^2 f$ zweiter Ordnung folgt die Symmetrie aus der Limesdarstellung (1), deren rechte Seite offensichtlich symmetrisch ist[3].

Führen wir also den Induktionsschritt von r auf $r+1$ durch, wobei wir also $r \geq 2$ annehmen können. Es sei also $f\colon G \to F$ in a mindestens $(r+1)$-mal differenzierbar. Seien weiter Vektoren $v_0, \dots, v_r \in E$ und eine Permutation π der Zahlen $\{0, \dots, r\}$ gegeben. Dann ist zu zeigen, daß

$$D_a^{r+1} f(v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(r)}) = D_a^{r+1} f(v_0, \dots, v_r).$$

Betrachten wir zunächst den Fall $\pi(0) = 0$. Dann gilt nach Theorem 1 aus Abschnitt 13.13 und der Induktionsvoraussetzung, daß

$$\begin{aligned} D_a^{r+1} f(v_0, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(r)}) &= D_a(D^r f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(r)}))(v_0) \\ &= D_a(D^r f(v_1, \dots, v_r))(v_0) \\ &= D_a^{r+1} f(v_0, \dots, v_r), \end{aligned}$$

womit dieser Fall abgehandelt ist.

Sei also $i \coloneqq \pi(0) \neq 0$. Durch Anwendung des ersten Falles erhalten wir zunächst

$$D_a^{r+1} f(v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(r)}) = D_a^{r+1} f(v_i, v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_r).$$

Dabei bedeutet $\widehat{v_i}$, daß der Eintrag v_i in der Sequenz $v_0, \dots, v_r$ auszulassen ist. Wir nutzen nochmals das Theorem 1 aus Abschnitt 13.13 aus und außerdem die Symmetrie des Differentials zweiter Ordnung der Funktion $D^{r-1} f$ und den ersten Fall aus:

$$\begin{aligned} D_a^{n+1} f(v_i, v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) &= \bigl(D_a^2 D^{r-1} f\bigr)(v_i, v_0)(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_r) \\ &= \bigl(D_a^2 D^{r-1} f\bigr)(v_0, v_i)(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_r) \\ &= D_a^{r+1} f(v_0, v_i, v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_r) \\ &= D_a^{r+1} f(v_0, v_1, \dots, v_r). \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen. □

13.16 Die Taylorformel im Mehrdimensionalen

Proposition. Seien $E = \mathbf{R}^m$ und $h \in \mathbf{R}^m$. Für jeden *Multiindex* $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \mathbf{N}_0^m$ definieren wir

$$|\nu| \coloneqq \sum_{i=1}^n \nu_i, \quad \nu! \coloneqq \prod_{i=1}^n (\nu_i!), \quad h^\nu \coloneqq \prod_{i=1}^n h_i^{\nu_i}.$$

[3] Für $r > 2$ dürfen wir nicht analog mit Hilfe der Limesdarstellung (10) argumentieren, da in deren Beweis der hier zu beweisende Schwarzsche Vertauschungssatz eingeht.

Sei weiter $f\colon G \to F$ in $a \in G$ mindestens $|\nu|$-mal differenzierbar. Dann setzen wir

$$\partial^\nu f(a) := \frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial x_1^{\nu_1} \cdots x_m^{\nu_m}}(a).$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann im Falle n-maliger Differenzierbarkeit von f in a, daß

$$\frac{1}{n!} \cdot D_a^n f(h, \ldots, h) = \sum_{|\nu|=n} \frac{1}{\nu!} \cdot \partial^\nu f(a) \cdot h^\nu. \tag{1}$$

Hierbei läuft die Summe über alle Multiindizes ν mit $|\nu| = n$.

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über $n \in \mathbf{N}_0$. Im Falle von $n = 0$ sind sowohl linke als auch rechte Seite von (1) gerade $f(a)$ und die Behauptung damit richtig.

Nehmen wir also an, daß wir die Behauptung für n bewiesen haben. Wir müssen sie dann für $n+1$ zeigen. Nach Theorem 1 aus Abschnitt 13.13 ist

$$D_a^{n+1} f(h, \ldots, h) = D_a(D^n f(h, \ldots, h))(h).$$

Dies erlaubt es uns, die Induktionsvoraussetzung anzuwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)!}(D_a^{n+1} f)(h, \ldots, h) &= \frac{1}{n+1} \cdot D_a\Big(\sum_{|\nu|=n} \frac{1}{\nu!} \cdot (\partial^\nu f) \cdot h^\nu\Big)(h) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{|\nu|=n} \frac{1}{\nu!} \cdot D_a \partial^\nu f(h) \cdot h^\nu \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{|\nu|=n} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\nu!} \frac{\partial \partial^\nu f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \cdot h^\nu \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{|\nu|=n} \sum_{i=1}^m \frac{\nu_i + 1}{(\nu + e_i)!} \cdot \partial^{\nu + e_i} f(a) \cdot h^{\nu + e_i} \\
&= \sum_{|\mu|=n+1} \Big(\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{\substack{|\nu|=n \\ i=1,\ldots,m \\ \nu+e_i=\mu}} (\nu_i + 1)\Big) \cdot \frac{1}{\mu!} \cdot \partial^\mu f(a) \cdot h^\mu.
\end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen, sobald wir für jeden Multiindex μ mit $|\mu| = n+1$ verifiziert haben, daß

$$\sum_{\substack{|\nu|=n \\ i=1,\ldots,m \\ \nu+e_i=\mu}} (\nu_i + 1) = n + 1.$$

Nun, verschwindet in dem Multiindex μ die Komponente μ_i, so existiert kein Multiindex ν mit $\nu + e_i = \mu$. Ist hingegen $\mu_i > 0$, so existiert genau ein Multiindex ν mit $\nu + e_i = \mu$; in diesem Falle ist $\nu_i + 1 = \mu_i$. Daher ergibt sich

$$\sum_{\substack{|\nu|=n \\ i=1,\ldots,m \\ \nu+e_i=\mu}} (\nu_i + 1) = \sum_{i=1}^m \mu_i = |\mu| = n + 1. \qquad \square$$

Kommentar (Rezept zur Erlangung von Taylorformeln)**.** Sei G wieder eine offene Teilmenge eines Banachraumes E, und sei $f\colon G \to F$ eine Funktion. Weiter seien a und $p := a + h$ zwei Punkte in G, so daß die Verbindungsstrecke $[a, p]$ ganz in G liegt. Wir definieren

$$\alpha\colon \mathbf{R} \to E, t \mapsto a + t \cdot h.$$

Dann ist $U := \alpha^{-1}(G)$ eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}$, welche $[0, 1]$ enthält. Es sei $g := f \circ \alpha | U$. Aufgrund des Korollars aus Abschnitt 13.13 wissen wir: Ist f in $\alpha(t)$, $t \in U$, mindestens r-mal differenzierbar, so ist auch g in t mindestens r-mal differenzierbar mit

$$g^{(r)}(t) = D^r_{\alpha(t)} f(h, \ldots, h). \tag{2}$$

Aus dieser Formel folgt auch, daß g in t mindestens r-mal *stetig* differenzierbar ist, wenn f in $\alpha(t)$ mindestens r-mal stetig differenzierbar ist.

Je nach den Differenzierbarkeitseigenschaften von f in den Punkten der Strecke $[a, p]$ können wir für g aus Abschnitt 9.3 eine Version der Taylorformel abschreiben und darin die Ableitungen von g vermöge (1) und (2) durch Ausdrücke in f ersetzen. So erhalten wir zum Beispiel im Falle, daß $F = \mathbf{R}$ und f mindestens n-mal differenzierbar ist, daß es ein $\theta \in \,]0, 1[$ gibt, so daß

$$f(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \cdot D^k_a f(h, \ldots, h) + \frac{1}{n!} D^n_{a+\theta \cdot h} f(h, \ldots, h).$$

(Es sei beachtet, daß per definitionem $D^0_a f(h, \ldots, h) = f(a)$ bedeutet.) Ist $E = \mathbf{R}^n$, so ergibt sich hieraus mit (1) die Formel

$$f(p) = \sum_{|\nu| \le n-1} \frac{1}{\nu!} \cdot \partial^\nu f(a) \cdot h^\nu + \sum_{|\nu| = n} \frac{1}{\nu!} \cdot \partial^\nu f(a + \theta h) \cdot h^\nu.$$

Das folgende Theorem ist offenbar die Verallgemeinerung der ersten Taylorformel-Version aus Abschnitt 9.3; sie kann nicht vermöge obigen Rezeptes erhalten werden.

Theorem (Allgemeine Taylorformel)**.** Sei $f\colon G \to F$ in a mindestens n-mal differenzierbar. Dann existiert genau ein Polynom $P\colon E \to F$ vom Grade n, nämlich das *Taylorpolynom*

$$P\colon p \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot D^k_a f(p - a, \ldots, p - a),$$

von f in a vom Grad n (vgl. folgende Aufgabe 1), welches durch jede der beiden folgenden Eigenschaften charakterisiert ist:

(a) $\forall k = 0, \ldots, n\colon D^k_a P = D^k_a f$.

(b) Das *Restglied* $R := f - P$ geht für $p \to a$ *stärker als von n-ter Ordnung* gegen 0, d. h.
$$\lim_{p \to a} \frac{R(p)}{\|p - a\|^n} = 0.$$

Für alle $p \in G$ haben wir also folgende Darstellung von f:

$$f(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_a^k f(p-a, \ldots, p-a) + R(p).$$

Im Falle $n = 2$ lautet diese Formel einfach

$$f(p) = f(a) + D_a f(p-a) + \frac{1}{2} \cdot D_a^2 f(p-a, p-a) + R(p).$$

Beweis. Die Charakterisierung (a) des Taylorpolynoms folgt einfach aus Beispiel (c) aus Abschnitt 13.13. Es bleibt, die Charakterisierung (b) zu beweisen. Dies machen wir per Induktion über n. Im Falle von $n = 0$ ist nichts zu zeigen.

Für den Induktionsschritt nehmen wir also an, daß die Behauptung für n schon bewiesen ist und wollen sie für $n+1$ beweisen. Sei also $f \colon G \to F$ eine auf ganz G mindestens n-mal differenzierbare und in $a \in G$ mindestens $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion. Wir haben zu zeigen, daß das *Restglied* $(n+1)$*-ter Ordnung*

$$R \colon G \to F, p \mapsto f(p) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot D_a^k f(p-a, \ldots, p-a)$$

für $p \to a$ stärker als von $(n+1)$-ter Ordnung gegen 0 geht. Dazu sei $f_k \colon E \to F$ für $k = 0, \ldots, n+1$ das Polynom

$$f_k \colon E \to F, p \mapsto D_a^k f(p-a, \ldots, p-a);$$

vgl. folgende Aufgabe 1. Es ist differenzierbar und besitzt das Differential

$$D_p f_k(v) = k \cdot D_a^k f(p-a, \ldots, p-a, v).$$

Damit ist das Restglied $(n+1)$-ter Ordnung eine differenzierbare Funktion mit dem Differential

$$D_p R(v) = D_p f(v) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \cdot D_a^k f(p-a, \ldots, p-a, v). \tag{3}$$

Um etwas über dieses Differential aussagen zu können, wenden wir als nächstes die Induktionsvoraussetzung auf die in a mindestens n-mal differenzierbare Funktion $Df \colon G \to \mathrm{L}(E; F)$ an: Für alle $p \in G$ gilt

$$D_p f = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_a^k (Df)(p-a, \ldots, p-a) + S(p), \tag{4}$$

wobei $S \colon G \to \mathrm{L}(E; F)$ das Restglied n-ter Ordnung in a von Df ist, so daß

$$\lim_{p \to a} \frac{S(p)}{\|p-a\|^n} = 0.$$

Aus (4) folgt wegen Theorem 1 aus Abschnitt 13.13, daß

$$D_p f(v) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_a^{k+1} f(p-a, \ldots, p-a, v) + S(p)(v) \tag{5}$$

für alle $v \in E$. Mit (3) ergibt sich

$$DR = S. \tag{6}$$

Damit können wir schließlich zeigen, daß R für $p \to a$ stärker als von $(n+1)$-Ordnung gegen 0 geht: Dazu sei ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ vorgegeben. Dann existiert wegen (5) und (6) ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $U_\delta(a) \subseteq G$ und

$$\forall p \in U_\delta(a)\colon \; \|D_p R\| \le \varepsilon \cdot \|p-a\|^n .$$

Da $U_\delta(a)$ konvex ist, folgt mit dem Theorem des Abschnitts 13.10

$$\forall p \in U_\delta(a)\colon \; \|R(p)\| = \|R(p) - R(a)\| \le \varepsilon \cdot \|p-a\|^{n+1} ,$$

womit alles gezeigt ist. □

Aufgabe 1. Ist $P\colon E \to F$ ein Polynom vom Grade n, so ist auch $Q\colon E \to F, p \mapsto P(p-a)$ ein Polynom vom Grade n.

(Tip: Wieso kann man sich auf die Untersuchung eines *homogenen* Polynoms P beschränken?)

Aufgabe 2. Es seien n, $m \in \mathbf{N}_0$ natürliche Zahlen mit $n \le m$ und P_0, P_1, $\ldots$, P_n, Q_0, Q_1, $\ldots$, $Q_m\colon E \to F$ homogene Polynome; dabei haben P_k und Q_k jeweils den Grad k. Dann gilt folgende Verallgemeinerung des Satzes vom Koeffizientenvergleich:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{m} Q_k \implies \bigl(\forall k = 0, \ldots, n\colon P_k = Q_k \wedge Q_{n+1} = \cdots = Q_m = 0\bigr).$$

Korollar (Über differenzierbare, positiv homogene Funktionen)**.** Jede in $0 \in E$ mindestens r-mal differenzierbare, positiv homogene Funktion $f\colon E \to F$ vom Grad $r \in \mathbf{N}_0$ ist ein homogenes Polynom vom Grad r; genauer:

$$\forall p \in E\colon \; f(p) = \frac{1}{r!} D_0^r f(p, \ldots, p).$$

Es sei beachtet, daß die positive Homogenität lediglich eine Aussage über die Änderung der Funktion in von 0 ausgehenden radialen Richtungen macht. Das ist doch wirklich bemerkenswert.

Zum Beispiel ist eine in 0 differenzierbare, positiv homogene Funktion f vom Grad 1 automatisch also auch additiv:

$$\forall v, w \in E\colon \; f(v+w) = f(v) + f(w).$$

Beweis. Wir betrachten das Restglied

$$R(v) := f(v) - \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} D_0^k f(v, \ldots, v).$$

Nach der Taylorformel gilt die Wachstumsaussage

$$\lim_{v \to 0} \frac{R(v)}{\|v\|^r} = 0.$$

Weiter erhalten wir aufgrund der Homogenitätsvoraussetzung für jedes $\lambda \in \mathbf{R}_+$ und für jedes $i = 1, \ldots, r$, daß

$$\forall v \in E \colon \lambda^{r-i} \cdot f(v) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \cdot \lambda^{k-i} \cdot D_0^k f(v, \ldots, v) + \lambda^{-i} \cdot R(\lambda \cdot v).$$

Wenn wir in dieser Formel λ gegen 0 gehen lassen, erhalten wir der Reihe nach

$$D_0^i f(v, \ldots, v) = 0$$

für $i = 0, \ldots, r-1$ und

$$f(v) = \frac{1}{r!} \cdot D_0^r f(v, \ldots, v)$$

für $i = r$. □

13.17 Über lokale Extremwerte

Definition. Seien M ein topologischer Raum (etwa der topologische Teilraum G des Banachraumes E), $f\colon M \to \mathbf{R}$ eine Funktion und $a \in M$. Wir sagen, f besitzt in a ein *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(a)$ gibt, so daß

$$\forall p \in U \colon f(p) \leq f(a) \quad (\text{bzw. } f(p) \geq f(a)). \tag{1}$$

Gilt in (1) sogar $f(p) < f(a)$ (bzw. $f(p) > f(a)$) für alle $p \in U \setminus \{a\}$, so sprechen wir von einem *strengen* lokalen Maximum (bzw. Minimum).

Theorem. Seien G eine *offene* Teilmenge eines Banachraumes E, $a \in G$ und $f\colon G \to \mathbf{R}$ eine Funktion.

Notwendiges Kriterium für Extremwerte Besitzt f in a ein lokales Maximum (bzw. ein lokales Minimum) und ist f in a differenzierbar, so ist a ein *kritischer Punkt* von f, d. h. $d_a f = 0$ (also $\operatorname{grad}_a f = 0$ im Falle, daß E ein Hilbertraum ist). Ist f in a sogar zweimal differenzierbar, so ist $D_a^2 f$ *negativ semidefinit* (bzw. *positiv semidefinit*, d. h.

$$\forall v \in E \colon D_a^2 f(v, v) \leq 0 \quad (\text{bzw. } D_a^2 f(v, v) \geq 0).$$

Hinreichendes Kriterium für Extremwerte Ist f in a zweimal differenzierbar und ist a ein kritischer Punkt von f, so gilt:

(a) Falls ein $m \in \mathbf{R}_+$ existiert, so daß

$$\forall v \in E \colon D_a^2 f(v, v) \geq m \cdot \|v\|^2, \tag{2}$$

so besitzt f in a ein strenges lokales Minimum.

(b) Falls ein $m \in \mathbf{R}_+$ existiert, so daß

$$\forall v \in E \colon D_a^2 f(v, v) \leq -m \cdot \|v\|^2, \tag{3}$$

so besitzt f in a ein strenges lokales Maximum.

(c) Ist die Hessesche Form $D_a^2 f$ *indefinit*, d. h.

$$\exists v, w \in E\colon D_a^2 f(v,v) < 0 < D_a^2 f(w,w),$$

so besitzt f in a weder ein lokales Maximum, noch ein lokales Minimum. In diesem Falle wird a ein *Sattelpunkt* von f genannt.

Kommentar. Sei jetzt $\dim E < \infty$. Dann ist (2) zur positiven Definitheit der Hesseschen Form $D_a^2 f$ äquivalent, d. h. zu

$$\forall v \in E \setminus \{0\}\colon D_a^2 f(v,v) > 0,$$

und dies bedeutet, daß $D_a^2 f$ ein Skalarprodukt ist. Weiter ist die Bedingung (3) zur negativen Definitheit der Hesseschen Form $D_a^2 f$ äquivalent, d. h. zu

$$\forall v \in E \setminus \{0\}\colon D_a^2 f(v,v) < 0.$$

Ist E ein euklidischer Vektorraum (also ein endlich-dimensionaler Hilbertraum), so können wir bekanntlichermaßen die symmetrische Bilinearform $D_a^2 f\colon E \times E \to \mathbf{R}$ mit Hilfe genau eines selbstadjungierten Endomorphismus $A\colon E \to E$ durch

$$\forall v, w \in E\colon D_a^2 f(v,w) = \langle Av, w\rangle$$

beschreiben; der Endomorphismus A heißt der *Hessesche Tensor* von f in a. Sind $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ die Eigenwerte von A und $(a_1, \ldots, a_n)$ eine zugehörige Orthonormalbasis von Eigenvektoren, also

$$\forall k = 1, \ldots, n\colon Aa_k = \lambda_k \cdot a_k,$$

so gilt

$$\forall v \in E\colon D_a^2 f(v,v) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \langle v, a_k\rangle^2.$$

Daraus entnehmen wir, daß

(a) $D_a^2 f$ ist positiv definit $\iff \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$,

(b) $D_a^2 f$ ist negativ definit $\iff \lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0$ und

(c) $D_a^2 f$ ist indefinit $\iff \lambda_1 < 0 < \lambda_n$.

In den Fällen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_n = 0$ macht das Theorem keine Aussage über das Vorliegen lokaler Extrema.

Im Falle $E = \mathbf{R}^n$ wird der Hessesche Tensor A bezüglich der kanonischen Basis und des kanonischen Skalarproduktes gerade durch die Hessesche Matrix $H_a f$ (vgl. Abschnitt 13.1) beschrieben. In diesem Falle sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix $H_a f$.

Aufgabe 1. Eine Warenhauskette plant die Errichtung eines Warenlagers, von dem aus ihre Warenhäuser in n etwa gleich großen Städten an den Orten A_1, A_2, ..., A_n beliefert werden sollen. Um die Transportkosten möglichst gering zu halten, soll das Lager an einer Stelle L gebaut werden, für die die Abstandssumme $r(L) := \sum_{k=1}^{n} \|A_k - L\|$ minimal ist.

(a) Dieses Optimierungsproblem besitzt (mindestens) eine Lösung.

(b) Aus der allgemeinen Theorie leite man unter der Voraussetzung $L \notin \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine notwendige Bedingung für die Lage von L her. (Tip: $\operatorname{grad}_L r$.)

(c) Man arbeite für $n \in \{2, 3, 4\}$ die Lösung explizit aus.

(Tip: Was bedeutet es geometrisch, wenn die Summe von n Einheitsvektoren verschwindet? Im Falle $n = 3$ unterscheide man die Fälle, daß alle Winkel des Dreiecks $\Delta(A_1, A_2, A_3)$ kleiner als 120° sind, bzw. einer der Winkel größer oder gleich 120°. Im ersten Falle reicht es, wenn die Lösung durch verschieben eines Sterns wie im Logo einer berühmten schwäbischen Automarke gefunden wird.)

Aufgabe 2 (Eine fundamentale Optimierungsaufgabe)**.** Es seien H ein Hilbertraum, V ein abgeschlossener Untervektorraum von H und $b \in H$. Es soll folgende Optimierungsaufgabe behandelt werden:

Bestimme $v_0 \in V$ so, daß v_0 zu b einen möglichst kleinen Abstand hat; es ist also dasjenige $v_0 \in V$ gesucht, so daß die Funktion

$$V \to \mathbf{R}, v \mapsto \|v - b\|$$

in v_0 minimal ist.

Zur analytischen Behandlung ist es einfacher, das Quadrat der fraglichen Funktion, also

$$f\colon V \to \mathbf{R}, v \mapsto \|v - b\|^2 = \langle v - b, v - b\rangle$$

zu minimieren.

(a) Man zeige, daß in der oben beschriebenen Situation für ein jedes vorgegebene $v_0 \in V$ die folgenden Aussagen (i)–(iv) zueinander paarweise äquivalent sind:

(i) Es ist v_0 ein kritischer Punkt von f.

(ii) Der „Verbindungsvektor“ $b - v_0$ steht senkrecht auf dem Unterraum V.

(iii) Es ist v_0 derjenige Vektor aus V, der im Sinne des Rieszschen Darstellungssatzes aus Abschnitt 12.10 die Linearform $\lambda\colon V \to \mathbf{R}, v \mapsto \langle v, b\rangle$ beschreibt.

(iv) Es existiert ein $d \in [0, \infty[$, so daß gilt:

$$\forall v \in V\colon f(v) = \langle v - v_0, v - v_0\rangle + d.$$

(b) Man folgere aus (a), daß die Optimierungsaufgabe genau eine Lösung $v_0 \in V$ besitzt. Geometer erkennen, daß v_0 die Orthogonalprojektion von b auf den Unterraum V ist.

(c) Gilt $n := \dim V < \infty$ und ist $(a_1, \dots, a_n)$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} \langle b, a_i \rangle \cdot a_i.$$

Aufgabe 3 (Noch eine Optimierungsaufgabe)**.** Es seien H ein Hilbertraum und b, b_1, …, b_m irgendwelche Vektoren aus H. Wir wollen die folgende Optimierungsaufgabe betrachten:

> Bestimme ein m-Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m$, so daß die Linearkombination $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_k$ möglichst nahe bei b liegt, daß also
>
> $$E(\lambda_1, \dots, \lambda_m) := \left\langle b - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_k, b - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_k \right\rangle$$
>
> minimiert wird.

Man zeige, daß diese Optimierungsaufgabe Lösungen besitzt, und zwar sind diese gerade die Lösungen $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \lambda_k = c_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

wobei $a_{ik} := \langle b_i, b_k \rangle$ und $c_i := \langle b_i, b \rangle$.

Falls die Vektoren b_1, …, b_m linear unabhängig sind, so ist die Lösung eindeutig bestimmt.

(Tip: Aufgabe 2 mit einem bestimmten V anwenden.)

Aufgabe 4 (Funktionen zu Feldern von Stützpunkten)**.** Seien (x_1, y_1), …, $(x_n, y_n) \in \mathbf{R}^2$ ein Feld von Stützpunkten und g_1, …, $g_m\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ eine Liste von Funktionen; es gelte $a \leq x_j \leq b$ für $j = 1$, …, n. Gesucht sind Koeffizienten λ_1, …, $\lambda_m \in \mathbf{R}$, so daß der Graph der Linearkombination $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot g_k$ möglichst gut dem Stützpunktfeld angepaßt ist, d. h. genauer, daß das „Gaußsche Fehlerquadrat“

$$E(\lambda_1, \dots, \lambda_m) := \sum_{j=1}^{n} \Big(y_j - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot g_k(x_j) \Big)^2$$

minimiert wird.

Man zeige, daß diese Optimierungsaufgabe Lösungen besitzt, und zwar sind diese gerade die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \lambda_k = c_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

wobei $a_{ik} := \sum\limits_{j=1}^{n} g_i(x_j) \cdot g_k(x_j)$ und $c_i := \sum\limits_{j=1}^{n} g_i(x_j) \cdot y_j$.

(Tip: Aufgabe 3 mit $H = \mathbf{R}^n$ anwenden.)

Aufgabe 5 (Arithmetisches Mittel und lineare Regression)**.** Es sei ein Stützpunktfeld $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbf{R}^2$ gegeben, in dem nicht alle x_j gleich sind.

(a) Das arithmetische Mittel $\overline{y}$ der „Meßwerte“ $y_1, \ldots, y_n$ ist die Zahl y, für welche die Funktion

$$y \mapsto \sum_{j=1}^{n} (y - y_j)^2$$

ihren minimalen Wert annimmt.

(Tip: Diese Aussage läßt sich sehr schnell aus Aufgabe 4 mit $m = 1$ und $g_1 \equiv 1$ herleiten. Es läßt sich aber auch ein direkter Beweis geben.)

(b) Als die *Regressionsgerade* des Stützpunktfeldes wird diejenige „Gerade“ $y(x) = \alpha x + \delta$ bezeichnet, die optimal zu dem Stützpunktfeld paßt, d. h. für welche der Ausdruck

$$\sum_{j=1}^{n} \big(y_j - y(x_j)\big)^2$$

minimal wird.

Man zeige: Die Regressionsgerade des Feldes $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ ist durch

$$\alpha = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \quad \text{und} \quad \delta = \overline{y} - \alpha \overline{x}$$

gegeben, wobei $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{xy}$ und $\overline{x^2}$ die folgenden arithmetischen Mittel sind:

$$\overline{x} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad \overline{y} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j,$$

$$\overline{x^2} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \qquad \overline{xy} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

(Tip: Aufgabe 4.)

Kapitel 14

Grundlegende Theoreme über differenzierbare Abbildungen

14.1 Zwei weiterführende Versionen des Banachschen Fixpunktsatzes

Theorem. Seien (E, d) ein vollständiger metrischer Raum, $p_0 \in E$, $r \in \mathbf{R}_+$ und $L \in [0, 1[$.

(a) Es sei $f\colon U_r(p_0) \to E$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall p, q \in U_r(p_0)\colon d(f(p), f(q)) \leq L \cdot d(p, q)$,

(ii) $d(p_0, f(p_0)) < (1 - L) \cdot r$.

Dann ist die Banachfolge $(p_n)_{n \geq 0}$ bezüglich f mit Startpunkt p_0 definierbar (vgl. Abschnitt 4.15), sie liegt in $U_r(p_0)$ und konvergiert gegen einen Fixpunkt $p^* \in U_r(p_0)$ von f; in $U_r(p_0)$ ist p^* der einzige Fixpunkt von f. Weiterhin gilt

$$d(p_n, p^*) \leq L^n \cdot r.$$

(b) Seien Λ ein topologischer Raum (der „Parameterraum“) und $g\colon \Lambda \times U_r(p_0) \to E$ eine stetige Abbildung, so daß für alle $\lambda \in \Lambda$ die Funktionen $g_\lambda := g(\lambda, \cdot)\colon U_r(p_0) \to E$ die Eigenschaften (i) und (ii) der Funktion f aus (a) erfüllen, und zwar jeweils mit demselben $L \in [0, 1[$.

Dann existiert genau eine Abbildung $h\colon \Lambda \to U_r(p_0)$, so daß

$$\forall \lambda \in \Lambda\colon g(\lambda, h(\lambda)) = h(\lambda);$$

und diese Funktion h ist stetig.

Beweis. **(a)** Mit Induktion über n wollen wir zeigen, daß die Banachfolge $(p_n)_{n\geq 0}$ bezüglich f mit Startpunkt p_0 wohldefiniert ist und damit in $U_r p_0$ liegt. Der Induktionsanfang ist wegen $p_0 \in U_r p_0$ klar.

Für den Induktionsschritt von n auf $n+1$ betrachten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} d(p_{n+1}, p_0) &\leq d(p_{n+1}, f(p_0)) + d(p_0, f(p_0)) \\ &= d(f(p_n), f(p_0)) + d(p_0, f(p_0)) \\ &\leq L \cdot d(p_n, p_0) + d(p_0, f(p_0)), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir erst die Dreiecksungleichung und dann die Eigenschaft (i) verwendet haben. Mit (ii) und der Induktionsvoraussetzung $p_n \in U_r(p_0)$, also $d(p_n, p_0) < r$, folgt weiter

$$d(p_{n+1}, p_0) < L \cdot d(p_n, p_0) + (1-L) \cdot r \leq L \cdot r + (1-L) \cdot r = r.$$

Wir können damit mutatis mutandis den Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes aus 4.15 anwenden und erhalten, daß Banachfolge $(p_n)_{n\geq 0}$ gegen ein $p^* \in E$ konvergiert. Weiterhin gilt wie dort

$$d(p_n, p^*) \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot d(p_1, p_0) \leq L^n \cdot r,$$

wobei wir für die letzte Abschätzung (ii) benutzt haben.

Bilden wir den Limes $n \to \infty$ in der Abschätzung (1), so erhalten wir wegen der Stetigkeit der Metrik, daß

$$d(p^*, p_0) \leq L \cdot d(p^*, p_0) + d(p_0, f(p_0)) < L \cdot d(p^*, p_0) + (1-L) \cdot r,$$

wobei die rechte Abschätzung wieder (ii) ist. Es folgt $d(p^*, p_0) < r$, also $p^* \in U_r(p_0)$. Damit können wir f auf p^* anwenden, und wie im Beweis vom Banachschen Fixpunktsatz aus 4.15 folgt, daß p^* ein Fixpunkt ist und dieser (in $U_r(p_0)$) sogar eindeutig ist.

((b)) Für jedes $\lambda \in \Lambda$ muß $h(\lambda)$ offensichtlich ein Fixpunkt der Abbildung g_λ in $U_r(p_0)$ sein. Damit folgt aus (a), die Existenz und Eindeutigkeit von h.

Es bleibt zu zeigen, daß h in jedem $\lambda_0 \in \Lambda$ stetig ist. Sei dazu ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ vorgegeben. Wir setzen dann $\tilde{\varepsilon} := (1-L) \cdot \varepsilon/2$.

Aufgrund der Stetigkeit von g in $(\lambda_0, h(\lambda_0))$ und der Definition der Produkttopologie existiert eine offene Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(\lambda_0, \Lambda)$ mit

$$g(U \times \{h(\lambda_0)\}) \subseteq U_{\tilde{\varepsilon}}(h(\lambda_0)). \tag{2}$$

Wir wollen $h(U) \subseteq U_\varepsilon(h(\lambda_0))$ zeigen, womit die Stetigkeit von h in λ_0 folgt. Sei dazu $\lambda \in U$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(h(\lambda), h(\lambda_0)) &= d(g_\lambda(h(\lambda)), g_{\lambda_0}(h(\lambda_0))) \\ &\leq d(g_\lambda(h(\lambda)), g_\lambda(h(\lambda_0))) + d(g_\lambda(h(\lambda_0)), g_{\lambda_0}(h(\lambda_0))) \\ &\leq L \cdot d(h(\lambda), h(\lambda_0)) + \tilde{\varepsilon}, \end{aligned}$$

wobei wir die Definition von h, die Dreiecksungleichung und schließlich (i) und (2) verwendet haben. Es folgt

$$d(h(\lambda), h(\lambda_0)) \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{1-L} < \varepsilon,$$

womit $h(\lambda) \in U_\varepsilon(h(\lambda_0))$ gezeigt ist.

□

14.2 Über die stetige Umkehrbarkeit einer Abbildung

Theorem. Es seien G eine offene Teilmenge eines Banachraumes E und $f\colon G \to E$ eine stetige Abbildung, die von id_E nur um eine kontrahierende Abbildung abweicht, d. h. es existiert ein $L \in [0,1[$, so daß für alle p, $q \in G$ gilt:

$$\left\|\left(f(p)-p\right)-\left(f(q)-q\right)\right\| \leq L \cdot \|p-q\|\,. \tag{1}$$

Dann ist f ein *Homöomorphismus in E*, d. h. $f(G)$ ist eine offene Teilmenge von E und $f\colon G \to f(G)$ ist ein Homöomorphismus; vgl. Abschnitt 12.4. In diesem Falle gilt für die Umkehrabbildung $\check{f}\colon f(G) \to G$ außerdem: Ist $a \in G$, $b := f(a)$ und $r \in \mathbf{R}_+$ mit $U_r(a) \subseteq G$, so ist $U_{(1-L)r}(b) \subseteq f(G)$ und

$$\forall q \in U_{(1-L)r}(b)\colon \left\|\check{f}(q)-\check{f}(b)\right\| \leq (1-L)^{-1} \cdot \|q-b\|\,.$$

Kommentar. Mit Mitteln der algebraischen Topologie läßt sich zeigen, daß im Falle $\dim E < \infty$ das Theorem richtig bleibt, wenn nur die Stetigkeit und Injektivität von f, nicht aber die Bedingung (1) vorausgesetzt werden.

14.3 Der lokale Umkehrsatz

Theorem. Seien E und F Banachräume, $G \subseteq E$ eine offene Teilmenge, $r \in \mathbf{N}_1 \cup \{\infty\}$, und $f\colon G \to F$ eine C^r-Abbildung. Ist dann für ein $a \in G$ das Differential $D_a f$ ein Vektorraumisomorphismus[1], so existiert eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(a,G)$, so daß $f|U$ ein C^r-Diffeomorphismus in F ist, d. h. $f(U)$ ist eine offene Teilmenge von F und $f|U\colon U \to f(U)$ ist ein C^r-Diffeomorphismus.

Die lineare Approximation $D_a f$ gibt also bereits einen guten Einblick in das lokale Verhalten von f. Diese Aussage wird durch folgende Aufgabe unterstrichen:

Aufgabe 1. Es seien E und F Banachräume, G eine offene Teilmenge von E, $f\colon G \to F$ eine C^r-Abbildung mit $r \geq 1$ und $a \in G$.

(a) Ist das Differential $D_a f\colon E \to F$ eine surjektive Abbildung und besitzt sein Kern ein abgeschlossenes Komplement (d. h. existiert ein abgeschlossener Unterraum V von E mit $E = V \oplus \ker D_a f$), so existiert ein $\rho \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $\varepsilon \in]0,\rho]$ gilt:

$$f(a) \in f(U_\varepsilon(a))^o.$$

Wir nennen diese Eigenschaft *lokale Surjektivität.*

(Tip: Man betrachte $f \circ \varphi$ mit $\varphi\colon V \to E, p \mapsto a+p$ in der Nähe von 0.)

[1] Es sei beachtet, daß nach dem Satz vom inversen Operator ein stetiger Vektorraumisomorphismus zwischen Banachräumen automatisch ein Homöomorphismus ist.

(b) Ist das Differential eine $D_af\colon E \to F$ eine injektive Abbildung und besitzt sein Bild ein abgeschlossenes Komplement (d. h. existiert ein abgeschlossener Unterraum W von F mit $F = W \oplus \operatorname{im} D_af$, so existiert eine offene Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(a, G)$, so daß $f|U$ injektiv ist. Wir nennen diese Eigenschaft *lokale Injektivität.*

(Tip: Man betrachte das Differential von $g\colon G \times W \to F, (p, q) \mapsto q + f(p)$ in $(a, 0)$.)

Natürlich (?) können wir im Falle $\dim E < \infty$ bzw. $\dim F < \infty$ ohne Einschränkung die Existenz abgeschlossener Komplemente annehmen. Das Gleiche gilt für (a), wenn E ein Hilbertraum ist.

Aufgabe 2.

Polarkoordinaten. Die Einschränkung

$$f\colon \mathbf{R}_+ \times \left]-\pi, \pi\right[\to \mathbf{R}^2, (r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

der Polarkoordinaten-Abbildung (vgl. Abschnitt 7.19) ist ein C^∞-Diffeomorphismus auf die geschlitzte Ebene $\mathbf{R}^2 \setminus \{p \in \mathbf{R}^2 \mid y(p) = 0, x(p) \leq 0\}$.

(Tip: Die Funktionaldeterminante von f ist $\det(J_{(r,\varphi)}f) = r$.)

Kugelkoordinaten. Die Einschränkung $f := F|\mathbf{R}_+ \times \left]0, \pi\right[\times \left]-\pi, \pi\right[$ der *Kugelkoordinaten-Abbildung*

$$F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (r, \theta, \varphi) \mapsto (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))$$

ist ein C^∞-Diffeomorphismus auf

$$\mathbf{R}^3 \setminus \{p \in \mathbf{R}^3 \mid y(p) = 0, x(p) \leq 0\}.$$

(Tip: Die Funktionaldeterminante von f ist $\det(J_{(r,\theta,\varphi)}f) = r^2\sin(\theta)$.)

14.4 Über implizit definierte Funktionen

Definition (Partielle Differentiale)**.** Es sei $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ ein Produkt reeller Banachräume, F ein weiterer reeller Banachraum, $G \subseteq E$ eine offene Teilmenge und $f\colon G \to F$ eine in $a = (a_1, \ldots, a_n) \in G$ differenzierbare Funktion. Für jedes $k = 1, \ldots, n$ ist die Abbildung

$$g_k\colon \operatorname{pr}_k(G) \to F, p \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, p, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

dann in a_k differenzierbar. Das *partielle Differential* von f in a ist durch

$$\frac{\partial f}{\partial p_k}(a) := D_{a_k} g_k.$$

definiert. Wir benutzen folgende abkürzende Schreibweise:

$$\frac{\partial f}{\partial p_k}(a) \cdot w := D_{a_k} g_k(w).$$

Proposition. In der Situation der Definition gilt die Formel

$$\forall v = (v_1, \ldots, v_n) \in E\colon D_a f(v) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_k}(a) \cdot v_k.$$

Insbesondere ist

$$\frac{\partial f}{\partial p_k}(a) \cdot v_k = D_a f(v) \quad \text{mit } v := \{(0, \ldots, \underbrace{v_k}_{k}, \ldots, 0)\}.$$

Beweis. Beweisidee: $g_k = f \circ i_k$ mit $i_k\colon E_k \to E, p \mapsto (a_1, \ldots, a_{k-1}, p, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. □

Nach dieser vorbereitenden Definition können wir nun das folgende wichtige Theorem formulieren und beweisen:

Theorem. Seien E_1, E_2 und F Banachräume und $E := E_1 \times E_2$ der Produktbanachraum, dessen Punkte mit (p, q) bezeichnet seien. Weiterhin seien G eine offene Teilmenge von E, $g\colon G \to F$ eine C^r-Funktion mit $r \in \mathbf{N}_1 \cup \{\infty\}$, N ihre Nullstellenmenge, also

$$N := \{(p, q) \in G \mid g(p, q) = 0\},$$

und (a, b) ein Punkt von N, also $g(a, b) = 0$.

Ist dann das partielle Differential $\frac{\partial g}{\partial q}(a, b) \in \mathrm{L}(E_2; F)$ ein Vektorraumisomorphismus, so existieren Umgebungen $U_1 \in \mathfrak{U}^o(a, E_1)$ und $U_2 \in \mathfrak{U}^o(b, E_2)$ mit $U_1 \times U_2 \subseteq G$, so daß $N \cap (U_1 \times U_2)$ der Graph einer C^r-Funktion $f\colon U_1 \to U_2$ ist, also

$$\forall (p, q) \in U_1 \times U_2\colon \bigl(g(p, q) = 0 \iff q = f(p)\bigr). \tag{1}$$

Wir sagen in diesem Falle auch, daß wir durch Auflösen der Gleichung $g(p, q) = 0$ nach q die Funktion f erhalten. Denn wegen (1) ist die Funktion $f\colon U_1 \to U_2$ ja gerade durch die Gleichung $g(p, f(p)) = 0$ festgelegt.

Weiterhin gilt in diesem Falle, daß

$$\forall (v, w) \in E_1 \times E_2\colon \bigl(d_{(a,b)} g(v, w) = 0 \iff w = d_a f(v)\bigr).$$

Beispiel (Der Spezialfall $E_1 = \mathbf{R}^n$, $F = E_2 = \mathbf{R}^m$)**.** Die kanonischen Koordinatenfunktionen des $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ seien mit $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ bezeichnet, genauer: Ist $p = (p_i) \in \mathbf{R}^n$ und $q = (q_k) \in \mathbf{R}^m$, so ist $x_i(p, q) = p_i$ und $y_k(p, q) = q_k$. In diesem Falle kann die Funktion $g\colon G \to \mathbf{R}^m$ durch ein m-Tupel $(g_1, \ldots, g_m)$ von C^r-Funktionen $g_k\colon G \to \mathbf{R}$ dargestellt werden, und die Menge N ist die Menge der Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Voraussetzung an das partielle Differential von g kann jetzt durch

$$\det\Big(\frac{\partial g_j}{\partial y_k}\Big)_{j,k=1,\ldots,m} \neq 0$$

ausgedrückt werden. Die „implizit definierte" Funktion f ist jetzt ein m-Tupel $(f_1, \ldots, f_m)$ von C^r-Funktionen $f_k \colon U_1 \to \mathbf{R}$. Wir sagen auch, daß wir $f_1, \ldots, f_m$ durch Auflösen des Gleichungssystems (2) nach $y_1, \ldots, y_m$ erhalten haben.

Aufgabe 1. Die Situation sei so wie im Theorem über implizit definierte Funktionen. Es sei weiterhin eine *stetige* Funktion $h \colon U \to E_2$ gegeben, wobei $U \in \mathfrak{U}^o(a, E_1)$ und $h(a) = b$ ist, so daß gilt:

$$\forall p \in U \colon \big((p, h(p)) \in G \wedge g(p, h(p)) = 0\big).$$

Dann existiert eine Umgebung $U' \in \mathfrak{U}^o(a, U)$, so daß $h|U'$ eine C^r-Funktion ist; und in der Nähe von a läßt sich ihr Differential durch

$$D_p h = -\Big(\frac{\partial g}{\partial q}(p, h(p))\Big)^{-1} \circ \Big(\frac{\partial g}{\partial p}(p, h(p))\Big)$$

ausdrücken.

Aufgabe 2. Es sei V ein endlich-dimensionaler reeller Banachraum, $E \coloneqq \operatorname{End}(V)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen $V \to V$, $A_0 \in E$ und $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ ein Eigenwert von A_0 der algebraischen Vielfachheit 1, d. h. λ_0 ist eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms P_{A_0} von A_0. Dann existiert eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(A_0, E)$ und eine C^∞-Funktion $f \colon U \to \mathbf{R}$ mit $f(A_0) = \lambda_0$, so daß für jedes $A \in U$ die Zahl $f(A)$ ein Eigenwert der Vielfachheit 1 von A ist.

(Tip: $g \colon (A, t) \mapsto P_A(t)$ ist eine C^∞-Funktion; vgl. Abschnitt 13.6).

14.5 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

In der mathematischen Modellbildung tauchen an vielen Stellen Räume auf, in denen zumindest lokal Koordinaten eingeführt werden können, mittels derer die Position von Punkten oder die Änderung von Funktionen beschrieben werden können. Beispiele sind die zweidimensionale Sphäre mit geographischen Koordinaten, Konfigurations- und Zustandsraum mechanischer Systeme mit sogenannten verallgemeinerten Koordinaten q_i und verallgemeinerten Geschwindigkeitskoordinaten $\dot{q}_i$, „einfache" thermodynamische Systeme mit den „Koordinaten" p und V (Druck und Volumen), „die" Raumzeit der allgemeinen Relativitätstheorie, usw. Für diese Modelle ist der Begriff der Mannigfaltigkeit grundlegend.

Definition 1. Seien M ein Hausdorffraum und E ein reeller Banachraum.

Eine *Karte* (U, x) von M von Typ E ist eine offene Teilmenge U von M zusammen mit einem Homöomorphismus $x \colon U \to E$ *in* E (d. h. $x(U)$ ist offen in E). Mit $\mathfrak{A}_0^E(M)$

bezeichnen wir die Menge aller möglichen Karten von M vom Typ E. Ist (U, x) eine Karte von Typ $\mathbf{R}^n$ und $x = (x_1, \ldots, x_n)$, so heißen die Funktionen $x_1, \ldots, x_n \colon U \to \mathbf{R}$ auch die *Koordinatenfunktionen* der Karte.

Sind (U, x), $(V, y) \in \mathfrak{A}_0^E(M)$, so heißt der Homöomorphismus

$$y \circ \check{x} \colon x(U \cap V) \to y(U \cap V) \subseteq E$$

die *Koordinatentransformation* von (U, x) nach (V, y).

Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_0^E(M)$ heißt *Atlas* von M vom Typ E, wenn

$$\forall p \in M \, \exists (U, x) \in \mathfrak{A} \colon p \in U.$$

Der Hausdorffraum M heißt eine *topologische Mannigfaltigkeit* vom Typ E, wenn $\mathfrak{A}_0^E(M)$ ein Atlas von M ist, wenn also M *lokal homöomorph* zu E ist. Topologische Mannigfaltigkeiten vom Typ $\mathbf{R}^n$ heißen *n-dimensionale* topologische Mannigfaltigkeiten.

Kommentar 1. Eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten kann nicht gleichzeitig m-dimensional mit $m \neq n$ sein.

Beispiel. Wir wir in Aufgabe 2 in Abschnitt 14.3 gesehen haben, induziert die Kugelkoordinaten-Abbildung durch Einschränkung einen C^∞-Diffeomorphismus

$$\mathbf{R}_+ \times \,]0, \pi[\, \times \,]{-\pi}, \pi[\, \to \mathbf{R}^3 \setminus \{p \in \mathbf{R}^3 \mid y(p) = 0 \wedge x(p) \leq 0\}.$$

Daher ist die Einschränkung $f \coloneqq F |]0, \pi[\, \times \,]{-\pi}, \pi[$ der Abbildung

$$F \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, (\theta, \varphi) \mapsto (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))$$

ein Homöomorphismus auf die geschlitzte Einheitssphäre

$$U \coloneqq \mathbf{S}^2 \setminus \{p \in \mathbf{S}^2 \mid y(p) = 0 \wedge x(p) \leq 0\}.$$

Bezeichnen wir mit $x \colon U \to \mathbf{R}^2$ die Umkehrabbildung von f, so erhalten wir mit (U, x) eine Karte der Einheitssphäre. Ihre Koordinatenfunktionen sind allgemein als *sphärische* Koordinaten bekannt. Mithilfe orthogonaler Transformationen $A \in \mathrm{O}(\mathbf{R}^3)$ erhalten wir weitere Karten (U_A, x_A) vermöge der Setzung $U_A \coloneqq A^{-1}(U)$ und $x_A \coloneqq x \circ A \colon U_A \to \mathbf{R}^2$. Offenbar bildet die Gesamtheit dieser Karten einen Atlas der Einheitssphäre; diese ist somit eine topologische Mannigfaltigkeit.

Auf das bekannteste Beispiel einer topologischen Mannigfaltigkeit, das mathematische Modell des Raumes der Anschauung, gehen wir im kommenden Abschnitt 14.6 ein.

Definition 2. Seien M ein Hausdorffraum und E ein reeller Banachraum. Ein Atlas $\mathfrak{A}$ von M vom Typ E heißt ein *C^r-Atlas*, $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, wenn die Koordinatentransformationen zwischen je zwei Karten von $\mathfrak{A}$ jeweils C^r-Diffeomorphismen sind.

Kommentar 2. Jeder C^r-Atlas von M ist Teilmenge eines maximalen C^r-Atlas von M.

Am Beispiel der Differenzierbarkeit von Funktionen zeigen wir, in welcher Weise auf C^r-Mannigfaltigkeiten Analysis betrieben werden kann. Eine ausführliche Einführung in die Analysis auf Mannigfaltigkeiten wird in jeder Differentialgeometrie-Vorlesung gegeben.

Definition 3. Sei $\mathfrak{A}$ ein C^r-Atlas eines Hausdorffraumes M. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbf{R}$ ist dann bezüglich $\mathfrak{A}$ eine C^k-Funktion, $k \in \{0, \ldots, r\}$, wenn für alle Karten $(U, x) \in \mathfrak{A}$ die Abbildung

$$f \circ \check{x}\colon x(U) \to \mathbf{R}$$

eine C^k-Funktion ist.

14.6 Affine Räume als C^∞-Mannigfaltigkeiten

Definition. Sei E ein Banachraum. Ein *affiner Raum* $(M, +)$ vom Typ E ist eine nicht leere Menge M zusammen mit einer Abbildung

$$E \times M \to M, (v, p) \mapsto p + v,$$

welche die folgenden Axiome erfüllt:

(A0) $\forall p \in M\colon p + 0 = p,$

(A1) $\forall p \in M\, \forall v, w \in E\colon (p + v) + w = p + (v + w),$

(A2) $\forall p, q \in M\, \exists! v \in E\colon p + v = q.$

Sind p, $q \in M$, so heißt der eindeutige Vektor $v \in E$ mit $p + v = q$ der *Verbindungsvektor* von p nach q und wird mit $q - p$ bezeichnet.

Auf M wird eine Metrik d durch

$$\forall p, q \in E\colon d(p, q) = \|q - p\|$$

definiert. Damit wird M zu einem vollständigen metrischen Raum, und insbesondere zu einem Hausdorffraum.

Ist E ein endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension n, so heißt M ein *n-dimensionaler* affiner Raum.

Wählen wir ein $p_0 \in E$, so ist

$$x\colon M \to E, p \mapsto p - p_0$$

ein Homöomorphismus auf E und damit eine globale Karte von M, welche M zu einer Mannigfaltigkeit vom Typ M macht. Die Menge dieser Karten bildet einen C^∞-Atlas, den *kanonischen C^∞-Atlas* eines affinen Raumes.

Das mathematische Modell des klassischen Raumes der Anschauung ist ein dreidimensionaler affiner Raum. Der speziellen Relativitätstheorie liegt ein vierdimensionaler affiner Raum zugrunde.

14.7 C^r-Untermannigfaltigkeiten

Im folgenden seien F ein Banachraum, M ein topologischer Teilraum von F sowie $r \in \mathbf{N}_1 \cup \{\infty\}$.

Da F ein Hausdorffraum ist, ist auch M ein Hausdorffraum.

Proposition 1. Es sei M in der Nähe eines Punktes $a \in M$ eine *C^r-planierbare* Menge vom Typ E, d. h. es existiere eine Umgebung $\tilde{U} \in \mathfrak{U}^o(a, F)$ und ein C^r-Diffeomorphismus $f\colon \tilde{U} \to E \times E'$ in das Produkt zweier Banachräume E und E', so daß

$$f(M \cap \tilde{U}) = (E \times \{0\}) \cap f(\tilde{U}).$$

Bezeichnet in dieser Situation $\mathrm{pr}_1\colon E \times E' \to E$ die kanonische Projektion, so ist

$$U := M \cap \tilde{U}$$

eine offene Umgebung von a in M und

$$x := \mathrm{pr}_1 \circ f|U\colon U \to E$$

ist ein Homöomorphismus in E, d. h. (U, x) ist eine Karte des topologischen Raumes M vom Typ E.

Proposition 2. Sei M *lokal C^r-planierbar* vom Typ E, d. h., M sei in der Nähe eines jeden Punktes a von M planierbar vom Typ E. Die Menge der gemäß Proposition 1 erhaltenen Karten (U, x) bildet einen C^r-Atlas von M vom Typ E.

Wir sagen auch, daß M eine *C^r-Untermannigfaltigkeit* von F vom Typ E ist. Ist $\dim E = n < \infty$, so heißt M auch *n-dimensionale Untermannigfaltigkeit* von F.

Beispiel. Es seien E und F Banachräume, G eine offene Teilmenge von E und $\varphi\colon G \to F$ eine C^r-Abbildung. Dann ist deren Graph

$$M := \{(p, \varphi(p)) \mid p \in G\}$$

eine C^r-Untermannigfaltigkeit von $E \times F$ vom Typ E.

Proposition 3 (Der Tangentialraum einer C^r-Untermannigfaltigkeit)**.** Ist M eine C^r-Untermannigfaltigkeit von F, so ist für jedes $a \in M$ die Menge

$$T_a M := \{\alpha'(0)\},$$

wobei $\alpha\colon U_\varepsilon(0) \to F$ die Menge aller C^1-Kurven mit $\alpha(U_\varepsilon(0)) \subseteq M$ und $\alpha(0) = a$ durchläuft, ein abgeschlossener Untervektorraum von F (also ebenfalls ein Banachraum), der sogenannte *Tangentialraum* von M im Punkte a.

Ist M eine Untermannigfaltigkeit vom Typ E, so induziert jede Karte (U, x) einen stetigen Vektorraumisomorphismus

$$d_a x\colon T_a M \to E, \alpha'(0) \mapsto (x \circ \alpha)'(0),$$

welcher nach dem Satz vom inversen Operator sogar ein Homöomorphismus ist. Im Falle, daß M endlich-dimensional ist, gilt insbesondere

$$\dim T_a M = \dim M.$$

Proposition 4. Seien E und F Banachräume, G eine offene Teilmenge von F und $g\colon G \to E$ eine C^r-Funktion. Sei weiter $a \in G$, so daß $d_a g\colon F \to E$ surjektiv ist und $\ker d_a g \subseteq F$ ein abgeschlossenes Komplement besitzt. Dann existiert eine Umgebung $\tilde{U} \in \mathfrak{U}^o(a, G)$, so daß für alle $p \in \tilde{U}$ die lineare Abbildung $d_p g\colon F \to E$ surjektiv ist und $\ker d_p g \subseteq F$ ein abgeschlossenes Komplement besitzt und ein stetiger Vektorraum-Isomorphismus $\ker d_p g \to \ker d_a g$ existiert.

Beweis. Sei F' ein abgeschlossenes Komplement von $\ker d_a g$ in F. Dann ist $\Phi \coloneqq d_a g|F'\colon F \to E$ ein stetiger Vektorraum-Isomorphismus. Nach dem Satz vom inversen Operator ist auch die Umkehrabbildung $\check{\Phi}\colon E \to F'$ eine stetige lineare Abbildung. Daher ist

$$\Gamma\colon G \to \mathrm{L}(F'; F'), p \mapsto \check{\Phi} \circ d_p g|F'$$

eine wohldefinierte stetige Abbildung mit $\Gamma(a) = 1_{F'} \in \mathrm{GL}(F')$. Da $\mathrm{GL}(F')$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{L}(F'; F')$ ist, existiert eine Umgebung $\tilde{U} \in \mathfrak{U}^o(a, G)$ mit $\Gamma(\tilde{U}) \subseteq \mathrm{GL}(F')$. Daraus folgt unmittelbar für jedes $p \in \tilde{U}$, daß $d_p g|F'\colon F' \to E$ ein stetiger Vektorraum-Isomorphismus ist; insbesondere ist also $d_p g$ surjektiv.

Wir zeigen jetzt, daß

$$\Psi_p\colon \ker d_p g \times F' \to F, (u, v) \mapsto u + v$$

ein Vektorraumisomorphismus ist, daß also F' abgeschlossenes Komplement von $\ker d_p g$ ist. Zur Injektivität: Ist $(u, v) \in \ker d_p g \times F'$ mit $u + v = 0$, so ist auch $d_p g(v) = d_p g(u + v) = 0$. Da $d_p g|F'$ injektiv ist, folgt $v = 0$, also auch $u = 0$. Zur Surjektivität: Ist $w \in F$ vorgegeben, so existiert aufgrund der Surjektivität von $d_p g|F'$ ein $v \in F'$ mit $d_p g(v) = d_p g(w)$. Trivialerweise ist dann $u \coloneqq w - v \in \ker d_p g$ und $u + v = w$.

Der gesuchte stetige Vektorraum-Isomorphismus $\ker d_p g \to \ker d_a g$ ist dann durch die Komposition $p \circ \Psi_a^{-1} \circ \Psi_p \circ j$ gegeben, wobei $j\colon \ker d_p g \to \ker d_p g \times F', u \mapsto (u, 0)$ und $p\colon \ker d_a g \times F' \to \ker d_a g, (u, v) \mapsto u$. $\square$

Theorem (Gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten)**.** Seien E und F Banachräume, G eine offene Teilmenge von F und $g\colon G \to E$ eine C^r-Funktion, $r \in \mathbf{N}_1 \cup \{\infty\}$. Die Nullstellenmenge von g bezeichnen wir mit

$$N \coloneqq \{p \in G \mid g(p) = 0\}.$$

Sei $a \in N$. Ist dann $d_a g\colon F \to E$ surjektiv und besitzt $\ker d_a g \subseteq F$ ein abgeschlossenes Komplement, so ist N in der Nähe von a eine C^r-planierbare Teilmenge vom Typ $\ker d_a g$.

Weiter ist die Menge M der Punkte $p \in N$, für die das Differential $d_p g\colon F \to E$ surjektiv ist, der Kern $\ker d_p g \subseteq F$ ein abgeschlossenes Komplement besitzt und für die ein stetiger Vektorraumisomorphismus $\ker d_p g \to \ker d_a g$ (dessen Umkehrung nach dem Satz vom inversen Operator dann automatisch auch stetig ist) existiert, einerseits eine offene Teilmenge von N und andererseits eine C^r-Untermannigfaltigkeit von F vom Typ $\ker d_a g$. Für jedes $p \in M$ ist dann

$$T_p M = \ker d_p g.$$

Ist $\dim F = n < \infty$ und $m = \dim E$ und ist die Menge

$$M = \{p \in N \mid d_p g\colon F \to E \text{ surjektiv}\}$$

nicht leer, so ist $m \leq n$ und M eine $(n - m)$-dimensionale Mannigfaltigkeit von F.

Kommentar 1. Im Falle, daß F ein Hilbertraum ist, können wir ohne Einschränkung die Existenz abgeschlossener Komplemente annehmen.

Kommentar 2. Ist $E = \mathbf{R}^m$ und $g = (g_1, \dots, g_m)$, so bedeutet die Surjektivität von $d_p g \colon F \to \mathbf{R}^m$ gerade die *infinitesimale Unabhängigkeit* der „Bestimmungsgleichungen" $g_1 = \dots = g_m = 0$. Dadurch wird erreicht, daß jede der Gleichungen $g_i(p) = 0$ den Freiheitsgrad für p um eins drückt, so daß M die Kodimension m bekommt.

14.8 Tests für Injektivität, Surjektivität und Bijektivität des Differentials

Lemma 1. Seien E und F reelle Banachräume, G eine offene Teilmenge von E und $f \colon G \to F$ eine in $a \in G$ differenzierbare Funktion.

(a) Ist $E = \mathbf{R}^n$, so ist $d_a f$ genau dann injektiv, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, …, $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ linear unabhängig sind.

(b) Ist $F = \mathbf{R}^m$ und ist $f = (f_1, \dots, f_m)$, so ist $d_a f$ genau dann surjektiv, wenn $d_a f_1$, …, $d_a f_m \in \mathrm{L}(E; \mathbf{R})$ linear unabhängig sind. Im Falle, daß E ein Hilbertraum ist, ist dies genau dann der Fall, wenn $\operatorname{grad}_a f_1$, …, $\operatorname{grad}_a f_m$ linear unabhängig sind.

(c) Sind E und F endlich-dimensionale Vektorräume *derselben* Dimension, so ist $d_a f$ surjektiv genau dann, wenn $d_a f$ injektiv ist.

Lemma 2 (Die Gramsche Determinante)**.** Seien F ein reeller Hilbertraum, $(a_1, \dots, a_n)$ ein Orthonormalsystem und v_1, …, $v_n \in \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}$. Für die *Gramsche Determinante* $\det\bigl(\langle v_i, v_k\rangle\bigr)$ dieser Vektoren gilt dann:

(a) Es ist $\det\bigl(\langle v_i, v_k\rangle\bigr) = \bigl(\det\bigl(\langle v_i, a_k\rangle\bigr)\bigr)^2 \geq 0$.

(b) Es sind v_1, …, v_n genau dann linear unabhängig, wenn $\det\bigl(\langle v_i, v_k\rangle\bigr) \neq 0$.

Aufgabe. Sei H ein Hilbertraum mit $\dim H \geq m$. Dann ist die Menge $F(m)$ der linear unabhängigen m-Tupel von Vektoren $(v_1, \dots, v_m) \in H^m$ eine offene Teilmenge von H^m. (Lineare Unabhängigkeit ist also gegenüber kleinen Störungen stabil.)

Weiterhin ist $F(m)$ in H^m dicht. Beide Einsichten zusammenfassend sagen wir auch, lineare Unabhängigkeit sei eine *generische* Eigenschaft; d. h. richtig verstanden: Lineare Abhängigkeit ist eine Ausnahmeerscheinung.

14.9 Extremwerte unter Nebenbedingungen

In diesem Abschnitt seien E und F (reelle) Banachräume, G eine offene Teilmenge von E, $f \colon G \to \mathbf{R}$ eine Funktion und $g \colon G \to F$ eine C^1-Funktion. Weiter seien

$$M := \{p \in G \mid g(p) = 0\}$$

und $a \in M$.

Definition. Wir sagen, daß f in $a \in M$ ein (strenges) lokales *Maximum* (bzw. *Minimum*) unter der Nebenbedingung $g(p) = 0$ besitzt, wenn $f|M$ auf dem topologischen Teilraum M von E in a ein (strenges) lokales Maximum (bzw. Minimum) besitzt.

Wir wollen notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremums von f in a unter der Nebenbedingung $g(p) = 0$ herleiten. Um auf die entwickelte Theorie zurückgreifen zu können, ist es erforderlich an g eine zusätzliche Bedingung zu stellen:

Theorem. Es sei

$$d_a g \colon E \to F$$

surjektiv und

$$T_a M := \ker d_a g$$

besitze ein abgeschlossenes Komplement in E.

(a) Ist f in a differenzierbar und besitzt f in $a \in M$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(p) = 0$, so gilt

$$d_a f | T_a M \equiv 0; \tag{1}$$

diese *notwendige Bedingung* ist äquivalent zu

$$\exists \lambda \in \mathrm{L}(F; \mathbf{R}) \colon d_a f = \lambda \circ d_a g. \tag{2}$$

Ist $F = \mathbf{R}^m$ und $g = (g_1, \dots, g_m)$, so ist dies wiederum gleichbedeutend mit

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R} \colon d_a f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot d_a g_i;$$

im Falle, daß E ein Hilbertraum ist, ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R} \colon \operatorname{grad}_a f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \operatorname{grad}_a g_i.$$

Die λ_i heißen *Lagrangesche Multiplikatoren.*

Ist die notwendige Bedingung in a erfüllt, so sagen wir, daß a ein *kritischer Punkt* von f unter der Nebenbedingung $g(p) = 0$ ist.

(b) Seien f und g in a zweimal differenzierbar, und es gelte $d_a f = \lambda \circ d_a g$ für ein $\lambda \in \mathrm{L}(F; \mathbf{R})$. Setzen wir

$$h := f - \lambda \circ g,$$

so gilt:

(i) Besitzt f in a ein lokales Maximum (bzw. Minimum) unter der Nebenbedingung $g(p) = 0$, so ist die Hessesche Form $D_a^2 h$ auf dem Tangentialraum $T_a M$ negativ (bzw. positiv) semidefinit; vgl. Abschnitt 13.17.

(ii) Existiert ein $m \in \mathbf{R}_+$, so daß

$$\forall v \in T_aM\colon D_a^2h(v,v) \geq m \cdot \|v\|^2 \quad (\text{bzw. } D_a^2h(v,v) \leq -m \cdot \|v\|^2), \tag{3}$$

so hat f in a ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum) unter der Nebenbedingung $g(p) = 0$. Ist T_aM endlich-dimensional, so ist (3) äquivalent zu der positiven (bzw. negative) Definitheit von D_a^2h auf T_aM (vgl. Abschnitt 13.17).

Kommentar 1. Nach dem Satz über gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten existiert eine Umgebung $\tilde{U} \in \mathfrak{U}^o(a,G)$, so daß $U := M \cap \tilde{U}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit von E ist. Dann ist

$$T_aM = T_aU,$$

also der Tangentialraum an a.

Kommentar 2. Ist E ein Hilbertraum, so besagt die Bedingung (1), daß $\operatorname{grad}_a f$ senkrecht zur Untermannigfaltigkeit U, also zu M steht.

Kommentar 3. Ist $d_af \neq 0$, so ist die Niveaufläche $N := \{p \in G \mid f(p) = 0\}$ in der Nähe von a eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 von E. Die Bedingung (1) ist äquivalent zu

$$T_aM \subseteq T_aN,$$

d. h. die Teilmengen M und N tangieren sich in a.

Bevor wir das Theorem beweisen können, benötigen wir noch ein Lemma:

Lemma. Es seien E, F, F_1 und F_2 Banachräume, $B\colon F_1 \times F_2 \to F$ eine stetige bilineare Abbildung, $G \subseteq E$ offen, $a \in G$, $f\colon G \to F_1$ eine in a differenzierbare Funktion mit $f(a) = 0$ und $g\colon G \to F_2$ eine in a stetige Funktion. Dann ist auch die Funktion $h := B(f,g)\colon E \to F$ in a differenzierbar mit

$$\forall v \in E\colon D_ah(v) = B(D_af(v), g(a)).$$

Beweis des Lemmas. Nach Definition der Differenzierbarkeit für f existiert aufgrund von $f(a) = 0$ eine Funktion $R\colon G \to F_1$ mit

$$\forall p \in G\colon f(p) = D_af(p-a) + R(p)$$

mit $\lim\limits_{p\to a} \frac{R(p)}{\|p-a\|} = 0$. Setzen wir dies in die Definitionsgleichung von h ein, so erhalten wir

$$\forall p \in G\colon h(p) = h(a) + A(p-a) + \tilde{R}(p),$$

wobei $h(a) = 0$, mit der stetigen linearen Abbildung

$$A\colon E \to F, v \mapsto B(D_af(v), g(a))$$

und dem Restglied

$$\tilde{R}\colon G \to F, p \mapsto B(D_af(p-a), g(p) - g(a)) + B(R(p), g(p)).$$

Es bleibt zu zeigen, daß dieses Restglied in a stärker als von erster Ordnung verschwindet. Das weisen wir nach, indem wir die beiden Summanden einzeln abschätzen. Zum ersten Summanden:

$$\frac{\|B(D_a f(p-a), g(p)-g(a))\|}{\|p-a\|} \leq \|B\| \cdot \|D_a f\| \cdot \|g(p)-g(a)\|\,;$$

wegen der Stetigkeit von g in a geht dieser Ausdruck für $p \to a$ gegen 0. Zum zweiten Summanden:

$$\frac{\|B(R(p), g(p))\|}{\|p-a\|} \leq \|B\| \cdot \frac{\|R(p)\|}{\|p-a\|} \cdot \|g(p)\|\,;$$

dieser Ausdruck geht für $p \to a$ ebenfalls gegen 0, weil dies für $\frac{\|R(p)\|}{\|p-a\|}$ gilt und $g(p)$ in der Nähe von a wegen der Stetigkeit von g beschränkt bleibt. □

Beweis des Theorems. Sei E' ein abgeschlossenes Komplement zu T_aM in E.

Zu (a). Wir setzen also voraus, daß f in a ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(p) = 0$ hat. Ist dann $\alpha\colon U_\varepsilon(0) \to M$ eine C^1-Kurve mit $\alpha(0) = a$ und setzen wir $v := \alpha'(0)$, so hat auch die Funktion $f \circ \alpha$ in 0 ein lokales Extremum; und daher ist $d_a f(v) = (f \circ \alpha)'(0) = 0$. Somit gilt (1).

Die Abbildung $\Phi := d_a g|E'\colon E' \to F$ ist nach Wahl von E' wegen der Surjektivität von $d_a g$ ein (stetiger) Isomorphismus. Sei $\check{\Phi}\colon F \to E'$ ihre Umkehrung, welche nach dem Satz vom inversen Operator wieder stetig ist. Damit ist

$$\lambda := d_a f \circ \check{\Phi}\colon F \to \mathbf{R}$$

eine stetige Linearform. Es gilt also

$$d_a f|E' = \lambda \circ d_a g|E',$$

und $\lambda \in \mathrm{L}(F; \mathbf{R})$ ist dadurch eindeutig definiert. Wegen $E = T_aM \oplus E'$ ist daher (2) äquivalent zu

$$d_a f|T_aM = \lambda \circ d_a g|\ker d_a g \equiv 0,$$

also zu (1). Im Falle von $F = \mathbf{R}^m$ sei lediglich beachtet, daß $\lambda \circ d_a g = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot d_a g_i$ mit $\lambda_i := \lambda(e_i)$, wobei $(e_1, \ldots, e_m)$ die kanonische Basis des $\mathbf{R}^m$ bezeichne.

Zu (b). Die Voraussetzungen seien so, wie sie am Anfang von (b) formuliert sind. Da $g|M \equiv 0$, gilt

$$h|M \equiv f|M. \tag{4}$$

Im Gegensatz zu f erfüllt h wegen (2) sogar

$$d_a h \equiv 0.$$

Weiter wählen wir $\tilde{U} \in \mathfrak{U}^o(a, G)$, so daß es einen C^1-Diffeomorphismus $F\colon \tilde{U} \to T_aM \times E_2$ gibt, durch welchen M in der Nähe von a planiert wird. Wir setzen $U := M \cap \tilde{U}$. Dann ist

$$x := \mathrm{pr}_1 \circ F|U \to T_aM$$

ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge $\tilde{G} := x(U)$ von T_aM. Offenbar ist $\tilde{G}$ eine Umgebung von $b := x(a)$ in T_aM. Mit der Abbildung

$$j\colon \tilde{G} \to \tilde{G} \times E_2, p \mapsto (p, 0)$$

können wir die Umkehrung der Karte x durch die C^1-Abbildung

$$\check{x} := \check{F} \circ j\colon \tilde{G} \to E$$

beschreiben. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $D_a\check{x}\colon T_aM \to E$ die Identität auf T_aM ist.

Wir definieren dann die C^1-Funktion

$$\tilde{h} := h \circ \check{x}\colon \tilde{G} \to \mathbf{R}.$$

Wegen (4) und der Tatsache, daß x ein Homöomorphismus ist, gilt, daß f genau dann in a ein lokales (strenges) Maximum (bzw. Minimum) unter der Nebenbedingung $g(p) = 0$ besitzt, wenn die Funktion $\tilde{h}$ in b ein lokales (strenges) Maximum (bzw. Minimum) (ohne jede Nebenbedingung) besitzt.

Um die Ergebnisse aus Abschnitt 13.17 anwenden zu können, müssen wir die Hessesche Form von $\tilde{h}$ an der Stelle b berechnen. Dazu führen wir die stetige multilineare Abbildung

$$B\colon \mathrm{L}(E; \mathbf{R}) \times \mathrm{L}(T_aM; E) \to \mathrm{L}(T_aM; \mathbf{R}), (\omega, A) \mapsto \omega \circ A$$

ein. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$d\tilde{h} = B(dh \circ \check{x}, D\check{x}).$$

Da die Funktionen f und g in a nach Voraussetzung in a zweimal differenzierbar sind, ist h in a ebenfalls zweimal differenzierbar. Damit ist $dh \circ \check{x}$ in a differenzierbar mit $(dh \circ \check{x})(b) = 0$. Weiter ist $D\check{x}$ in b stetig. Wir können also das Lemma anwenden und erhalten, daß $d\tilde{h}$ in b noch einmal differenzierbar ist; und zwar gilt

$$D_b(d\tilde{h})(v) = B(D_a(dh)(D_b\check{x}(v)), D_b\check{x}),$$

also

$$D_b^2\tilde{h}(v, w) = D_a^2 h(D_b\check{x}(v), D_b\check{x}(w)).$$

(Es sei betont, daß dieser einfache Zusammenhang zwischen den beiden Differentialen zweiter Ordnung wirklich nur stimmt, weil $d_a h = 0$ ist. Dieses ist der Grund, warum wir von der Funktion f scheinbar künstlich zu der Funktion h übergehen mußten.)

Da $D_b\check{x}\colon T_aM \to E$ die Identität auf T_aM ist, ergibt sich dann die Aussagen durch die entsprechenden Aussagen aus dem Theorem aus 13.17. □

Aufgabe 1. Man bestimme den maximalen und den minimalen Wert der Funktion

$$f := 3x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy$$

auf der Menge $\{p \in \mathbf{R}^3 \mid x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2 \leq 4\}$.

Aufgabe 2. Sei E ein euklidischer Vektorraum mit $\dim E \geq 1$. Weiter sei $A\colon E \to E$ ein selbstadjungierter Operator, also eine lineare Abbildung mit

$$\forall v, w \in E\colon\ \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle\,.$$

Definieren wir

$$\begin{aligned} f\colon E \to \mathbf{R}, v &\mapsto \langle Av, v\rangle\,,\\ g\colon E \to \mathbf{R}, v &\mapsto \langle v, v\rangle - 1,\\ \mathbf{S}(E) &:= \{v \in E \mid \langle v, v\rangle = 1\}, \end{aligned}$$

so gilt

(a) Für alle $a \in \mathbf{S}(E)$ ist $\operatorname{grad}_a g \neq 0$.

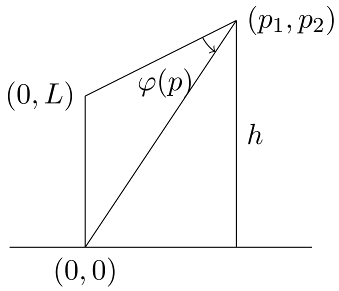
(b) Es ist a genau dann ein kritischer Punkt von f unter Nebenbedingung $g(p) = 0$, wenn a ein normierter Eigenvektor von A ist.

(c) Es ist $\max f(\mathbf{S}(E))$ der größte und $\min f(\mathbf{S}(E))$ der kleinste Eigenwert von A.

Insbesondere haben wir gezeigt, daß jeder selbstadjungierte Endomorphismus auf E reelle Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 3 (Über Egons schöne Beine)**.** Es war an einem wunderschönen Sommernachmittag, von dem wir zur Zeit nur träumen können, als der italienische Mathematiker Joseph-Louis Lagrange sich auf den Weg zur Universität machte. Schon vor einiger Zeit war ihm zu Ohren gekommen, daß der schöne Egon wegen seiner langen Beine bei seinen Kommilitoninnen so beliebt war. Heute wollte er sich selbst davon überzeugen und stellte sich, am Hörsaal angekommen, in die Nähe von Egon, um seine Beine genauer zu betrachten. Dabei stellte er fest, daß es ungünstig war, zu weit von Egon entfernt zu sein, aber auch in der Nähe von Egon war es nicht so gut möglich, seine Beine genau zu erkennen.

Das brachte ihn auf die Idee, diejenige Entfernung zu ermitteln, bei der er Egons Beine möglichst groß sieht (d. h. bei der der Winkel, unter dem Egons Beine ihm erscheinen, am größten ist). Nach einem kurzen Blick in sein Analysis-Skript und sein Geometrie-Schulbuch hatte er eine einfache geometrische Lösung.



(Tip: In der Skizze bezeichnet $\varphi(p)$ für $p \in \mathbf{R}^2$ den Winkel, unter dem Egons Beine von p aus gesehen werden, L die Länge von Egons Beinen und h die Augenhöhe von Lagrange. Man skizziere $\{p \in \mathbf{R}^2 \mid \varphi(p) = c\}$ mit $c \in]0, \pi[$ und $\{p \in \mathbf{R}^2 \mid y(p) - h = 0\}$.)

Kapitel 15

Maß- und Integrationstheorie

In Kapitel 8 haben wir ein elementares Integral für Banachraum-wertige Regelfunktionen $f\colon [a,b] \to E$ eingeführt, und zwar — motiviert durch die Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks — auf der Grundlage des Integrals von Treppenfunktionen. Dabei spielte die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen eine zentrale Rolle. Diese fand ihren Niederschlag in dem elementaren Vererbungssatz der Integralrechnung:

> Ist (f_n) eine Folge von Regelfunktionen $f_n\colon [a,b] \to E$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to E$ konvergiert, so ist auch f eine Regelfunktion und
> $$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx.$$

Nun ist aber gleichmäßige Konvergenz eine sehr starke Bedingung, weswegen dieser Vererbungssatz nur sehr eingeschränkt Anwendung findet. Dazu geben wir ein Beispiel (in dem allerdings uneigentliche Integrale auftauchen):

Es sei $(f_n)_{n\geq 1}$ die Folge der Funktionen

$$f_n := \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-nx}\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}.$$

Die uneigentlichen Integrale $I_n := \int\limits_0^\infty f_n\,dx$ existieren, und zwar ist $I_n \in \mathbf{R}$. Nun konvergiert die Folge (f_n) gegen die Funktion $f \equiv 0$, allerdings ist die Konvergenz nicht gleichmäßig (weil z. B. $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = \infty$ für jedes $n \geq 1$ gilt). Die Frage ist nun, ob trotzdem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ gilt. Nun, wir können dies leicht nachweisen; denn durch die Substitution $t = \sqrt{nx}$ erhalten wir

$$I_n = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

Zweifellos wäre es schöner, wenn wir diese Frage aufgrund allgemein gültiger Konvergenzsätze beantworten könnten. Wollen wir dies, so dürfen wir nicht bei Regelfunktionen bleiben, sondern müssen zu einem umfassenderen Bereich von Funktionen übergehen. (Außerdem wollen wir vielleicht über mehr Funktionen integrieren können.) Die Situation ist mit dem Zahlenbereich vergleichbar. Im täglichen Leben kämen wir ganz gut mit den rationalen Zahlen aus; die guten Sätze der Analysis hingegen sind nur gültig, wenn wir im Körper $\mathbf{R}$ arbeiten; und diese Sätze sind doch bei der Behandlung mancher Alltagsprobleme recht nützlich.

Die Idee der „richtigen" Erweiterung des Funktionenbereichs beschrieb der junge Henri Lebesgue 1902 in seiner Dissertation. Ihm zu Ehren sprechen wir heute von dem *Lebesgueschen Integral*, wenn wir sein Integral meinen. Der Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen wird (wie der Raum der Regelfunktionen) ein Banachraum und der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen ein Hilbertraum. Dadurch können, wie z. B. in der Quantentheorie, funktionalanalytische Methoden eingesetzt werden. Wir haben in dieser Vorlesung die Grundlagen geschaffen, um auf diesen Räumen sogar Analysis zu betreiben.

Das Lebesguesche Integral bezog sich ursprünglich auf Funktionen $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Im Jahre 1915 sah Maurice René Fréchet, daß sich der Definitionsbereich der Funktionen relativ beliebig wählen läßt. Dieser Idee werden wir in dieser Vorlesung folgen, da dieser allgemeine Integralbegriff heute die Grundlage vieler mathematischer Theorien (z. B. auch der Wahrscheinlichkeitstheorie) ist.

15.1 Meßbare Räume

Bei der Entwicklung des Lebesgueschen Integrals haben wir es mit Vektorräumen reellwertiger Funktionen zu tun, die auf allgemeinen Mengen X definiert sind. In den Anwendungen werden für X endliche Mengen, abzählbare Mengen (der Prototyp hierfür ist $\mathbf{N}_0$) und der n-dimensionale Raum $\mathbf{R}^n$ vorkommen. Da aber die Entwicklung des Integrals nicht von der spezifischen Natur des Raumes X abhängt, machen wir auch keine einschränkenden Voraussetzungen. Insbesondere werden damit auch die maßtheoretischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt.

Wir werden die Integrationstheorie auf dem Begriff des Maßes aufbauen. Dazu wird (ähnlich wie bei der Definition einer topologischen Struktur) eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ ausgezeichnet, für welche besondere Axiome gelten. Der Hintergrund ist, daß wir in Abschnitt 15.3 Maße als Funktionen $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ auffassen; eine derartige Funktion μ gibt dann jeweils das Maß $\mu(A)$ der Mengen $A \in \mathfrak{A}$ an. Den Begriff „Maß" dürfen wir nicht zu eng auffassen; wir denken dabei an „Volumen" oder „Masse" der Menge A (die wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung wird an entsprechender Stelle angegeben). Da in vielen Fällen $\mathfrak{A}$ eine echte Teilmenge von $\mathfrak{P}(X)$ ist, können wir also im allgemeinen vermittels μ nicht alle Teilmengen von X messen.

Definition 1. Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ heißt eine *σ-Algebra* (von X) und das Paar $(X, \mathfrak{A})$ ein *meßbarer Raum*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(M1) Es ist $\emptyset \in \mathfrak{A}$.

(M2) Ist $(A_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$, so auch $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$.

(M3) Ist $A \in \mathfrak{A}$, so auch $A^c := X \setminus A \in \mathfrak{A}$.

Die Teilmengen $A \in \mathfrak{A}$ heißen die *($\mathfrak{A}$-)meßbaren* Mengen des meßbaren Raumes $(X, \mathfrak{A})$.

Kommentar 1.

(a) Das „σ" in der Bezeichnung σ-Algebra ist eine Abkürzung für abzählbar und soll darauf hinweisen, daß die *abzählbare* Vereinigung meßbarer Mengen wieder meßbar ist.

(b) Die Bezeichnung „meßbarer Raum" für $(X, \mathfrak{A})$ ist sprachlich nicht ganz korrekt. Denn es geht nicht um die Meßbarkeit des Objektes X alleine, sondern — wie oben gesagt — um die Meßbarkeit aller Mengen eines gewissen Teilsystems $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}(X)$. Ob bzw. wie diese Mengen schließlich wirklich gemessen werden, hängt davon ab, ob ein bzw. welches Maß $\mu \colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ definiert ist; vgl. Abschnitt 15.3.

(c) Der hier verwendete Begriff einer Algebra hat nichts mit dem Begriff einer Algebra, also einer speziellen algebraischen Struktur, im Sinne der Algebra zu tun.

Proposition 1. In einem meßbaren Raum $(X, \mathfrak{A})$ gilt auch:

(a) Es ist $X \in \mathfrak{A}$.

(b) Ist $(A_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$, so ist auch $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$.

(c) Sind A, $B \in \mathfrak{A}$, so sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathfrak{A}$.

Beispiele. Sei X eine Menge. Folgende Teilmengen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ sind σ-Algebren:

(a) $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(X)$, die größtmögliche σ-Algebra von X.

(b) $\mathfrak{A} = \{\emptyset, X\}$, die kleinstmögliche σ-Algebra von X.

(c) $\mathfrak{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$, wobei $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge ist.

(d) Ist $\mathfrak{A}$ das System derjenigen Teilmengen $A \subseteq X$, so daß A oder A^c höchstens abzählbar ist, so ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra.

(e) Ist $(\mathfrak{A}_i)$ eine Familie von σ-Algebren von X, so ist $\mathfrak{A} := \bigcap\limits_i \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine σ-Algebra von X.

(f) Sei $\mathfrak{S}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{P}(X)$. Dann ist

$$\underline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{S}) := \{\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X) \mid \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra von } X \text{ mit } \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{S}\}$$

eine nicht leere Menge (z. B. gilt $\mathfrak{P}(X) \in \underline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{S})$). Daher ist

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{S}) := \bigcap \underline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{S})$$

eine σ-Algebra, welche $\mathfrak{S}$ enthält; somit ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}) \in \underline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{S})$. Genauer ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ die kleinste $\mathfrak{S}$ enthaltende σ-Algebra von X; wir nennen sie daher die von $\mathfrak{S}$ *erzeugte* σ-Algebra.

(g) Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra von X und $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge, so ist

$$\mathfrak{A}_Y := \{A \cap Y \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

eine σ-Algebra von Y. Der wichtigste Fall ist $Y \in \mathfrak{A}$; dann ist

$$\mathfrak{A}_Y = \{A \in \mathfrak{A} \mid A \subseteq Y\}.$$

Dieses Beispiel wird durch Aufgabe 3(a) verallgemeinert.

Definition 2. Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum. Die durch die topologische Struktur $\mathfrak{T}$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B}(X, \mathfrak{T})$ heißt die *Borel-Algebra* des topologischen Raumes. Wir bezeichnen sie auch kurz mit $\mathfrak{B}(X)$, wenn die topologische Struktur von X nicht eigens benannt ist. Die Teilmengen $A \in \mathfrak{B}(X, \mathfrak{T})$ heißen die *Borel-Mengen* oder die *Borel-meßbaren* Mengen des topologischen Raumes $(X, \mathfrak{T})$.

Kommentar 2. Es sei beachtet, daß zu der Borel-Algebra z. B. auch alle abgeschlossenen Mengen gehören. Ist der Raum X hausdorffsch, so sind daher die einpunktigen Mengen $\{p\}$ von X und somit alle höchstens abzählbaren Teilmengen $A \in \mathfrak{P}(X)$ Borel-Mengen. Insbesondere ist $\mathfrak{B}(\mathbf{Q}) = \mathfrak{P}(\mathbf{Q})$.

Proposition 2. Die Borel-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$ wird von der Menge der *Quader* $Q = \prod_{k=1}^{n} I_k$ (d. h. jedes $I_k \subseteq \mathbf{R}$ ist ein Intervall) erzeugt, ja sogar von der Menge der offenen Quader $\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$ $(-\infty < a_i < b_i < \infty)$ erzeugt.

Proposition 3. Die Borel-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ wird von jedem der folgenden Mengensysteme erzeugt:

(a) $\{]a, b[\mid -\infty < a < b < \infty\}$,

(b) $\{]-\infty, a[\mid a \in \mathbf{R}\}$,

(c) $\{]a, \infty[\mid a \in \mathbf{R}\}$,

(d) $\{]-\infty, a] \mid a \in \mathbf{R}\}$,

(e) $\{[a, \infty[\mid a \in \mathbf{R}\}$.

Proposition 4. Es ist $\mathfrak{B}(\widehat{\mathbf{R}}) = \{A \in \mathfrak{P}(\widehat{\mathbf{R}}) \mid A \cap \mathbf{R} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})\}$. Insbesondere wird daher $\mathfrak{B}(\widehat{\mathbf{R}})$ vom Mengensystem $\mathfrak{B}(\mathbf{R}) \cup \{\{-\infty\}, \{\infty\}\}$ erzeugt.

Aufgabe 1. Man beweise, daß für alle a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$ gilt:

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\quad \text{und} \quad]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}].$$

Folglich enthält jede σ-Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbf{R})$, welche alle offenen (bzw. alle abgeschlossenen) Intervalle enthält, auch alle abgeschlossenen (bzw. alle offenen) Intervalle.

Aufgabe 2. Es sei $(A_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Teilmengen einer Menge X.

(a) Setzen wir $E_n := \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$ und $F_n := A_n \setminus E_n$ für $n \geq 0$, so ist (E_n) eine monoton wachsende Folge von Teilmengen (d. h. $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle $n \geq 0$) und (F_n) eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen (d. h. $F_n \cap F_m = \emptyset$ für $n \neq m$) mit

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

(b) Es gelten

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \{p \in X \mid |\{n \in \mathbf{N}_0 \mid p \in A_n\}| = \infty\}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n = \{p \in X \mid |\{n \in \mathbf{N}_0 \mid p \notin A_n\}| < \infty\}.$$

Es gilt weiter

$$\emptyset \subseteq \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq X.$$

Man zeige außerdem: Sind die A_n Elemente einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$, so gilt auch

$$\liminf_{n\to\infty} A_n, \limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

Wie die Bezeichnungen schon andeuten, werden diese Mengen der *Limes inferior* bzw. der *Limes superior* der Folge (A_n) genannt.

(c) Ist (A_n) eine monoton wachsende Folge (vgl. (a)), so gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n;$$

ist (A_n) eine monoton fallende Folge (d. h. $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \geq 0$), so gilt

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Im Falle $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$ nennen wir diese Menge den *Limes* der Folge (A_n), $\lim_{n\to\infty} A_n$.

Man zeige durch Angabe eines Beispieles einer Folge (A_n), daß $\lim_{n\to\infty} A_n$ existieren kann, obwohl die Folge (A_n) weder monoton wächst noch fällt.

Aufgabe 3. Sei eine Abbildung $f\colon X \to Y$ gegeben. Man zeige:

(a) Ist $\mathfrak{B}$ eine σ-Algebra auf Y, so ist $\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ eine σ-Algebra auf X.

(b) Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X, so ist $\{B \in \mathfrak{P}(Y) \mid f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\}$ eine σ-Algebra auf Y.

(c) Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\mathfrak{S}$ ein System von Teilmengen $B \subseteq Y$, so daß $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ für jedes $B \in \mathfrak{S}$ gilt. Dann gilt auch $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ für jedes $B \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$.

(Tip: Beachte (b) und Beispiel (f).)

15.2 Meßbare Abbildungen

Im folgenden seien $(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{B})$ zwei meßbare Räume.

Definition 1. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt eine *meßbare Abbildung von* $(X, \mathfrak{A})$ *nach* $(Y, \mathfrak{B})$ oder einfach *meßbar*, wenn

$$\forall B \in \mathfrak{B}\colon f^{-1}(B) \in \mathfrak{A};$$

wir sprechen in diesem Falle auch von der meßbaren Abbildung $f\colon (X, \mathfrak{A}) \to (Y, \mathfrak{B})$.

Ist Y ein topologischer Raum und keine σ-Algebra auf Y besonders angegeben, so bezieht sich der Begriff der meßbaren Abbildungen nach Y auf die Borel-Algebra $\mathfrak{B}(Y)$.

Insbesondere wissen jetzt, was wir unter den Mengen

$$\mathcal{M}(X, \mathfrak{A}) := \{f\colon X \to \mathbf{R} \mid f \text{ ist meßbar auf } (X, \mathfrak{A})\},$$
$$\mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A}) := \{f\colon X \to \mathbf{C} \mid f \text{ ist meßbar auf } (X, \mathfrak{A})\}$$

und

$$\widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A}) := \{f\colon X \to \widehat{\mathbf{R}} \mid f \text{ ist meßbar auf } (X, \mathfrak{A})\}$$

zu verstehen haben.

Ist X ein topologischer Raum, so sprechen wir von *Borel-Meßbarkeit* anstatt von $\mathfrak{B}(X)$-Meßbarkeit.

Es sei die starke formale Verwandtschaft zum Begriff der stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen (vgl. das Theorem aus Abschnitt 12.4) beachtet. So wie die stetigen Abbildungen die „strukturverträglichen“ Abbildungen zwischen topologischen Räumen sind, so sind die meßbaren Abbildungen die „strukturverträglichen“ Abbildungen zwischen meßbaren Räumen.

Beispiel 1.

(a) Jede konstante Funktion auf X ist meßbar.

(b) Sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist die *charakteristische Funktion*

$$1_A\colon X \to \mathbf{R}, p \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } p \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

von A genau dann eine meßbare Funktion auf $(X, \mathfrak{A})$, wenn $A \in \mathfrak{A}$.

(c) Die Komposition meßbarer Funktionen ist wieder meßbar. Ist $F\colon (X,\mathfrak{A}) \to (Y,\mathfrak{B})$ eine meßbare Abbildung, so gilt daher

$$\forall f \in \mathcal{M}(Y,\mathfrak{B})\colon f \circ F \in \mathcal{M}(X,\mathfrak{A})$$
$$\forall f \in \widehat{\mathcal{M}}(Y,\mathfrak{B})\colon f \circ F \in \widehat{\mathcal{M}}(X,\mathfrak{A})$$

und

$$\forall f \in \mathcal{M}_{\mathbf{C}}(Y,\mathfrak{B})\colon f \circ F \in \mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X,\mathfrak{A}).$$

(d) Sei $Y \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

(i) $\forall f \in \widehat{\mathcal{M}}(X,\mathfrak{A})\colon f|Y \in \widehat{\mathcal{M}}(Y,\mathfrak{A}|_Y)$.

(ii) Ist $f\colon Y \to \widehat{\mathbf{R}}$ eine beliebige Funktion und

$$\hat{f}\colon p \mapsto \begin{cases} f(p) & \text{für } p \in Y, \\ 0 & \text{für } p \in X \setminus Y \end{cases}$$

ihre Fortsetzung durch Null, so gilt

$$f \in \widehat{\mathcal{M}}(Y,\mathfrak{A}_Y) \iff \hat{f} \in \widehat{\mathcal{M}}(X,\mathfrak{A});$$

vgl. dazu das Beispiel (g) aus Abschnitt 15.1.

Proposition 1. Wird die σ-Algebra $\mathfrak{B}$ von einer Teilmenge $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{B}$ erzeugt, so ist eine Abbildung $F\colon X \to Y$ bereits eine meßbare Abbildung $(X,\mathfrak{A}) \to (Y,\mathfrak{B})$, wenn

$$\forall B \in \mathfrak{S}\colon f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}.$$

Korollar 1. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$ ist bereits $\mathfrak{A}$-meßbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $\forall a,b \in \mathbf{R}\colon \big(a < b \implies f^{-1}(]a,b[) \in \mathfrak{A}\big)$,

(b) $\forall a \in \mathbf{R}\colon f^{-1}(]-\infty,a[) \in \mathfrak{A}$,

(c) $\forall a \in \mathbf{R}\colon f^{-1}(]a,\infty[) \in \mathfrak{A}$,

(d) $\forall a \in \mathbf{R}\colon f^{-1}(]-\infty,a]) \in \mathfrak{A}$,

(e) $\forall a \in \mathbf{R}\colon f^{-1}([a,\infty[) \in \mathfrak{A}$.

Beispiel 2. Jede monoton wachsende und jede monoton fallende Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist Borel-meßbar.

Proposition 2. Jede stetige Abbildung $F\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist eine meßbare Abbildung $(X,\mathfrak{B}(X)) \to (Y,\mathfrak{B}(Y))$. Insbesondere sind die Koordinatenfunktionen $x_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ Borel-meßbare Funktionen.

Korollar 2. Eine Funktion $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon X \to \mathbf{R}^n$ ist genau dann $\mathfrak{A}$-meßbar, wenn die Komponentenfunktionen f_i jeweils $\mathfrak{A}$-meßbar sind.

Korollar 3. Eine Funktion $f = u + iv\colon X \to \mathbf{C}$ ist genau dann $\mathfrak{A}$-meßbar, wenn die Funktionen u, $v\colon X \to \mathbf{R}$ beide $\mathfrak{A}$-meßbar sind. Insbesondere ist $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A})$.

Definition 2. Für jede Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Funktionen $f_i\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}$ definieren wir die Funktionen

$$\sup_{i \in I} f_i\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}, p \mapsto \sup\{f_i(p) \mid i \in I\}$$

und

$$\inf_{i \in I} f_i\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}, p \mapsto \inf\{f_i(p) \mid i \in I\}$$

Damit ist auch klar, was unter $\sup(f, g)$ und $\inf(f, g)$ für Funktionen f, $g\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}$ zu verstehen ist.

Hiermit definieren wir weiterhin die nicht-negativen Funktionen

$$f^+ := \sup(f, 0)$$

und

$$f^- := \sup(-f, 0) = -\inf(f, 0).$$

Die Funktionen f^+ und f^- heißen der *positive* bzw. *negative* Teil von f.

Es ist klar, daß folgende Identitäten gelten:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{und} \quad |f| = f^+ + f^-$$

und, im Falle, daß $f(X) \subseteq \mathbf{R}$, auch

$$f^+ = \frac{1}{2} \cdot (|f| + f) \quad \text{und} \quad f^- = \frac{1}{2} \cdot (|f| - f).$$

Proposition 3.

(a) Sind f, $g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ und ist $c \in \mathbf{R}$, so gilt auch

$$f + g, cf, fg, \sup(f, g), \inf(f, g), |f|, f^+, f^- \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}).$$

Insbesondere ist also $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ ein $\mathbf{R}$-Vektorraum, ja sogar eine Algebra mit dem Einselement 1_X.

(b) Sind f, $g \in \mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A})$ und ist $c \in \mathbf{R}$, so gilt auch

$$f + g, cf, fg \in \mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A})$$

und

$$\Re f, \Im f, |f| \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}).$$

Insbesondere ist $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A})$ eine $\mathbf{C}$-Algebra mit dem Einselement 1_X.

Korollar 4. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$ ist genau dann $\mathfrak{A}$-meßbar, wenn die Funktionen f^+ und f^- beide $\mathfrak{A}$-meßbar sind.

Bisher haben wir uns vor allem mit Funktionen beschäftigt, die ihre Werte in $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ annehmen. Im folgenden werden wir es aber häufig mit Suprema, Infima und Limiten von Folgen reellwertiger meßbarer Funktionen zu tun haben. Dabei entstehen in natürlicher Weise auch Funktionen, welche die Werte $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Aus diesem Grund haben wir oben schon den Funktionenraum $\widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A})$ eingeführt. Mit diesem beschäftigen wir uns jetzt.

Ein Problem dabei ist, daß die algebraischen Operationen mit den „Zahlen" $-\infty$ und ∞ nur bedingt möglich sind; vgl. Abschnitt 1.10. Es stellt sich als geschickt heraus, für dieses Kapitel folgende Konvention einzuführen:

Festsetzung.

$$0 \cdot \infty := \infty \cdot 0 := 0 \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot 0 := 0,$$
$$\infty - \infty := (-\infty) - (-\infty) := \infty + (-\infty) := (-\infty) + \infty := 0.$$

Zum Beispiel gilt mit dieser Konvention $f^+ = \frac{1}{2} \cdot (|f| + f)$ und $f^- = \frac{1}{2} \cdot (|f| - f)$ auch für alle $f \in \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A})$.

Proposition 4. Die Abschneide-Funktion

$$\chi_{\mathbf{R}}\colon \widehat{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} t & \text{für } t \in \mathbf{R}, \\ 0 & \text{für } t \in \{-\infty, \infty\} \end{cases}$$

ist Borel-meßbar.

Korollar 5. Eine Funktion $f\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}$ ist bereits $\mathfrak{A}$-meßbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $\forall a \in \mathbf{R}\colon f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathfrak{A}$,

(b) $\forall a \in \mathbf{R}\colon f^{-1}([a, \infty]) \in \mathfrak{A}$,

(c) $f^{-1}(\{-\infty\}), f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathfrak{A} \wedge f_{\mathbf{R}} := \chi_{\mathbf{R}} \circ f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$.

Insbesondere gilt $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A}) \subseteq \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A})$.

Proposition 5. Sind f, $g \in \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A})$ und ist $c \in \mathbf{R}$, so gilt auch

$$f + g, cf, fg, \sup(f, g), \inf(f, g), |f|, f^+, f^- \in \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A}).$$

Lemma. Für jede Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n \in \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A})$ gilt auch

$$\inf_n f_n, \sup_n f_n, \liminf_{n \to \infty} f_n, \limsup_{n \to \infty} f_n \in \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A}).$$

Theorem. Ist (f_n) eine Folge in $\widehat{\mathcal{M}}(X,\mathfrak{A})$ (bzw. $\mathcal{M}(X,\mathfrak{A})$ bzw. $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X,\mathfrak{A})$), die punktweise gegen eine Funktion $f\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}$ (bzw. $f\colon X \to \mathbf{R}$ bzw. $f\colon X \to \mathbf{C}$) konvergiert, so ist auch f in $\widehat{\mathcal{M}}(X,\mathfrak{A})$ (bzw. $\mathcal{M}(X,\mathfrak{A})$ bzw. $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X,\mathfrak{A})$).

Aufgabe 1. Für jede Folge $(A_n)_{n\geq 0}$ von Teilmengen einer Menge X gilt

$$1_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n}.$$

Aufgabe 2. Man gebe ein Beispiel einer nicht meßbaren Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ an, für die $|f|$ meßbar ist; es darf benutzt werden, daß $\mathfrak{B}(\mathbf{R}) \subsetneq \mathfrak{P}(\mathbf{R})$; vgl. Aufgabe 2 aus Abschnitt 15.7. (Man vergleiche dies mit Proposition 3.)

Aufgabe 3. Für jedes $R \in \mathbf{R}_+$ ist die Abschneide-Funktion

$$\chi_R\colon \widehat{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} R & \text{für } t \in \,]R,\infty], \\ t & \text{für } t \in [-R,R], \\ -R & \text{für } t \in [-\infty,-R[\end{cases}$$

Borel-meßbar. Daher (?) ist auch für jede Funktion $f \in \widehat{\mathcal{M}}(X,\mathfrak{A})$ die „abgeschnittene" Funktion

$$f_R\colon X \to \mathbf{R}, p \mapsto \begin{cases} R & \text{für } f(p) \in \,]R,\infty], \\ f(p) & \text{für } f(p) \in [-R,R], \\ -R & \text{für } f(p) \in [-\infty,-R[\end{cases}$$

eine $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion.

Aufgabe 4. Es seien a, $b \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$. Jede Regelfunktion $f \in \mathrm{R}([a,b],\mathbf{R})$ ist Borel-meßbar, also

$$\mathrm{R}([a,b],\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{M}([a,b],\mathfrak{B}([a,b])).$$

Man zeige auch, daß $\mathrm{R}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{R},\mathfrak{B}(\mathbf{R}))$.

15.3 Maße

Wir haben in Abschnitt 15.1 den Begriff eines meßbaren Raumes $(X,\mathfrak{A})$ kennengelernt. In diesem Abschnitt werden wir nun Maße auf solchen Räumen betrachten; das sind spezielle Funktionen $\mu\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}$. Ihre Axiome sind durch die Vorstellung von Länge, Flächeninhalt, Volumen und Massenverteilung motiviert. So ist es z. B. natürlich, daß $\mu(\emptyset) = 0$ und daß μ additiv für disjunkte Mengen sein sollte. Da etwa $\mathbf{R}$ „unendlich" lang ist, sollte μ auch den Wert ∞ annehmen dürfen.

Definition 1. Ein *Maß* auf dem meßbaren Raum $(X,\mathfrak{A})$ ist eine Funktion $\mu\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}$, die folgende Axiome erfüllt:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(M2) $\mu \geq 0$.

(M3) μ ist *σ-additiv*, d. h.: Ist (A_n) eine disjunkte Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$ (d. h. die Mengen A_n sind paarweise disjunkt), so ist

$$\mu\Big(\bigcup A_n\Big) = \sum \mu(A_n).$$

(Es sei beachtet, daß die rechte Seite genau dann den Wert ∞ annimmt, wenn entweder $\mu(A_n) = \infty$ für einige n ist oder wenn die Reihe gegen ∞ konvergiert.)

Ist μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$, so nennen wir das Tripel $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ einen *Maßraum*.

Ist $\mu(X) = 1$, so heißt μ auch ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* und $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein *Wahrscheinlichkeitsraum*; bei dieser Interpretation werden die Teilmengen von $\mathfrak{A}$ meist mit E bezeichnet und *Ereignisse* genannt; die „Zahl“ $\mu(E)$ wird dann als die Wahrscheinlichkeit gedeutet, daß ein Punkt $p \in X$ in E liegt. (So ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein p in $\emptyset$ bzw. in X liegt gerade 0 bzw. 1.)

Ist $\mu < \infty$, so heißt μ ein *endliches* Maß. Allgemeiner: Existiert eine Folge (A_n) von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$ mit $X = \bigcup A_n$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle n, so nennen wir μ ein *σ-endliches* Maß.

Beispiele.

(a) **Positiver Kegel aller Maße.** Die Menge aller Maße auf $(X, \mathfrak{A})$ bildet einen *positiven Kegel*, d. h.: Sind λ_1, $\lambda_2 \in [0, \infty]$ und μ_1, $\mu_2 \colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}$ Maße, so ist durch $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$ wieder ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$ gegeben.

(b) **Zählmaß, diskrete Masseverteilungen und Dirac-Maß.** Es seien X eine Menge, $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(X)$, $S \subseteq X$ eine höchstens abzählbare Teilmenge und $m \colon S \to [0, \infty[$ eine Funktion. Dann sind

$$\mu_\infty \colon A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } A = \emptyset, \\ \infty & \text{für } A \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\nu \colon A \to |A|$$

und

$$\mu \colon A \mapsto \sum_{a \in S \cap A} m(a)$$

drei Maße auf $(X, \mathfrak{A})$. Das Maß μ_∞ ist wenig interessant; es ist keinesfalls σ-endlich, wenn $X \neq \emptyset$. ν nennen wir das *Zählmaß* auf X; im Falle $X = \mathbf{N}_0$ ist es σ-endlich, aber nicht endlich; μ nennen wir das Maß zur *diskreten Massenverteilung* m; es ist σ-endlich.

Ist $a \in X$ ein einzelner Punkt, so wird das Maß zur diskreten Massenverteilung $m \colon \{a\} \to [0, \infty[, a \mapsto 1$ das in a konzentrierte *Dirac-Maß* δ_a genannt; für dieses gilt per definitionem

$$\delta_a \colon A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in A, \\ 0 & \text{falls } a \notin A; \end{cases}$$

offenbar ist es endlich.

Ist X eine endlich Menge mit $n := |X|$ und μ das Maß zur diskreten Massenverteilung $m\colon X \to [0,\infty[, p \mapsto 1/n$, so ist $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, der sogenannte *Laplacesche Wahrscheinlichkeitsraum* der Ordnung n. (Im Falle $n = 6$ ist er beispielsweise die Grundlage für die Wahrscheinlichkeitstheorie des Würfelspiels.)

(c) **Einschränkung und Bild eines Maßes.** Es seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $Y \in \mathfrak{A}$ eine nicht leere Teilmenge und $F\colon (X, \mathfrak{A}) \to (Z, \mathfrak{B})$ eine meßbare Abbildung in einen weiteren meßbaren Raum $(Z, \mathfrak{B})$. Dann sind auch die folgenden Funktionen Maße:

(i) $\mu_Y := \mu|\mathfrak{A}_Y$ (vgl. Beispiel (g) aus Abschnitt 15.1),

(ii) $F_*\mu\colon \mathfrak{B} \to [0,\infty], B \mapsto \mu(F^{-1}(B))$.

Wir nennen μ_Y die *Einschränkung* des Maßes μ auf der Menge Y und $F_*\mu$ das *Bildmaß* von μ unter der Abbildung F.

(d) **Das Lebesgue–Borel-Maß auf dem $\mathbf{R}^n$.** Für jedes Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ bezeichnen wir mit

$$\ell(I) := \sup(I) - \inf(I)$$

seine *Länge*; das *Volumen* eines Quaders $Q = \prod_{k=1}^{n} I_k \subseteq \mathbf{R}^n$ ist dann

$$\operatorname{vol}(Q) := \prod_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

Im Falle $n = 1$ sind Quader nichts anderes als Intervalle, und für jeden Quader $Q \subseteq \mathbf{R}$ ist $\operatorname{vol}(Q) = \ell(Q)$.

Theorem 1. Für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ existiert genau ein Maß $\lambda^n\colon \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n) \to \widehat{\mathbf{R}}$, so daß

$$\lambda^n(Q) = \operatorname{vol}(Q)$$

für alle Quader $Q \subseteq \mathbf{R}^n$. Das Maß λ^n heißt das *Lebesgue–Borel-Maß* auf dem $\mathbf{R}^n$. Im Falle $n = 1$ schreiben wir in der Regel λ anstelle von λ^1.

Dieses Theorem wird in den Abschnitten 15.7 und 15.8 bewiesen.

Eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ hat ein positives Lebeguesches Maß genau dann, wenn sie nicht leer ist. Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbf{R}^n$ gilt $\lambda^n(K) < \infty$. Insbesondere ist $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n), \lambda^n)$ σ-endlich, aber (für $n > 0$) natürlich nicht endlich.

Im folgenden sei ein Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ fixiert.

Proposition 1. Seien A, B, A_0, $A_1, \ldots \in \mathfrak{A}$ mit $A \subseteq B$. Dann gilt:

(a) $\mu(A) \leq \mu(B) \leq \mu(X)$,

(b) $\mu(B) < \infty \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$,

(c) $\mu\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n\Big) \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

Proposition 2.

(a) Ist $(A_n)_{n\ge 0}$ eine monoton wachsende Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(b) Ist $(A_n)_{n\ge 0}$ eine monoton fallende Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A_0) < \infty$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Definition 2. Eine Teilmenge $N \subseteq X$ heißt eine *μ-Nullmenge*, wenn es eine meßbare Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $A \supseteq N$ und $\mu(A) = 0$ gibt. Die Menge der μ-Nullmengen bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Das Maß μ heißt *vollständig*, falls $\mathfrak{N}(X, \mathfrak{A}, \mu) \subseteq \mathfrak{A}$.

Proposition 3. Teilmengen von μ-Nullmengen und Vereinigungen höchstens abzählbar vieler μ-Nullmengen sind wieder μ-Nullmengen.

Insbesondere ist also jede höchstens abzählbare Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ eine λ^n-Nullmenge.

Theorem 2 (Lebesguesche Nullmengen)**.** Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbf{R}^n$ ist genau dann eine Lebesguesche Nullmenge, d. h. eine λ^n-Nullmenge, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert eine Folge $(Q_k)_{k\ge 0}$ von Quadern $Q_k \subseteq \mathbf{R}^n$, so daß

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k \supseteq N \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^n(Q_k) \le \varepsilon.$$

Beweis. Daß eine Teilmenge N, welche diese Bedingung erfüllt, eine Lebesguesche Nullmenge ist, folgt mit der Aufgabe 2 aus Abschnitt 15.1 und folgender Aufgabe 2. Daß umgekehrt jede Nullmenge N diese Bedingung erfüllt, wird in den Abschnitten 15.7 und 15.8 bewiesen. □

Definition 3. Wir sagen, daß eine Aussage, die für Punkte von X formuliert ist, *μ-fast überall* gilt, wenn die Menge der Punkte, für die die Aussage gilt, das Komplement einer μ-Nullmenge ist. So sagen wir z. B., daß zwei Funktionen $f,\ g\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}$ *μ-fast überall gleich* sind, falls $\{p \in X \mid f(p) \ne g(p)\}$ eine μ-Nullmenge ist. In diesem Falle schreiben wir kurz

$$f \underset{\mu}{=} g.$$

Offenbar ist „$\underset{\mu}{=}$“ eine Äquivalenzrelation. Entsprechend sind die Ausdrücke

$$f \underset{\mu}{<} g, \quad f \underset{\mu}{\le} g, \quad f \underset{\mu}{>} g, \quad f \underset{\mu}{\ge} g$$

zu verstehen. Weiterhin sagen wir, daß eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}$ *μ-fast überall* gegen eine Funktion $f\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}$ konvergiert, falls $\{p \in X\colon f(p) = \lim_{n\to\infty} f_n(p)\}$ das Komplement einer μ-Nullmenge ist. In diesem Falle schreiben wir

$$f \underset{\mu}{=} \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Ist M eine Menge und $f\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}$ eine Funktion, so schreiben wir schließlich $f \underset{\mu}{\in} M$, falls ein $g\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}$ mit $f \underset{\mu}{=} g$ und $g \in M$ existiert.

Falls es keinen Zweifel gibt, mit welchem Maß wir gerade arbeiten, werden wir auch kurz „fast überall“ anstatt „μ-fast überall“ sagen.

Kommentar (Signierte und vektorielle Maße)**.**

(a) Gelegentlich wird eine Verallgemeinerung des Maßbegriffes benötigt, z. B. wenn elektrische Ladungsverteilungen modelliert werden sollen. Für die Funktion μ sollen auch negative Funktionswerte zugelassen werden, d. h. die Bedingung (M2) wird aufgehoben; damit es nicht zu Schwierigkeiten kommt, wird in diesem Falle verlangt, daß $\mu(\mathfrak{A}) \subseteq \mathbf{R}$, daß also μ die Werte ∞ und $-\infty$ nicht annimmt. Außerdem soll in (M3) die Reihe absolut konvergieren. Ein solches verallgemeinertes Maß heißt *(endliches) signiertes Maß*; hier ist „Signum“ mit „Vorzeichen“ zu übersetzen.

Durch das folgende Theorem können wir signierte Maße auf endliche (nicht negative) Maße zurückführen:

Theorem 3. Sei ein μ ein signiertes Maß über dem meßbaren Raum $(X, \mathfrak{A})$. Dann existieren eindeutig bestimmte Maße μ^+, $\mu^-\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty[$, so daß $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und so daß für alle weiteren Zerlegungen der Form $\mu = \mu_1 - \mu_2$ mit Maßen μ_1, $\mu_2\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty[$ gilt, daß $\mu^+ \le \mu_1$ und $\mu^- \le \mu_2$.

Eine solche Zerlegung $\mu^+ - \mu^-$ heißt HAHN–JORDAN-*Zerlegung* von μ; μ^+ heißt der *positive*, μ^- der *negative* Anteil des signierten Maßes μ.

(b) Ist E ein Banachraum, so können wir auch E-wertige Maße betrachten. Das sind Abbildungen $\mu\colon \mathfrak{A} \to E$, welche (M1) und (M3) erfüllen, wobei die Konvergenz in (M3) wieder absolut sein soll. Ein solches verallgemeinertes Maß heißt *vektorielles Maß*. Ein signiertes Maß ist offensichtlich nichts anderes als ein vektorielles Maß mit Wertebereich $E = \mathbf{R}$.

Ist $\mu\colon \mathfrak{A} \to E$ ein vektorielles Maß und $\lambda \in \mathrm{L}(E; \mathbf{R})$ eine stetige Linearform auf E, so ist $\lambda \circ \mu$ ein signiertes Maß. Auf diese Art und Weise können wir vektorielle Maße auf signierte Maße zurückführen.

Aufgabe 1 (Elementare Konstruktion von Maßen)**.** Sei $(X, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum.

(a) Seien μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$ und $A_0 \in \mathfrak{A}$. Dann ist

$$\mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}, A \mapsto \mu(A \cap A_0)$$

ebenfalls ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$.

(b) Sind $\mu_1, \ldots, \mu_n$ Maße auf $(X, \mathfrak{A})$ und sind $a_1, \ldots, a_n$ nicht negative reelle Zahlen, so ist

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mu_k$$

ebenfalls ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$.

(c) Ist $(\mu_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(X, \mathfrak{A})$, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \mu_n$$

ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(X, \mathfrak{A})$.

Aufgabe 2. Es seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_n$ eine Folge in $\mathfrak{A}$. Man zeige:

(a) $\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$,

(b) $\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n)$, falls $\mu(\bigcup_n A_n) < \infty$.

Man gebe ein Beispiel für $\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) > \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n)$ an.

Für die Definition der Teilmengen $\liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n$ vgl. man Aufgabe 2 aus Abschnitt 15.1.

Aufgabe 3 (Das Cantorsche Diskontinuum)**.** Es sei

$$K := \Big\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} \in \mathbf{R} \mid a_k \in \{0, 9\}\Big\}.$$

Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, daß K eine überabzählbare, kompakte Lebesgue-Nullmenge ist. Dazu beweise man folgende Schritte:

(a) Die Funktion

$$\varphi\colon K \to [0,1], a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} \mapsto \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 2^{-k}$$

ist wohldefiniert und surjektiv. Weiterhin gilt $|K| = |[0,1]|$.

(b) Für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ definieren wir kompakte Intervalle $I_{n,k} := [a_{n,k}, b_{n,k}] \subseteq \mathbf{R}$ für $k = 1, \ldots, 2^n$ rekursiv durch

$$I_{0,1} := [0,1]$$

und

$$I_{n+1,2k-1} := [a_{n,k}, a_{n,k} + 10^{-(n+1)}]$$

und

$$I_{n+1,2k} := [b_{n,k} - 10^{-(n+1)}, b_{n,k}].$$

Schließlich sei

$$K_n := \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}.$$

(i) Man berechne für alle $n \in \mathbf{N}_0$ das „Maß“ $L_n := \sum_{k=1}^{2^n} \lambda(I_{n,k})$ von K_n.

(ii) Man zeige $K_n = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} \mid a_1, \ldots, a_n \in \{0,9\} \wedge a_{n+1}, \ldots \in \{0,\ldots,9\}\}$.

(iii) Man zeige $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$.

Also (?) ist K eine Lebesguesche Nullmenge (und eine Borel-Menge).

Aufgabe 4. Seien $n \in \mathbf{N}_2$ und $\alpha\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg (vgl. Abschnitt 9.6). Man zeige, daß seine Spur $\alpha([a,b])$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Folglich (?) sind Peano-Wege niemals rektifizierbar.

(Tip: Man wähle einen α hinreichend gut approximierenden Streckenzug σ und skizziere die ε-Umgebung $U_\varepsilon(\sigma([a,b]))$; weiterhin benutze man die Charakterisierung Lebesguescher Nullmengen aus Theorem 2.)

Ausschöpfung offener Teilmengen des $\mathbf{R}^n$ durch spezielle kompakte Teilmengen. Für jedes $m \in \mathbf{N}_0$ und jedes $k \in \mathbf{Z}$ definieren wir die Intervalle

$$I(m,k) := [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}] \subseteq \mathbf{R}.$$

und damit für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ und $m \in \mathbf{N}_0$ die Mengen

$$\mathfrak{Q}_n(m) := \big\{I(m,k_1) \times \cdots \times I(m,k_n) \big| \forall i = 1,\ldots,n\colon \big(k_i \in \mathbf{Z} \wedge -4^m \le k_i < 4^m\big)\big\}.$$

Offensichtlich gilt dann

$$|\mathfrak{Q}_n(m)| = (2 \cdot 4^m)^n \quad \text{und} \quad \bigcup \mathfrak{Q}_n(m) = [-2^m, 2^m]^n.$$

Wir können $\mathfrak{Q}_n(m)$ das n-dimensionale *Würfelraster* vom Feinheitsgrad 2^{-m} im Würfel $[-2^m, 2^m]^n$ nennen.

Für jede offene Teilmenge $G \subseteq \mathbf{R}^n$ und jedes $m \in \mathbf{N}_0$ definieren wir

$$K_m(G) := \bigcup(\mathfrak{Q}_n(m) \cap \mathfrak{P}(G)).$$

Offenbar ist $K_m(G)$ kompakt. Weiterhin gilt

$$K_0(G) \subseteq K_1(G) \subseteq K_2(G) \subseteq \cdots \quad \text{und} \quad \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m(G) = \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m(G)^o = G.$$

Aufgabe 5 (Differenzierbare Bilder Lebesguescher Nullmengen)**.** Ziel der Aufgabe ist der Beweis folgender Aussage:

> Ist G eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ eine C^1-Abbildung und $N \subseteq G$ eine λ^n-Nullmenge, so ist auch das Bild $f(N)$ eine λ^n-Nullmenge.

Da geschickterweise bei der Bearbeitung der Aufgabe die Charakterisierung Lebesguescher Nullmengen aus Theorem 2 verwendet wird, ist es sinnvoll, im folgenden den $\mathbf{R}^n$ mit der Supremumsnorm zu versehen.

Der Beweis erfolgt unter Benutzung der zuvor eingeführten Bezeichnung $K_m(G)$ in folgenden Schritten:

(a) Es sei zunächst zusätzlich vorausgesetzt, daß es eine Konstante $c \in \mathbf{R}_+$ gibt, so daß $\forall p \in G\colon \|D_p f\| \leq c$ ist.

   (i) Zu jedem abgeschlossenen Würfel $Q_0 \subseteq G$ mit Mittelpunkt $a \in \mathbf{R}^n$ existiert ein Würfel Q_0' mit Mittelpunkt $f(a)$, so daß

$$f(Q_0) \subseteq Q_0' \quad \text{und} \quad \lambda^n(Q_0') \leq c^n \cdot \lambda^n(Q_0).$$

   (ii) Ist $Q \subseteq G$ irgendein abgeschlossener Quader, so ist $f(N \cap Q)$ eine λ^n-Nullmenge.

   (iii) Für jedes $m \in \mathbf{N}_0$ ist $f(N \cap K_m(G))$ eine λ^n-Nullmenge, also (?) ist auch $f(N) = f(N \cap G)$ eine λ^n-Nullmenge.

(b) Nun beweise man vermittels (a) in der allgemeinen Situation, daß für jedes $m \in \mathbf{N}_0$ das Bild $f(N \cap K_m(G)^o)$ eine λ^n-Nullmenge ist, und folgere daraus, daß auch $f(N)$ eine λ^n-Nullmenge ist.

Gilt die Aussage auch noch, wenn f nur als stetig vorausgesetzt wird?

Aufgabe 6 (Bilder niederdimensionaler Teilmengen sind dünn)**.**

(a) Seien G eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^k$ und $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Ist dann $k < n$, so ist das Bild $f(G)$ eine Lebesguesche Nullmenge.

   Insbesondere (?) sind daher alle echten Untervektorräume des $\mathbf{R}^n$ Lebesguesche Nullmengen.

   (Tip: $g\colon \mathbf{R}^{n-k} \times G \to \mathbf{R}^n, (p,q) \mapsto f(q)$.)

(b) Jede k-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit M von $\mathbf{R}^n$ ist eine Lebesguesche Nullmenge, wenn $k < n$.

15.4 Das Integral nicht negativer meßbarer Funktionen

In diesem Abschnitt sei ein Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ fixiert. Wir erinnern an die Definition des Raumes $\widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A})$ der $\mathfrak{A}$-meßbaren Funktionen $f\colon X \to \widehat{\mathbf{R}}$ aus Abschnitt 15.2. Da wir zunächst für nicht-negative derartige Funktionen das Integral einführen wollen, definieren wir

$$\widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A}) := \{f \in \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A}) \mid f \geq 0\}.$$

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes wird das Theorem über die monotone Konvergenz von Beppo Levi sein, welches ein Grundwerkzeug für die Integrationstheorie ist.

Ähnlich wie wir in Kapitel 8 verfahren sind, beginnen wir damit, daß wir (in Abhängigkeit von μ) das Integral „verallgemeinerter Treppenfunktionen" definieren. Zunächst seien letztere definiert.

Definition 1. Eine Funktion $\varphi \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ heißt *($\mathfrak{A}$-)einfach*, wenn ihre Wertemenge $W := \varphi(X)$ eine endliche Menge ist. Dann gilt

$$\forall w \in W\colon A_w := \varphi^{-1}(\{w\}) \in \mathfrak{A}$$

und

$$\varphi = \sum_{w \in W} w \cdot 1_{A_w}. \tag{1}$$

Wir nennen die Formel (1) die *Standarddarstellung* von φ. Die Menge $\mathcal{E}(X, \mathfrak{A})$ aller $\mathfrak{A}$-einfachen Funktionen $\varphi\colon X \to \mathbf{R}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$. Weiterhin setzen wir

$$\mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A}) := \mathcal{E}(X, \mathfrak{A}) \cap \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A}) = \{\varphi \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A}) \mid \varphi \geq 0\}.$$

Beispiel 1. Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ und sind $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty[$ nicht-negative reelle Zahlen, so ist $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot 1_{A_k} \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$.

Korollar 1. Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$, ist $c \in [0, \infty[$ eine nicht-negative Zahl und $A \in \mathfrak{A}$, so gilt

$$\varphi + \psi, c\varphi, \varphi \cdot 1_A \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A}).$$

Ein Spezialfall der letzten Beziehung ist: Sind A, $B \in \mathfrak{P}(X)$, so gilt:

$$1_A \cdot 1_B = 1_{A \cap B}.$$

Sind außerdem $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(X)$ paarweise disjunkt, so gilt

$$1_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A} = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}.$$

Definition 2. Sei $\varphi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$. Dann ist das *Integral* von φ bezüglich μ durch

$$\int \varphi \, d\mu := \sum_{w \in W} w \cdot \mu(A_w) \in [0, \infty]$$

definiert, wobei $W := \varphi(X)$ und $A_w := \varphi^{-1}(\{w\})$ für $w \in W$ wie in der Standarddarstellung (1); es sei im Falle $\mu(A_w) = \infty$ die in Abschnitt 15.2 getroffenen Ausnahmekonventionen für das Rechnen mit ∞ beachtet.

Proposition 1.

(a) Für jedes $\varphi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$ mit der Standarddarstellung $\varphi = \sum\limits_{w \in W} w \cdot 1_{A_w}$ wird durch

$$\mu_\varphi \colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}, A \mapsto \int \varphi \cdot 1_A \, d\mu = \sum_{w \in W} w \cdot \mu(A_w \cap A)$$

ein Maß auf $\mathfrak{A}$ definiert.

(b) Sind φ, $\psi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$ und ist $c \in [0, \infty[$ eine nicht negative reelle Zahl, so gilt

$$\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu \quad \text{und} \quad \int c \cdot \varphi \, d\mu = c \cdot \int \varphi \, d\mu.$$

Sind insbesondere $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ und sind $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty[$ nicht negative reelle Zahlen, und ist $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot 1_{A_k}$, so gilt

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mu(A_k).$$

(c) Das Integral ist als Funktion auf $\mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$ *monoton*, d h. sind φ, $\psi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$, so gilt:

$$\varphi \leq \psi \implies \int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu.$$

Beweis. **Zu (a).** Sei $\varphi = \sum\limits_{w \in W} w \cdot 1_{A_w}$ die Standarddarstellung von φ. Zunächst geht es um die Gleichung

$$\int \varphi \cdot 1_A \, d\mu = \sum_{w \in W} w \cdot \mu(A_w \cap A) \tag{2}$$

für $A \in \mathfrak{A}$. Für $A = X$ reduziert sich (2) auf die Definition des Integrals. Ansonsten ist $0 \cdot 1_{X \setminus A} + \sum\limits_{w \in W} w \cdot 1_{A_w \cap A}$ „fast" die Standarddarstellung von $\varphi \cdot 1_A$. Abweichungen können aus folgenden zwei Gründen auftreten: Erstens, ist $0 \in W$, so müssen die beiden Summanden $0 \cdot 1_{X \setminus A}$ und $0 \cdot 1_{A_0 \cap A}$ zu $0 \cdot 1_{(X \setminus A) \cup A_0}$ zusammengefaßt werden. Zweitens, ist $A_w \cap A = \emptyset$ für ein $w \neq \emptyset$, so nimmt $\varphi \cdot 1_A$ den Wert w nicht an, somit ist der Summand $w \cdot 1_{A_w \cap A}$ zu streichen. Unter Beachtung dieser Tatsachen folgt (2) für A.

Nun wenden wir Aufgabe 1(a) und (b) aus Abschnitt 15.3 an, um zu zeigen, daß μ_φ ein Maß ist: Zunächst ist danach für jedes $w \in W$ die Funktion $A \mapsto \mu(A_w \cap A)$ ein Maß; wegen $\varphi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$ ist W eine endliche Teilmenge von $[0, \infty[$, weswegen die Behauptung folgt.

Zu (b). Die Aussage für $c \cdot \varphi$ ist trivial. Nun zur Additivität. Für φ benutzen wir obige Standarddarstellung. Für ψ sei $\psi = \sum\limits_{z \in Z} z \cdot 1_{B_z}$ die Standarddarstellung. Dann setzen wir $C_{wz} := A_w \cap B_z$. Es ist

$$X = \bigcup_{w,z} C_{wz}, \tag{3}$$

und zwar liegt eine Vereinigung paarweise disjunkter Mengen vor. Trivialerweise gilt

$$\varphi \cdot 1_{C_{wz}} = w \cdot 1_{C_{wz}}, \quad \psi \cdot 1_{C_{wz}} = z \cdot 1_{C_{wz}}$$

und damit

$$(\varphi + \psi) \cdot 1_{C_{wz}} = (w + z) \cdot 1_{C_{wz}},$$

somit

$$\mu_\varphi(C_{wz}) = \int \varphi \cdot 1_{C_{wz}}\, d\mu = w \cdot \mu(C_{wz}),$$

$$\mu_\psi(C_{wz}) = \int \psi \cdot 1_{C_{wz}}\, d\mu = z \cdot \mu(C_{wz})$$

und

$$\mu_{\varphi+\psi}(C_{wz}) = \int (\varphi + \psi) \cdot 1_{C_{wz}}\, d\mu = (w + z) \cdot \mu(C_{wz}),$$

also

$$\mu_{\varphi+\psi}(C_{wz}) = \mu_\varphi(C_{wz}) + \mu_\psi(C_{wz}).$$

Unter Ausnutzung der Additivität der involvierten Maße erhalten wir daraus wegen (3), daß

$$\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \mu_{\varphi+\psi}(X) = \mu_\varphi(X) + \mu_\psi(X) = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu.$$

Zu (c). Unter den Voraussetzungen von (c) ist $\chi := \psi - \varphi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$ und $\psi = \varphi + \chi$. Wegen $\int \chi\, d\mu \geq 0$ folgt mit 15.4 daraus die Behauptung. $\square$

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt das Integral von Funktionen aus $\widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ einführen:

Definition 3. Sei $f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$. Dann ist das *Integral* von f bezüglich μ durch

$$\int f\, d\mu := \sup\Big\{ \int \varphi\, d\mu \;\Big|\; \varphi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A}) \wedge \varphi \leq f \Big\} \in [0, \infty]$$

definiert; ist außerdem $A \in \mathfrak{A}$, so ist $f \cdot 1_A \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$, so daß wir das Integral von f *über* A bezüglich μ definieren können, und zwar durch

$$\int_A f\, d\mu := \int f \cdot 1_A\, d\mu.$$

Wegen Proposition 1(c) steht diese Definition im Falle einer $\mathfrak{A}$-einfachen Funktion $f \geq 0$ nicht im Widerspruch zum zuvor definierten Integral.

Proposition 2.

(a) Sind f, $g \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$, so gilt:

$$f \leq g \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

(b) Ist $f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ und sind A, $B \in \mathfrak{A}$, so gilt:

$$A \subseteq B \implies \int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

Es sei bemerkt, daß die letzte Ungleichung nur gilt, weil wir $f \geq 0$ vorausgesetzt haben.

Das folgende Theorem, das auf Beppo Levi zurückgeht, dürfen wir als diejenige Aussage bezeichnen, auf welche alle starken Konvergenzsätze dieser Theorie beruhen.

Theorem 1 (Konvergenzsatz von Beppo Levi)**.** Sei $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Levi-Folge des meßbaren Raumes $(X, \mathfrak{A})$, d. h. (f_n) ist eine Folge von Funktionen $f_n \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$, welche monoton wachsend ist, d. h. $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Ist dann $f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ der punktweise Limes der Folge (f_n), so gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Dieses Theorem heißt auch das Theorem über die monotone Konvergenz.

Beweis. Die Folge $(\int f_n \, d\mu)$ ist eine monoton wachsende Folge von „Zahlen" in $[0, \infty]$, die daher in jedem Falle einen Grenzwert I in $\widehat{\mathbf{R}}$ hat (nämlich ihr Supremum), wobei möglicherweise $I = \infty$. Wir haben $I = \int f \, d\mu$ zu zeigen.

„$I \leq \int f \, d\mu$". Es gilt $f_n \leq f$, also $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ für alle n; also auch $I \leq \int f \, d\mu$.

„$\int f \, d\mu \leq I$". Dazu reicht es für jedes $\varphi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$ mit $\varphi \leq f$ zu zeigen, daß

$$\int \varphi \, d\mu \leq I.$$

Dazu wiederum genügt es für jedes $c \in \,]0, 1[$ zu zeigen, daß

$$c \cdot \int \varphi \, d\mu \leq I. \tag{4}$$

Dazu definieren wir für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ die meßbare Menge

$$A_n := \{p \in X \mid c \cdot \varphi(p) \leq f_n(p)\} \in \mathfrak{A}.$$

Da (f_n) eine Levi-Folge ist, ist (A_n) eine monoton wachsende Folge von Mengen in $\mathfrak{A}$.
Wir werden zeigen, daß

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = X. \tag{5}$$

Dann können wir den Beweis folgendermaßen fortsetzen: Unter Benutzung des Maßes μ_φ aus Proposition 1(a) erhalten wir mit Proposition 2, daß

$$c \cdot \mu_\varphi(A_n) = c \cdot \int \varphi \cdot 1_{A_n}\, d\mu = \int_{A_n} c \cdot \varphi\, d\mu \le \int_{A_n} f_n\, d\mu \le \int f_n\, d\mu \le I.$$

Wegen Proposition 2(a) aus Abschnitt 15.3 gilt daher

$$c \cdot \int \varphi\, d\mu = c \cdot \mu_\varphi(X) = c \cdot \lim_{n\to\infty} \mu_\varphi(A_n) \le I,$$

womit (4) bewiesen ist.

Also bleibt jetzt noch, (5) zu beweisen. Sei dazu $p \in X$ vorgegeben. Es gilt $c \cdot \varphi(p) \le \varphi(p) \le f(p)$. Ist also $c \cdot \varphi(p) = f(p)$, so ist daher $c \cdot \varphi(p) = \varphi(p)$, also $\varphi(p) = 0$, also $f(p) = 0$, also auch $f_0(p) = 0$, also $p \in A_0$. Ist aber $c \cdot \varphi(p) < f(p)$, so existiert ein $n \ge 0$ mit $c \cdot \varphi(p) \le f_n(p)$, also $p \in A_n$. Damit ist $X = \bigcup A_n$. □

Beispiel 2. Wir betrachten das Lebesguesche Maß λ auf $\mathbf{R}$. Ist $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine nicht negative stetige Funktion, so gilt für alle $-\infty \le a \le b \le \infty$

$$\int_{[a,b]\cap\mathbf{R}} f\, d\lambda = \int_a^b f\, dx,$$

wobei auf der rechten Seite das (uneigentliche) Integral von Regelfunktionen steht.

Um Proposition 1(b) auf $\widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ zu übertragen, benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 1. Zu jeder Funktion $f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ existiert eine Levi-Folge $(\varphi_n)_{n\ge0}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$, die punktweise gegen f konvergiert.

Zusatz: Ist f beschränkt, so können wir durch geeignete Konstruktion der Folge (φ_n) gleichmäßige Konvergenz gegen f erreichen.

Proposition 3. Sind f, $g \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ und ist $c \in [0, \infty]$, so gilt:

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \quad \text{und} \quad \int c \cdot f\, d\mu = c \cdot \int f\, d\mu.$$

Korollar 2. Für jede Folge $(f_n)_{n\ge0}$ von Funktionen $f_n \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ gilt

$$\int \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big)\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Korollar 3. Ist $g \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$, so wird durch

$$\mu_g\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}, A \mapsto \int_A g\, d\mu$$

ein Maß auf $\mathfrak{A}$ definiert; wir sagen, daß μ_g das Maß der *Dichte* g bezüglich μ ist. Dieses Maß ist *absolut stetig* bezüglich μ, d. h. $\mathfrak{N}(X, \mathfrak{A}, \mu) \subseteq \mathfrak{N}(X, \mathfrak{A}, \mu_g)$; weiterhin gilt:

$$\forall f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})\colon \int f\, d\mu_g = \int f \cdot g\, d\mu;$$

vgl. auch den folgenden Satz von Radon/Nikodým und Theorem 3 aus Abschnitt 15.5.

Lemma 2. Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X,\mathfrak{A})$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = 0$. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n_k} \underset{\mu}{=} 0$.

Beweis. Indem wir eventuell zu einer Teilfolge übergehen, können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, daß $\int f_n \, d\mu \leq 4^{-n}$ für alle $n \geq 0$. Sei $A_n := \{p \in X \mid f_n(p) \geq 2^{-n}\} \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

$$4^{-n} \geq \int f_n \, d\mu \geq \int_{A_n} f_n \, d\mu \geq \int_{A_n} 2^{-n} \, d\mu = 2^{-n} \cdot \mu(A_n),$$

also $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ und damit

$$\mu(\bigcup_{k\geq n} A_k) \leq \sum_{k\geq n} 2^{-k} = 2^{-n+1}.$$

Für $N := \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ folgt nach Definition in Aufgabe 2 aus Abschnitt 15.1 und Proposition 2(b) aus Abschnitt 15.3 dann $\mu(N) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bigcup\limits_{k\geq n} A_n) = 0$. Damit ist N eine μ-Nullmenge. Nach der Charakterisierung von $N = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ aus Aufgabe 2(b) aus Abschnitt 15.1 und der Definition von A_n folgt, daß f_n auf $X \setminus N$ punktweise gegen 0 konvergiert. □

Proposition 4. Seien $f,\, g \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X,\mathfrak{A})$. Dann gilt:

(a) $f \underset{\mu}{=} 0 \iff \displaystyle\int f \, d\mu = 0$,

(b) $f \underset{\mu}{=} g \implies \displaystyle\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$,

(c) $\displaystyle\int f \, d\mu < \infty \implies \{p \in X \mid f(p) = \infty\} \in \mathfrak{N}(X,\mathfrak{A},\mu)$.

Es sei bemerkt, daß die Implikation „$\Longleftarrow$“ in (a) nur gilt, weil $f \geq 0$ vorausgesetzt ist.

Beispiel 3. Die charakteristische Funktion $1_{\mathbf{Q}}$ ist Borel-meßbar mit $\int 1_{\mathbf{Q}} \, d\lambda = 0$.

Theorem 2 (Der Satz von Radon/Nikodým)**.** Es seien ν und μ zwei Maße auf dem Raum $(X,\mathfrak{A})$, so daß μ ein σ-endliches Maß und ν absolut stetig bezüglich μ ist, also $\mathfrak{N}(X,\mathfrak{A},\mu) \subseteq \mathfrak{N}(X,\mathfrak{A},\nu)$. Dann existiert eine Funktion $g \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X,\mathfrak{A})$, so daß $\nu = \mu_g$ ist; vgl. obiges Korollar 3. Die Funktion g ist im wesentlichen eindeutig, d. h. sind g und $g' \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X,\mathfrak{A})$ mit $\mu_g = \mu_{g'}$, so gilt $g \underset{\mu}{=} g'$; wir schreiben

$$\frac{d\nu}{d\mu} \underset{\mu}{:=} g.$$

Um das Theorem zu beweisen, benötigen wir zunächst ein Lemma über signierte Maße:

Lemma 3. Sei $\mu\colon \mathfrak{A} \to \mathbf{R}$ ein signiertes Maß über $(X, \mathfrak{A})$, etwa die Differenz zweier endlicher Maße. Dann existiert eine meßbare Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) \geq \mu(X)$ und $\mu_A \geq 0$.

Beweis des Lemmas. Wir zeigen zunächst folgende Abschwächung der Behauptung: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ und jeder meßbaren Menge $Y \in \mathfrak{A}$ gibt es eine meßbare Menge $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}_Y$ mit

$$\mu(A_\varepsilon) \geq \mu(Y) \tag{6}$$

und

$$\mu_{A_\varepsilon} \geq -\varepsilon. \tag{7}$$

Indem wir gegebenenfalls von $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ auf $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mu_Y)$ übergehen, können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, daß $X = Y$. Angenommen, es gibt ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, für das keine meßbare Menge $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}_Y$ mit (6) und (7) existiert. Wir konstruieren dann eine disjunkte Folge (A_n) von Mengen in $\mathfrak{A}_Y$ mit

$$\forall n \in \mathbf{N}_0\colon \big(\mu(Y \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_n)) > \mu(X) \wedge \mu(A_n) < -\varepsilon\big)$$

rekursiv wie folgt: Seien $A_0, \ldots, A_{n-1}$ schon konstruiert. Sei $Z := Y \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1})$. Dann gilt $\mu(Z) \geq \mu(X)$. Gilt dann außerdem $\mu(A) \geq -\varepsilon$ für alle $A \in \mathfrak{A}_Z$, so könnten wir $A_\varepsilon := Z$ setzen und hätten die Existenz eines solchen A_ε gezeigt, im Widerspruch zur Annahme. Also muß es ein $A_n \in \mathfrak{A}_Z$ mit $\mu(A_n) < -\varepsilon$ geben. Dann sind $A_0, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt, und es gilt

$$\mu(Y \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_n)) = \mu(Y \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1})) - \mu(A_n) \geq \mu(X) + \varepsilon > \mu(X).$$

Die Existenz der Folge (A_n) führt nun wie folgt auf einen Widerspruch: Sei $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Dann ist

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Die linke Seite ist endlich, da μ ein endliches Maß ist; die rechte Seite divergiert jedoch (in $\mathbf{R}$), da $\mu(A_n) < -\varepsilon$ für alle n. Folglich ist die Annahme falsch, zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert also ein A_ε mit den Eigenschaften (6) und (7).

Damit ist die Abschwächung der Behauptung bewiesen und wir können damit eine weitere Folge $(B_n)_{n \geq 0}$ von Mengen $B_n \in \mathfrak{A}$ rekursiv wie folgt konstruieren: Zunächst setzen wir $B_0 := X$. Ist weiter B_n schon konstruiert, so wählen wir als B_{n+1} eine Menge $B_{n+1} \in \mathfrak{A}$ mit $B_{n+1} \subseteq B_n$, $\mu(B_{n+1}) \geq \mu(X)$ und $\mu_{B_{n+1}} \geq -1/(n+1)$. Wir setzen dann

$$A := \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathfrak{A}.$$

Es gilt dann

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n) \geq \mu(X)$$

und

$$\mu_A \geq \sup_{n \to \infty} -\frac{1}{n} = 0,$$

da die Folge (B_n) monoton ist. □

Beweis des Theorems. Zeigen wir zunächst die Eindeutigkeit: Seien also $g,\, g' \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X,\mathfrak{A})$ mit $\mu_g = \mu_{g'}$. Sei $f := \sup(g,g')$, also $f|A_1 \equiv g|A_1$ und $f|A_2 \equiv g'|A_2$ mit $A_1 := \{p \in X \mid g(p) \geq g'(p)\}$ und $A_2 := \{p \in X \mid g(p) < g'(p)\}$. Sei dann $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist $f - g \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X,\mathfrak{A})$, und es gilt

$$\begin{aligned}\int (f-g)\,d\mu &= \int_{A_1} (f-g)\,d\mu + \int_{A_2} (f-g)\,d\mu = \int_{A_2} (g'-g)\,d\mu \\ &= \int_{A_2} g'\,d\mu - \int_{A_2} g\,d\mu = \mu_{g'}(A_2) - \mu_g(A_2) = 0.\end{aligned}$$

Nach Proposition 4(a) ist also $f - g \underset{\mu}{=} 0$, also $\sup(g,g') \underset{\mu}{=} g$. Mit vertauschten Rollen von g und g' erhalten wir analog $\sup(g,g') \underset{\mu}{=} g'$, also $g \underset{\mu}{=} g'$.

Die Existenz zeigen wir, in dem wir zunächst spezielle Fälle abhandeln und dann zum allgemeinen Fall kommen:

Die Maße μ und ν seien endlich. Sei

$$F := \Big\{ f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X,\mathfrak{A}) \;\Big|\; \forall A \in \mathfrak{A}\colon \int_A f\,d\mu \leq \nu(A) \Big\}.$$

Dann ist $F \neq \emptyset$, da $0 \in F$. Außerdem gilt

$$\forall f_1, f_2 \in F\colon\; \sup(f_1,f_2) \in F:$$

Dazu betrachten wir die meßbaren Mengen

$$A_1 := \{p \in X \mid f_1(p) \geq f_2(p)\} \quad \text{und} \quad A_2 := \{p \in X \mid f_1(p) < f_2(p)\} = A_1^{\mathrm{c}}.$$

Für jedes $A \in \mathfrak{A}$ ergibt sich dann nämlich die zu beweisende Ungleichung durch

$$\int_A \sup(f_1,f_2)\,d\mu = \int_{A\cap A_1} f_1\,d\mu + \int_{A\cap A_2} f_2\,d\mu \leq \nu(A\cap A_1) + \nu(A\cap A_2) = \nu(A).$$

Wir setzen dann

$$c := \sup_{f\in F} \int f\,d\mu \leq \nu(X) \in [0,\infty[$$

und wählen eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ in F mit $c = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$. Nach dem soeben gezeigten ist $(g_n)_{n\geq 0}$ mit $g_n := \sup(f_0,\ldots,f_{n-1})$ ebenfalls eine Folge in F. Wegen $f_n \leq g_n$ folgt $\int f_n\,d\mu \leq \int g_n\,d\mu$. Nach Definition von c folgt $c = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu$.

Nach Konstruktion ist (g_n) eine Levi-Folge. Nach dem Satz von Beppo Levi ist also $g := \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ eine Funktion in F mit $\int g\,d\mu = c$. Wir haben also gezeigt, daß die Funktion $f \mapsto \int f\,d\mu$ ihr Maximum auf F in g annimmt.

Jetzt zeigen wir, daß $\nu = \mu_g$ gilt. Jedenfalls ist $\mu_g \leq \nu$ und somit

$$\rho := \nu - \mu_g$$

ein endliches, nach Voraussetzung μ-absolut stetiges Maß auf $(X,\mathfrak{A})$. Zu zeigen ist $\rho(X) = 0$. Angenommen, $\rho(X) > 0$. Da ρ absolut stetig bezüglich μ ist, folgt $\mu(X) > 0$, d. h.

$$s := \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho(X)}{\mu(X)} \in \mathbf{R}_+$$

ist wohldefiniert. Es gilt $\rho(X) = 2s\mu(X) > s\mu(X)$. Wenden wir das Lemma 3 auf das signierte Maß $\rho - s\mu$ an, erhalten wir die Existenz einer meßbaren Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit

$$\rho(A_0) - s\mu(A_0) \geq \rho(X) - s\mu(X) > 0$$

und

$$\forall A \in \mathfrak{A}\colon \big(A \subseteq A_0 \implies \rho(A) \geq s\mu(A)\big).$$

Für $g_0 \coloneqq g + s \cdot 1_{A_0} \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ gilt daher

$$\int_A g_0\, d\mu = \int_A g\, d\mu + s\mu(A \cap A_0) \leq \mu_g(A) + \rho(A \cap A_0) \leq \mu_g(A) + \rho(A) = \nu(A).$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$. Folglich ist $g_0 \in F$. Es gilt aber außerdem

$$\int g_0\, d\mu = \int g\, d\mu + s\mu(A_0) = c + s\mu(A_0) > c, \tag{8}$$

da $\mu(A_0)$ wegen $\rho(A_0) > s\mu(A_0)$ und der absoluten Stetigkeit von ρ bezüglich μ positiv sein muß. Die soeben hergeleitete Ungleichheit (8) widerspricht aber der Definition von c. Die Annahme $\rho(X) > 0$ führt daher zu einem Widerspruch.

Das Maß μ ist endlich; das Maß ν ist unendlich. Wir zeigen zunächst: Es gibt eine Zerlegung $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ von X in paarweise disjunkte Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$, so daß

$$\forall A \in \mathfrak{A}\colon \Big(A \subseteq A_0 \implies \big(\mu(A) = \nu(A) = 0 \vee \big(\mu(A) > 0 \wedge \nu(A) = \infty\big)\big)\Big) \tag{9}$$

und

$$\forall n \in \mathbf{N}_1\colon \nu(A_n) < \infty.$$

Hierzu sei $\mathfrak{B}$ das System aller $B \in \mathfrak{A}$ mit $\nu(B) < \infty$; ferner sei

$$c \coloneqq \sup_{B \in \mathfrak{B}} \mu(B).$$

Wir wählen eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbf{N}_1}$ mit $B_n \in \mathfrak{B}$ und $c = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$. Da $\mathfrak{B}$ stabil unter Vereinigung ist (d. h. mit je zwei Mengen enthält $\mathfrak{B}$ auch deren Vereinigung), können wir davon ausgehen, daß die Folge $(B_n)_{n \in \mathbf{N}_1}$ monoton wachsend ist. Es ist dann $B \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(B) = c$.

Wir setzen $A_0 \coloneqq X \setminus B$. Wir zeigen jetzt, daß A_0 die Eigenschaft (9) erfüllt: Sei dazu $A \in \mathfrak{A}$ mit $A \subseteq A_0$ und $\nu(A) < \infty$. Dann gilt $B_n \cup A \in \mathfrak{B}$ für alle $n \in \mathbf{N}_1$, also ist $\mu(B_n \cup A) \leq c$ und somit

$$\mu(B \cup A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n \cup A) \leq c.$$

Da $B \cap A = \emptyset$, folgt $c + \mu(A) = \mu(B) + \mu(A) = \mu(B \cup A) \leq c$, also $\mu(A) = 0$, da $c < \infty$ wegen der Endlichkeit von μ. Zusammen mit der Voraussetzung, daß ν absolut stetig bezüglich μ ist, folgt die Alternative in (9). Schließlich setzen wir $A_1 \coloneqq B_1$ und rekursiv $A_n \coloneqq B_n \setminus B_{n-1}$ für alle $n \geq 2$, um eine Zerlegung $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ mit den gewünschten Eigenschaften zu erhalten.

Bezeichnen wir mit $\mu_n \coloneqq \mu_{A_n}$ und $\nu_n \coloneqq \nu_{A_n}$ die Einschränkungen von μ bzw. ν auf $\mathfrak{A}_n \coloneqq \mathfrak{A}_{A_n}$. Dann ist ν_n absolut stetig bezüglich μ_n für alle $n \in \mathbf{N}_0$ und ν_n und μ_n sind endlich für $n \in \mathbf{N}_1$. Nach dem schon bewiesenen gibt es also $g_n \in \widehat{\mathcal{M}}^+(A_n, \mathfrak{A}_n)$ mit $\nu_n = \mu_{n,g_n}$ für alle $n \in \mathbf{N}_1$. Wegen (9) gilt außerdem $\nu_0 = \mu_{0,g_0}$, wobei $g_0 \in \widehat{\mathcal{M}}^+(A_0, \mathfrak{A}_0)$ mit $g_0 \equiv \infty$. Ist dann $g \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ diejenige Funktion mit $g|A_n = g_n$, so gilt $\nu = \mu_g$.

Das Maß μ ist nur σ-endlich. Für das σ-endliche Maß μ existiert eine Zerlegung $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ mit $A_n \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A_n) < \infty$. Wir können ohne Einschränkung davon ausgehen, daß die Folge (A_n) disjunkt ist. Wir definieren dann die Funktion $h \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ mit $h|A_n \equiv 1/(2^n \mu(A_n))$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Dann ist $\mu_h(X) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 < \infty$, d. h. μ_h ist ein endliches Maß. Da h überall positiv ist, besitzt μ_h außerdem die gleichen Nullmengen wie μ. Damit ist ν auch bezüglich μ_h absolut stetig, wir können also das bisher Bewiesene anwenden und erhalten ein $g \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ mit $\nu = (\mu_h)_g$, also $\nu = \mu_{gh}$. □

Das folgende Resultat ist ein Versuch, sich davon zu befreien, daß im Konvergenzsatz von Beppo Levi die Folge (f_n) monoton wachsend sein muß.

Lemma 4 (Lemma von Fatou). Für jede Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ von Funktionen $f_n \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ gilt

$$\int \big(\liminf_{n\to\infty} f_n\big)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß im Lemma die Voraussetzung $f_n \geq 0$ wesentlich ist.

Beweis. Es sei $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Dann gilt $g_n \leq f_n$, also insbesondere

$$\int g_n\, d\mu \leq \int f_n\, d\mu \tag{10}$$

für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Die Folge (g_n) ist eine Levi-Folge, also gilt nach dem Satz von Beppo Levi, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \int \big(\lim_{n\to\infty} g_n\big)\, d\mu = \int \big(\liminf_{n\to\infty} f_n\big)\, d\mu$$

Aus (10) folgt außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu,$$

womit alles bewiesen ist. □

Aufgabe 1. Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$, so sind auch $\varphi \cdot \psi$, $\sup(\varphi, \psi)$, $\inf(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$.

Aufgabe 2. Ist ν das Zählmaß auf $\mathbf{N}_0$, so ist jede nirgends negative Funktion $f\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$ ein Element von $\widehat{\mathcal{M}}^+(\mathbf{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbf{N}_0))$ und

$$\int f\, d\nu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Aufgabe 3. Sei $f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ eine Funktion, für welche $\int f\, d\mu < \infty$ ist. Dann gilt:

(a) Für jedes $a \in \mathbf{R}_+$ hat die Menge $M_a := \{p \in X \mid f(p) \geq a\}$ ein endliches μ-Maß.

(b) Die Menge $M_0 := \{p \in X \mid f(p) > 0\}$ ist σ-endlich, d. h. es existiert eine Folge (A_n) von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und $M_0 \subseteq \bigcup A_n$.

(c) Zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ derart, daß $\mu(A) < \infty$ und

$$\int f\,d\mu \leq \int_A f\,d\mu + \varepsilon.$$

(Tip: Man arbeite mit einem $\varphi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$, für welches $\varphi \leq f$ und $\int f\,d\mu \leq \int \varphi\,d\mu + \varepsilon$ gilt.)

Aufgabe 4. Es sei λ das Lebesguesche Maß auf $\mathbf{R}$.

(a) Ist $f_n := \frac{1}{n} \cdot 1_{[n,\infty[}$, so ist $(f_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Folge, die gleichmäßig gegen $f \equiv 0$ konvergiert. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\lambda = 0?$$

Welche Schlüsse können wir aus diesem Beispiel für monoton fallende Folgen auf $\widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ ziehen?

(b) Man modifiziere (a), indem man die Folge $f_n := \frac{1}{n} \cdot 1_{[0,n]}$ betrachtet. Das Lemma von Fatou muß ja anwendbar sein; wie sehen da die Verhältnisse aus?

(c) Man modifiziere (a), indem man die Folge der Funktionen $f_n := n \cdot 1_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$ betrachtet. Ist die Konvergenz von (f_n) gegen $f \equiv 0$ gleichmäßig? Wie sehen die Verhältnisse beim Lemma von Fatou aus?

Aufgabe 5. Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ zwei σ-Algebren über einer Menge X und $\mu\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}$ und $\nu\colon \mathfrak{B} \to \widehat{\mathbf{R}}$ zwei Maße, und zwar sei ν eine Fortsetzung von μ, d. h.

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \mu = \nu|\mathfrak{A}.$$

Dann gilt:

(a) $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$, $\mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{B})$, $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{B})$ sowie $\widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A}) \subseteq \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{B})$ und $\widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A}) \subseteq \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{B})$.

(b) $\mathfrak{N}(X, \mathfrak{A}, \mu) \subseteq \mathfrak{N}(X, \mathfrak{B}, \nu)$.

(c) Für alle $\varphi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$ gilt $\int \varphi\,d\mu = \int \varphi\,d\nu$.

(d) Für alle $f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ gilt $\int f\,d\mu = \int f\,d\nu$. (Tip: Man beachte Lemma 1.)

15.5 Der Raum der integrierbaren Funktionen und deren Integral

Im letzten Abschnitt haben wir das Integral aller (reellwertigen) *nicht negativen* meßbaren Funktionen eines meßbaren Raumes bezüglich eines beliebigen Maßes eingeführt; trotzdem gelten nicht alle diese Funktionen als *integrierbar*, nämlich genau dann nicht, wenn ihr Integral den Wert ∞ hat. Die letztgenannten Funktionen stehen uns im Wege, wenn wir mit den integrierbaren Funktionen eines Maßraumes einen Vektorraum erhalten wollen, und dies ist für eine gute Theorie wünschenswert. Nach diesen Bemerkungen ist das folgende Vorgehen sehr natürlich.

Wir fixieren in diesem Abschnitt wieder einen Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Definition. Eine Funktion $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ heißt μ-*integrierbar* (oder kurz *integrierbar*, wenn das Maß μ aus dem Zusammenhang klar ist), wenn $\int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu < \infty$. In diesem Falle heißt

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

das *Integral* von f bezüglich des Maßes μ. Hierbei sind die Integrale auf der rechten Seite die in Abschnitt 15.4 definierten. Für die nicht negativen Funktionen $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ stimmt das hier definierte Integral natürlich mit dem aus Definition 3 aus Abschnitt 15.4 überein.

Die Menge aller μ-integrierbaren Funktionen des Maßraumes $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ wird mit $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ bezeichnet. Ist X ein topologischer Raum und $\mathfrak{A}$ die Borel-Algebra von X, so schreiben wir auch

$$\mathcal{L}(X, \mu) := \mathcal{L}(X, \mathfrak{B}(X), \mu).$$

Ist M eine Borel-meßbare Teilmenge von X, so kürzen wir weiterhin ab:

$$\mathcal{L}(M, \mu) := \mathcal{L}(M, \mu_M);$$

es sei hierzu das folgende Lemma beachtet.

Der Buchstabe $\mathcal{L}$ ist in diesen Bezeichnungen zu Ehren Lebesgues gewählt.

Lemma. Sei X ein topologischer Raum. Für jede Borel-meßbare Teilmenge $M \subseteq X$, die wir als topologischen Teilraum von X auffassen, gilt dann $\mathfrak{B}(M) = \mathfrak{B}(X)_M$.

Beweis. Sei $\mathfrak{T}$ die topologische Struktur von X, so ist bekanntlich $\mathfrak{T}_M := \{G \cap M \mid G \in \mathfrak{T}\}$ die topologische Struktur von M. Aufgrund der Definition in Abschnitt 15.1, Beispiel (g) ist $\mathfrak{B}(X)_M = \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{B}(X)\}$, also $\mathfrak{T}_M \subseteq \mathfrak{B}(X)_M$; folglich ist auch $\mathfrak{B}(M) \subseteq \mathfrak{B}(X)_M$.

Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, bezeichnen wir mit $i \colon M \hookrightarrow X$ die Inklusion, so daß $i^{-1}(A) = A \cap M$ für alle $A \in \mathfrak{P}(X)$, und definieren

$$\mathfrak{A} := \{A \in \mathfrak{B}(X) \mid A \cap M \in \mathfrak{B}(M)\} = \mathfrak{B}(X) \cap \{A \in \mathfrak{P}(X) \mid i^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(M)\}.$$

Nach Abschnitt 15.1, Aufgabe 3(b) ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra. Aufgrund der Definition von $\mathfrak{T}_M$ und $\mathfrak{B}(M)$ gilt $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{A}$ und damit auch $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{A}$. Das besagt aber gerade, daß $\mathfrak{B}(X)_M \subseteq \mathfrak{B}(M)$. □

Proposition 1. Sind f_1, $f_2 \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ nicht negative meßbare Funktionen und gilt $\int f_1 \, d\mu, \int f_2 \, d\mu < \infty$, so ist $f := f_1 - f_2 \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mit

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 \, d\mu.$$

Theorem 1. Es ist $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ und das μ-Integral ist eine Linearform auf $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, d. h.:

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \quad \text{und} \quad \int cf\, d\mu = c \cdot \int f\, d\mu$$

für alle f, $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $c \in \mathbf{R}$.

Weiterhin gilt

$$f \leq g \implies \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu.$$

Theorem 2. Für jede Funktion $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ gilt

$$f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu) \iff |f| \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu);$$

im Falle der μ-Integrierbarkeit gilt

$$\left| \int f\, d\mu \right| \leq \int |f|\, d\mu.$$

Beispiel. Die Funktion $\sin /x$ ist zwar im Sinne von Abschnitt 10.6 uneigentlich integrierbar, aber dennoch nicht Lebesgue-integrierbar.

Korollar 1. Sei $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ eine meßbare und $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ eine μ-integrierbare Funktion. Dann gilt:

(a) Ist $f \underset{\mu}{=} g$, so ist ebenfalls $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, und es gilt

$$\int f\, d\mu = \int g\, d\mu.$$

(b) Ist $|f| \leq g$, so ist ebenfalls $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Korollar 2. Ist μ ein endliches Maß, also $\mu(X) < \infty$, so ist jede beschränkte Funktion $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ schon μ-integrierbar.

Ergänzungen zum Konvergenzsatz von Beppo Levi. Gilt für die Funktionen f_n im Konvergenzsatz von Beppo Levi aus Abschnitt 15.4, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int f_n\, d\mu < \infty,$$

so existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $g \underset{\mu}{=} f$.

(Das Hindernis für $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ist, daß möglicherweise $\{p \in X \mid f(p) = \infty\} \neq \emptyset$; in jedem Falle ist diese Menge aber eine μ-Nullmenge.)

Theorem 3 (Integration bezüglich einer Dichte)**.** Für das Integral bezüglich einer Dichte $g \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ (vgl. Korollar 3 aus Abschnitt 15.4) gilt: Für alle $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ ist

$$f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu_g) \iff f \cdot g \underset{\mu}{\in} \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu);$$

und im Falle der μ_g-Integrierbarkeit von f gilt

$$\int f \, d\mu_g = \int f \cdot g \, d\mu.$$

Ist g beschränkt, so gilt daher $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu) \subseteq \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu_g)$.

Proposition 2. Sei $Y \in \mathfrak{A}$ eine meßbare Teilmenge von X.

(a) Für jede Funktion $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ gilt

$$f|Y \in \mathcal{L}(Y, \mathfrak{A}_Y, \mu_Y), \quad f \cdot 1_Y \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu), \quad \text{und} \quad \int f|Y \, d\mu_Y = \int f \cdot 1_Y \, d\mu;$$

vgl. Beispiel (c)(i) aus Abschnitt 15.3 und Definition 3 aus Abschnitt 15.4.

Ist eine Funktion $f \colon D \to \mathbf{R}$ mit $Y \subseteq D \subseteq X$ und $f|Y \in \mathcal{L}(Y, \mathfrak{A}_Y, \mu_Y)$ gegeben, so können wir daher

$$\int_Y f \, d\mu := \int f|Y \, d\mu_Y$$

definieren.

Ist $(A_n)_{n \geq 0}$ eine disjunkte Folge in $\mathfrak{A}$ und $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, so gilt für alle $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, daß

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

(b) Ist $\hat{f} \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ die triviale Fortsetzung einer Funktion $f \in \mathcal{M}(Y, \mathfrak{A}_Y)$ (vgl. Beispiel 1(d) aus Abschnitt 15.2!), so gilt

$$f \in \mathcal{L}(Y, \mathfrak{A}_Y, \mu_Y) \iff \hat{f} \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu);$$

und im Falle der μ_Y-Integrierbarkeit von f gilt

$$\int f \, d\mu_Y = \int_Y f d\mu = \int \hat{f} \, d\mu.$$

Diese Proposition zeigt, wie die Ergebnisse über Integrale $\int f \, d\mu$ auf Integrale der Form $\int\limits_Y f \, d\mu$ ausgedehnt werden können; nämlich indem wir letztere als Integrale bezüglich des Maßes μ_Y betrachten oder die triviale Fortsetzung von f heranziehen.

Beweis. **Zu (a).** Ist $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, so ist $f \cdot 1_Y \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ nach Theorem 3 (mit $g = 1_Y$). Ist $i\colon Y \hookrightarrow X$ die Inklusion, so erhalten wir weiterhin $f|Y = f \circ i \in \mathcal{M}(Y, \mathfrak{A})$ aufgrund von Beispiel 1(c) aus Abschnitt 15.2.

Jetzt beweisen wir $f|Y \in \mathcal{L}(Y, \mathfrak{A}_Y, \mu_Y)$ und $\int f|Y \, d\mu_Y = \int f \cdot 1_Y \, d\mu$ der Reihe nach für $f = 1_A$ mit $A \in \mathfrak{A}$, für $f \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$, für $f \geq 0$ (Konvergenzsatz von Beppo Levi!) und schließlich für allgemeines $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Zu (b). Wir verfahren analog schrittweise startend mit $f = 1_A\colon Y \to \mathbf{R}$ mit $A \in \mathfrak{A}_Y$. □

Theorem 4. Ist K eine kompakte Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, so ist jede stetige Funktion $f\colon K \to \mathbf{R}$ Lebesgue-integrierbar.

Beweis. Dieser sehr wichtige Satz folgt sofort mit Proposition 2 aus Abschnitt 15.2 und obigem Korollar 2. □

Theorem 5 (Theorem von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz)**.** Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge μ-integrierbarer Funktionen $f_n\colon X \to \mathbf{R}$ auf einem Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, die μ-fast überall gegen eine meßbare Funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$ konvergiere. Existiert dann eine μ-integrierbare Funktion $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, so daß

$$\forall n \in \mathbf{N}_0\colon\ |f_n| \leq g, \tag{1}$$

so ist auch f eine μ-integrierbare Funktion, und zwar gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Zusatz: Ist $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, so müssen wir nicht annehmen, daß $f\colon X \to \mathbf{R}$ meßbar ist; die Meßbarkeit folgt dann aus den übrigen Voraussetzungen.

Offenbar handelt es sich bei diesem Theorem um einen allgemeinen *Vererbungssatz* der Integrierbarkeit.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$, so daß

$$\forall p \in M := X \setminus N\colon f(p) = \lim_{n\to\infty} f_n(p).$$

Setzen wir $\tilde{f}_n := f_n \cdot 1_M \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ und $\tilde{f} := f \cdot 1_M \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$, so ist $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ nach Korollar 1(a), und es gilt

$$\tilde{f} = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n, \tag{2}$$

$$\tilde{f}_n \underset{\mu}{=} f_n$$

und

$$\tilde{f} \underset{\mu}{=} f. \tag{3}$$

Wegen (2) und wegen (1) ist $|\tilde{f}| \leq g$, also $\tilde{f} \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ aufgrund des Korollars 1(b). Wegen (3) und Korollar 1(a) ist dann auch $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Damit haben wir noch

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

zu beweisen. Wegen (2) und Korollar 1(a) genügt es, die entsprechende Aussage für die Funktionen $\tilde{f}_n$ und $\tilde{f}$ zu beweisen. Damit können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, daß schon $f = \tilde{f}$ und $f_n = \tilde{f}_n$, d. h.

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu).$$

Es ist dann

$$g - f = g - \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} (g - f_n),$$

nach dem Lemma von Fatou aus Abschnitt 15.4 also:

$$\begin{aligned} \int g\, d\mu - \int f\, d\mu = \int (g-f)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n)\, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \Big(\int g\, d\mu - \int f_n\, d\mu \Big) \\ = \int g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu, \end{aligned}$$

woraus

$$\int f\, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

folgt. Die gleiche Argumentation wiederholen wir mit der Folge $(-f_n)$ anstelle von (f_n) und erhalten

$$\int f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu,$$

zusammen also

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu,$$

da der Limes inferior der kleinste und der Limes superior der größte Häufungspunkt ist.

Zum Zusatz: Sei $f\colon X \to \mathbf{R}$ also eine beliebige Funktion und das Maß μ vollständig. Wir müssen $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ folgern. Dazu erinnern wir uns, daß nach dem Theorem aus Abschnitt 15.2 $\tilde{f} := \lim_{n\to\infty} f_n \in \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A})$. Nach Voraussetzung gilt $\tilde{f} - f \underset{\mu}{=} 0$. Da alle Teilmengen von μ-Nullmengen meßbar sind, folgt $f - \tilde{f} \in \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A})$. Daraus folgt die Meßbarkeit von $f = \tilde{f} + (f - \tilde{f})$ nach Proposition 5 aus Abschnitt 15.2. □

Warnung. Für $n \in \mathbf{N}_1$ seien die Funktionen

$$f_n := \frac{1}{n} \cdot \exp(-\frac{x^2}{n^2}), \quad g_n := n \cdot x^n|[0,1] \quad \text{und} \quad h_n := n^2 \cdot x^n|[0,1]$$

definiert. Die Folgen (f_n), (g_n) und (h_n) konvergieren λ-fast überall gegen die Nullfunktion 0 (im ersten Falle sogar gleichmäßig). Dennoch gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\lambda = \sqrt{\pi}, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} g_n\, d\lambda = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} h_n\, d\lambda = \infty.$$

Proposition 3. Ist μ ein endliches Maß, also $\mu(X) < \infty$, und ist $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, welche *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$ konvergiert, so ist auch $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, und es gilt

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Insbesondere läßt sich diese Aussage auf den Spezialfall $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu) = \mathcal{L}(M, \lambda^n)$ anwenden, wobei M eine beschränkte Menge in $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$ ist.

Das Theorem von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz können wir nun ausnutzen, um Integrale zu untersuchen, die von einem Parameter abhängen (vgl. Abschnitt 8.11).

Sei dazu für den Rest des Abschnitts E ein metrischer Raum und $f\colon X \times E \to \mathbf{R}$ eine Funktion, so daß für jedes $q \in E$ die Funktion $f^q\colon X \to \mathbf{R}, p \mapsto f(p, q)$ eine μ-integrierbare Funktion ist, so daß wir die Funktion

$$F\colon E \to \mathbf{R}, q \mapsto \int f(p, q)\, d\mu(p) := \int f^q\, d\mu$$

definieren können.

Theorem 6 (Stetige Abhängigkeit des Integrals von einem Parameter)**.** Ist in obiger Situation dann $a \in E$ und ist für μ-fast jedes $p \in X$ die Funktion $f_p\colon E \to \mathbf{R}, q \mapsto f(p, q)$ in a stetig und existieren eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(a, E)$ und eine Funktion $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, so daß

$$\forall (p, q) \in X \times U\colon\ |f(p, q)| \leq g(p),$$

so ist die Funktion $F\colon E \to \mathbf{R}$ in a ebenfalls stetig.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$, so daß für alle $p \in X \setminus N$ die Funktion f_p in a stetig. Da E ein metrischer Raum ist, können wir die Stetigkeit von F in a mit dem Heine-Kriterium beweisen. Sei dazu $(q_n)_{n\geq 0}$ eine beliebige Folge in E mit $\lim_{n\to\infty} q_n = a$. Ohne Einschränkung können wir $q_n \in U$ für alle n annehmen. Nach Voraussetzung konvergiert für alle $p \in X \setminus N$ die Folge $f_p(q_n)$ gegen $f_p(a)$. Nun nutzen wir $f_p(q) = f^q(p)$ aus, d. h. das vorher Gesagte bedeutet, daß die Folge der μ-integrierbaren Funktionen f^{q_n} fast überall gegen f^a konvergiert. Nach Voraussetzung gilt außerdem $|f^{q_n}| \leq g$ für alle n. Daher können wir das Theorem von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten

$$F(a) = \int f^a\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f^{p_n}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} F(p_n);$$

nach dem Heine-Kriterium ist daher F in a stetig. □

Korollar 3. Ist obige Situation im Spezialfall $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu) = \mathcal{L}(K, \mu)$ gegeben, wobei K ein kompakter topologischer Raum und μ ein endliches Maß auf K ist, und ist $f\colon K \times E \to \mathbf{R}$ eine in allen Punkten $(p, a) \in K \times \{a\}$ stetige Funktion, so ist die Funktion

$$F\colon E \to \mathbf{R}, q \mapsto \int f(p, q)\, d\mu(p)$$

(ohne weitere Voraussetzungen) in a stetig.

Beweis. Wir wollen diese spezielle Situation auf das vorangegangene allgemeine Theorem zurückführen. Dazu beachten wir zunächst, daß nach Voraussetzung insbesondere jede Funktion f_p in a stetig ist. Daher genügt es, eine Funktion $g \in \mathcal{L}(K, \mu)$ und eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(a, E)$ zu finden, so daß

$$\forall (p, q) \in K \times U\colon\ |f(p, q)| \leq g(p). \tag{4}$$

Da $f^a\colon K \to \mathbf{R}$ stetig ist und K kompakt ist, existiert eine Konstante $C \in \mathbf{R}_+$ mit $|f(p, a)| \leq C$ für alle $p \in K$. Aufgrund der Stetigkeit von f in den Punkten $(p, a) \in K \times \{a\}$ existieren außerdem Umgebungen $V_p \in \mathfrak{U}^o(p, K)$ und $U_p \in \mathfrak{U}^o(a, E)$, so daß

$$\forall (p, q) \in V_p \times U_p\colon\ |f(p, q)| \leq 2 \cdot C. \tag{5}$$

Da $W := \bigcup_{p \in K} V_p \times U_p$ eine offene Umgebung von $K \times \{a\}$ in dem Produktraum $K \times X$ ist, existiert nach dem Tubenlemma aus Abschnitt 12.9 eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(a, E)$, so daß $K \times U \subseteq W$. Wegen (5) gilt daher (4) mit der Funktion $g \equiv 2 \cdot C$, die wegen $\mu(K) < \infty$ μ-integrierbar ist. $\square$

Es sei jetzt zusätzlich vorausgesetzt, daß der metrische Raum E eine offene Teilmenge G eines Banachraumes H ist.

Theorem 7 (Differenzierbare Abhängigkeit des Integrals von einem Parameter)**.** Ist in obiger Situation die Funktion $f\colon X \times G \to \mathbf{R}$ überall partiell nach der Variablen $q \in G$ differenzierbar und existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, so daß

$$\forall (p, q) \in X \times G\colon\ \left\| \frac{\partial f}{\partial q}(p, q) \right\| \leq g(p),$$

so ist auch

$$F\colon E \to \mathbf{R}, q \mapsto \int f(p, q)\, d\mu(p)$$

differenzierbar, für jedes $(q, v) \in G \times H$ ist die Funktion

$$p \mapsto \frac{\partial f}{\partial q}(p, q) \cdot v$$

eine μ-integrierbare Funktion, und es gilt jeweils

$$D_q F(v) = \int \frac{\partial f}{\partial q}(p, q) \cdot v\, d\mu(p).$$

Ist $H = \mathbf{R}^m$, so ist F partiell nach x_k, $k = 1, \ldots, n$, differenzierbar, die Funktionen

$$p \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(p, q)$$

sind für $q \in G$ jeweils μ-integrierbar, und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(q) = \int \frac{\partial f}{\partial x_k}(p, q)\, d\mu(p).$$

Beweis. Wir zeigen die Differenzierbarkeit von F in $a \in G$.

Dazu zeigen wir zunächst die folgende Behauptung: Für jedes $v \in H$ ist

$$h_v \colon X \to \mathbf{R}, p \mapsto \frac{\partial f}{\partial q}(p, a) \cdot v$$

eine μ-integrierbare Funktion mit

$$A(v) := \int h_v \, d\mu = \lim_{t=0} \frac{F(a + tv) - F(a)}{t};$$

insbesondere behaupten wir also, daß der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Dazu wählen wir ein offenes Intervall $I \in \mathfrak{U}^o(0, \mathbf{R})$, so daß $a + tv \in G$ für alle $t \in I$. Für eine Nullfolge $(t_n)_{n \geq 0}$ in $I \setminus \{0\}$ definieren wir dann die Folge (h_n) der μ-integrierbaren Funktionen

$$h_n \colon X \to \mathbf{R}, p \mapsto \frac{f(p, a + t_n v) - f(p, a)}{t_n},$$

welche auf ganz X gegen h_v konvergiert. Nach dem Mittelwertsatz existiert für jedes $p \in X$ und jedes $n \in \mathbf{N}_0$ ein $\theta \in [0, 1]$, so daß $h_n(p) = \frac{\partial f}{\partial q}(p, a + \theta t_n v) \cdot v$, also $|h_n(p)| \leq g(p) \cdot \|v\|$. Nach dem Theorem über die majorisierte Konvergenz ist daher $h_v \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mit

$$\int h_v \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int h_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{F(a + t_n v) - F(a)}{t_n}.$$

Da die Folge (t_n) beliebig gewählt war, folgt die Behauptung über h_v aus Proposition 1 aus Abschnitt 10.3.

Offenbar ist die Abbildung $A \colon H \to \mathbf{R}, v \mapsto A(v)$ linear. Sie ist nach dem Theorem über die stetige Abhängigkeit eines Integrals von einem Parameter auch in $v = 0$ (und somit überall) stetig, weil nach Voraussetzung

$$\forall p \in X \colon \left| \frac{\partial f}{\partial q}(p, a) \cdot v \right| \leq g(p) \cdot \|v\|, \tag{6}$$

also

$$\left| \frac{\partial f}{\partial q}(p, a) \cdot v \right| \leq g(p)$$

für alle $v \in H$ mit $\|v\| < 1$.

Es bleibt damit zu zeigen, daß das Restglied

$$R \colon G \to \mathbf{R}, q \mapsto F(q) - F(a) - A(q - a)$$

für $q \to a$ stärker als von erster Ordnung gegen 0 konvergiert. Sei dazu ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ gewählt; klein genug, so daß $U_\varepsilon(a) \subseteq G$. Weiterhin sei $(q_n)_{n \geq 0}$ eine beliebige Folge in der punktierten Umgebung $\dot{U}_\varepsilon(a)$, die gegen a konvergiert. Dann konvergiert die Folge (f_n) der Funktionen

$$f_n \colon X \to \mathbf{R}, p \mapsto \frac{f(p, q_n) - f(p, a) - \frac{\partial f}{\partial q}(p, a) \cdot (q_n - a)}{\|q_n - a\|}$$

gegen die Nullfunktion. Wegen (6) folgt nach dem Theorem aus Abschnitt 13.10, nun

$$|f(p, q_n) - f(p, a)| \leq g(p) \cdot \|q_n - a\|$$

für jedes $p \in X$ und jedes $n \in \mathbf{N}_0$, somit gilt nochmals wegen (6), daß

$$|f_n(p)| \leq 2g(p).$$

Damit ergibt sich mit dem Theorem über die majorisierte Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(q_n)}{\|q_n - a\|} = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = 0.$$

Aufgrund von Proposition 1 aus Abschnitt 10.3 folgt daraus $\lim\limits_{q\to a} \frac{R(q)}{\|q-a\|} = 0$, womit das Theorem vollständig bewiesen ist. □

Korollar 4. Ist obige Situation im Spezialfall $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu) = \mathcal{L}(K, \mu)$ gegeben, wobei K ein kompakter topologischer Raum und μ ein endliches Maß auf K ist, und ist $f\colon K \times G \to \mathbf{R}$ eine partiell nach $q \in G$ differenzierbare Funktion mit einer in allen $(p, a) \in K \times \{a\}$ stetigen partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial q}$, so ist die Funktion

$$F\colon G \to \mathbf{R}, q \mapsto \int f(p, q) \, d\mu(p)$$

(ohne weitere Voraussetzungen) in a differenzierbar, und es gilt für $v \in H$

$$D_a F(v) = \int \frac{\partial f}{\partial q}(p, q) \cdot v \, d\mu(p).$$

Aufgabe 1 (Zusammenhang mit dem elementaren Integral aus Kapitel 8)**.**

(a) Seien $-\infty < a < b < \infty$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\mathrm{R}([a, b], \mathbf{R}) \subseteq \mathcal{L}([a, b], \lambda) \quad \text{und} \quad \forall f \in \mathrm{R}([a, b], \mathbf{R})\colon \int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f \, dx.$$

(b) Seien $a, b \in \widehat{\mathbf{R}}$. Ist dann $-\infty < a < b \leq \infty$, so gilt für jede *nicht negative* Funktion $f \in \mathrm{R}([a, b[, \mathbf{R})$, daß $f \in \mathcal{L}([a, b[, \lambda)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int\limits_a^b f \, dx$ in $\mathbf{R}$ konvergiert; vgl. Abschnitt 10.6.

Entsprechende Aussagen gelten für uneigentliche Integrale, die an der unteren Grenze bzw. an beiden Grenzen „kritisch“ sind.

Aufgabe 2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** Es seien K eine kompakte zusammenhängende Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ und $f\colon K \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein Punkt $p \in K$, so daß

$$\int f \, d\lambda^n = f(p) \cdot \lambda^n(K).$$

(Tip: $\min f \leq f \leq \max f$.)

Aufgabe 3. Ist ν das Zählmaß des meßbaren Raumes $(\mathbf{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbf{N}_0))$, so ist eine Funktion $f\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$ genau dann ν-integrierbar, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert. In diesem Falle gilt

$$\int f\,d\nu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Aufgabe 4. Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert eine Funktion $\varphi \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A})$ mit

$$\int |f - \varphi|\,d\mu < \varepsilon.$$

(Tip: Man approximiere f^+ und f^- geeignet.)

Aufgabe 5. Ist $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und ist $a \in \mathbf{R}_+$, so hat die Menge $\{p \in X \mid |f(p)| \geq a\}$ ein endliches μ-Maß und die Menge $\{p \in X \mid f(p) \neq 0\}$ ist σ-endlich.

(Tip: Man vergleiche Aufgabe 3 aus Abschnitt 15.4.)

Aufgabe 6. Gilt für zwei Funktionen f, $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, daß

$$\forall A \in \mathfrak{A}\colon \int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu,$$

so ist schon $f \underset{\mu}{=} g$.

Aufgabe 7. Sei $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

(a) Ist $g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ beschränkt, so ist auch $fg \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

(b) Im allgemeinen gilt nicht $f^2 \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ (vgl. auch Definition 4 aus Abschnitt 15.6).

Aufgabe 8. Sei $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$, und sei $(f_n)_{n \geq 0}$ die Folge der abgeschnittenen Funktionen $f_n := \chi_n \circ f$ (vgl. Aufgabe 3 aus Abschnitt 15.2). Dann gilt:

(a) Ist $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, so auch $f_n \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ für alle $n \geq 0$, und es gilt dann

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

(b) Gilt

$$\sup_n \int |f_n|\,d\mu < \infty,$$

so ist $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Aufgabe 9. Ist $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n|\,d\mu < \infty,$$

so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ fast überall gegen ein $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, und es gilt

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Aufgabe 10. In der Situation der Aufgabe 5 aus Abschnitt 15.4 gilt

$$\mathcal{L}(X,\mathfrak{A},\mu)=\mathcal{M}(X,\mathfrak{A})\cap\mathcal{L}(X,\mathfrak{B},\nu) \quad \text{und} \quad \forall f\in\mathcal{L}(X,\mathfrak{A},\mu)\colon \int f\,d\mu=\int f\,d\nu.$$

15.6 Integration vektorwertiger Funktionen, L^p-Räume

In diesem Abschnitt werden wir uns der Integration vektorwertiger Funktionen zuwenden. Dazu sei wieder $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum, wobei wir μ als σ-endlich voraussetzen. Weiterhin sei E ein Banachraum über $\mathbf{K}$.

Definition 1. Wir nennen eine Funktion $\varphi\colon X\to E$ eine *integrierbare ($\mathfrak{A}$-)einfache* Funktion, wenn ihre Wertemenge $W:=\varphi(X)\subseteq E$ eine endliche Menge ist,

$$\forall w\in W\colon A_w:=\varphi^{-1}(\{w\})\in\mathfrak{A}.$$

und

$$\forall w\in W\setminus\{0\}\colon \mu(A_w)<\infty.$$

Dann gilt

$$\varphi=\sum_{w\in W} w\cdot 1_{A_w}=\sum_{w\in W\setminus\{0\}} w\cdot 1_{A_w} \tag{1}$$

und wir nennen (1) wieder die *Standarddarstellung* von φ. Die Menge $\mathcal{E}_0(X,\mathfrak{A};E)$ aller integrierbaren $\mathfrak{A}$-einfachen Funktionen ist ein Untervektorraum des Vektorraumes aller Funktionen $X\to E$.

Ist $\varphi\in\mathcal{E}_0(X,\mathfrak{A};E)$ mit Standarddarstellung $\varphi=\sum\limits_{w\in W} w\cdot 1_{A_w}$, so heißt

$$\int\varphi\,d\mu:=\sum_{w\in W\setminus\{0\}} w\cdot\mu(A_w)\in E$$

ihr *Integral* bezüglich μ.

Es sei beachtet, daß im allgemeinen nur $\mathcal{E}_0(X,\mathfrak{A};\mathbf{R})\subseteq\mathcal{E}(X,\mathfrak{A})$ gilt, da wir an die einfachen Funktionen $\varphi\in\mathcal{E}_0(X,\mathfrak{A};\mathbf{R})$ die zusätzliche Bedingung gestellt haben, daß $\mu(\{p\in X\mid\varphi(p)\neq 0\})<\infty$. Dadurch vermeiden wir, daß wir bei der Definition des Integrals nicht definierte Produkte der Form $v\cdot\infty$ bekommen, wobei $v\in E$.

Proposition 1.

(a) Sind φ, $\psi\in\mathcal{E}_0(X,\mathfrak{A};E)$ und ist $c\in\mathbf{K}$, so gilt

$$\int(\varphi+\psi)\,d\mu=\int\varphi\,d\mu+\int\psi\,d\mu \quad \text{und} \quad \int c\cdot\varphi\,d\mu=c\cdot\int\varphi\,d\mu.$$

(b) Ist $T\colon E\to E'$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbf{K}$-Banachräumen und ist $\varphi\in\mathcal{E}_0(X,\mathfrak{A};E)$, so ist $T\circ\varphi\in\mathcal{E}_0(X,\mathfrak{A};E')$, und es gilt

$$\int(T\circ\varphi)\,d\mu=T\Big(\int\varphi\,d\mu\Big).$$

Proposition 2. Ist $\varphi \in \mathcal{E}_0(X, \mathfrak{A}; E)$, so ist $\|\varphi\| \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$, und es gilt $\int \|\varphi\| \, d\mu < \infty$.

Beispiel 1. Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A_k) < \infty$ und sind $v_1, \ldots, v_n \in E$, so ist $\varphi \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} v_k \cdot 1_{A_k} \in \mathcal{E}_0(X, \mathfrak{A}; E)$ mit

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \cdot v_k.$$

Definition 2. Eine Funktion $f\colon X \to E$ heißt *stark* oder auch *Bochner-meßbar*, wenn es eine Folge $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{E}_0(X, \mathfrak{A}; E)$ gibt, so daß f ihr punktweiser Limes ist, d. h. $f = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$. Die Menge $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$ aller stark meßbaren Funktionen ist ein Untervektorraum des Vektorraumes aller Funktionen $X \to E$.

Proposition 3. Sei $f\colon X \to E$ eine Funktion.

(a) Ist f stark meßbar, so ist $\|f\| : X \to \mathbf{R}$ meßbar.

(b) Ist $T\colon E \to E'$ eine stetige lineare Abbildung zwischen $\mathbf{K}$-Banachräumen und ist f stark meßbar, so ist auch $T \circ f\colon X \to E'$ stark meßbar.

(c) Ist $\dim E < \infty$, so ist f genau dann stark meßbar, wenn f meßbar ist. Dies schließt insbesondere die Fälle $E = \mathbf{R}$, $E = \mathbf{C}$ oder $E = \mathbf{R}^n$ ein.

Definition 3. Sei $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$.

(a) Die „Zahl“

$$\|f\|_1 \coloneqq \int \|f\| \, d\mu \in [0, \infty]$$

heißt die L^1-*Norm* von f.

Ist $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, so sagen wir, daß sie im μ-*Mittel* gegen f konvergiert.

(b) Gilt $\|f\|_1 < \infty$, so heißt f *stark* oder *Bochner-(μ-)integrierbar*. Der Untervektorraum der stark integrierbaren Funktionen $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$ wird mit

$$\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu; E) = \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$$

bezeichnet.

Es sei beachtet, daß $\|\cdot\|_1$ trotz des Namens im allgemeinen weder eine Norm auf $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$ definiert (denn $\|f\|_1 = \infty$ ist möglich), noch auf $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$, denn $\|f\|_1 = 0$ impliziert im allgemeinen nicht $f \equiv 0$; vgl. jedoch Proposition 6.

Beispiel 2.

(a) Eine Funktion $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon X \to \mathbf{R}^n$ ist genau dann in $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; \mathbf{R}^n)$, wenn $f_k \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Es ist also insbesondere

$$\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; \mathbf{R}).$$

(b) Eine Funktion $f = u + iv\colon X \to \mathbf{C}$ mit u, $v\colon X \to \mathbf{R}$ ist genau dann in

$$\mathcal{L}^1_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A}, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; \mathbf{C}),$$

wenn u, $v \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Proposition 4. Sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$. Dann existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{E}_0(X, \mathfrak{A}; E)$ die sowohl punktweise als auch im μ-Mittel gegen f konvergiert, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_1 = 0$. Weiter dürfen wir $\|\varphi_n\| \leq 2 \cdot \|f\|$ annehmen.

Beweis. Da $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \subseteq \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$, existiert zunächst eine Folge $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{E}_0(X, \mathfrak{A}; E)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\|\varphi_n\| \leq 2\cdot\|f\|$ für alle n (ansonsten ersetzen wir φ_n durch $\varphi_n \cdot 1_A$ mit $A := \{p \in X \mid \|\varphi_n(p)\| \leq 2 \cdot \|f(p)\|\}$).

Dann gilt

$$\|\varphi_n - f\| \leq \|\varphi_n\| + \|f\| \leq 3\,\|f\|\,.$$

Nach dem Theorem über die majorisierte Konvergenz ist also

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int \|\varphi_n - f\|\, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|\, d\mu = 0. \qquad \square$$

Theorem 1. Sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$. Dann existiert genau ein Vektor $\int f\, d\mu \in E$, so daß

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\, d\mu$$

für jede Folge $(\varphi_n)_n$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{E}_0(X, \mathfrak{A}; E)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_1 = 0$.

Beweis. Sei $(\varphi_n)_n$ eine Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{E}_0(X, \mathfrak{A}; E)$ mit $\|\varphi_n\| \leq 2\,\|f\|$ für alle n, die im μ-Mittel gegen f konvergiert. Dann gilt

$$\left\|\int \varphi_n\, d\mu - \int \varphi_m\, d\mu\right\| = \left\|\int (\varphi_n - \varphi_m)\, d\mu\right\| \leq \int \|\varphi_n - \varphi_m\|\, d\mu \leq \|\varphi_n - f\|_1 + \|\varphi_m - f\|_1\,.$$

Damit ist $(\int \varphi_n\, d\mu)_n$ eine Cauchy-Folge im Banachraum E, so daß ein Vektor $\int f\, d\mu$ mit

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\, d\mu$$

existiert. Es bleibt zu zeigen, daß dieser Vektor unabhängig von der Folge ist. Dies folgt wie im Beweis vom Theorem in 8.1. $\square$

Beispiel 3.

(a) Sei $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; \mathbf{R}^n)$. Dann gilt

$$\int f\, d\mu = \Big(\int f_1\, d\mu, \ldots, \int f_n\, d\mu\Big).$$

(b) Sei $f = u + iv \in \mathcal{L}^1_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A})$ mit u, $v\colon X \to \mathbf{R}$. Dann gilt

$$\int f\, d\mu = \int u\, d\mu + i \int v\, d\mu.$$

Proposition 5.

(a) Sind f, $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}; E)$ und ist $c \in \mathbf{K}$, so gilt

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu \quad \text{und} \quad \int c \cdot f\,d\mu = c \cdot \int f\,d\mu.$$

(b) Ist $T\colon E \to E'$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbf{K}$-Banachräumen und ist $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}; E)$, so ist $T \circ f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}; E')$, und es gilt

$$\int (T \circ f)\,d\mu = T\Big(\int f\,d\mu\Big).$$

(c) Ist $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}; E)$, so gilt

$$\Big\|\int f\,d\mu\Big\| \le \int \|f\|\;d\mu.$$

Kommentar 1. Indem die naheliegenden Modifikationen durchgeführt werden (etwa, indem $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ durch $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$ und $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ durch $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ ersetzt wird), gelten unter anderem folgende Ergebnisse aus Abschnitt 15.5 auch für Banachraum-wertige Funktionen:

Korollar 1–4, Theorem 3 und 4, Proposition 2 und 3.

Wegen seiner Bedeutung sei das Theorem von Lebesgue noch einmal explizit formuliert:

Theorem 2 (Theorem von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz)**.** Sei $(f_n)_{n\ge 0}$ eine Folge stark μ-integrierbarer Funktionen $f_n\colon X \to E$ in den Banachraum E auf einem Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, die μ-fast überall gegen eine meßbare Funktion $f\colon X \to E$ konvergiert. Existiert dann eine μ-integrierbare Funktion $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, so daß

$$\forall n \in \mathbf{N}_0\colon\; \|f_n\| \le g,$$

so ist auch f eine stark μ-integrierbare Funktion, und zwar gilt

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Im folgenden wollen wir den Begriff der L^1-Norm zum Begriff der L^p-Norm mit $p \in [1, \infty[$ erweitern.

Definition 4. Sei $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$. Die „Zahl“

$$\|f\|_p := \Big(\int \|f\|^p\,d\mu\Big)^{1/p} \in [0, \infty],$$

wobei wir $\infty^{1/p} := \infty$ vereinbaren, heißt die L^p*-Norm* von f.

Wir schreiben

$$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E) := \{f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E) \mid \|f\|_p < \infty\}.$$

Funktionen in $\mathcal{L}^2(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ heißen μ*-quadratintegrierbar*.

Proposition 6. Die Abbildung $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \to \mathbf{R}$ definiert eine *Pseudonorm* auf $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$, d. h. für alle f, $g \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ und $c \in \mathbf{K}$ gilt

$$\|f\|_p \geq 0, \quad \|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p\,, \quad \text{und}\, \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p\,.$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$.

Ist $(f_n)_n$ im Falle $p = 2$ eine Folge von Funktionen mit Grenzwert $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$, so sagen wir, daß sie im *quadratischen μ-Mittel* gegen f konvergiere.

Weiterhin gilt

$$\|f\|_p = 0 \iff f \underset{\mu}{=} 0.$$

Ist daher $\mathcal{N}(X, \mathfrak{A}, \mu; E) := \{f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \mid f \underset{\mu}{=} 0\}$, so definiert

$$\|\cdot\|_p : \mathrm{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E) := \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)/\mathcal{N}(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \to \mathbf{R}, [f] \mapsto \|f\|_p$$

eine Norm auf dem Quotientenvektorraum $\mathrm{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

Die Dreiecksungleichung heißt in diesem Falle die Minkowski-*Ungleichung* und wird in dieser Form weiter unten bewiesen. Dazu benötigen wir zunächst:

Proposition 7 (Hölder-Ungleichung)**.** Sind f, $g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$ und sind p, $q \in [1, \infty[$ mit $1/p + 1/q = 1$, so gilt

$$\|\|f\| \cdot \|g\|\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q\,.$$

Zum Beweis dieser Ungleichung benötigen wir eine weitere Ungleichung:

Lemma (Youngsche Ungleichung)**.** Seien a, $b \in [0, \infty[$. Sind dann $1 \leq p, q < \infty$ reelle Zahlen mit $1/p + 1/q = 1$, so gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis der Young*schen Ungleichung.* Wir können annehmen, daß a, $b > 0$. Wegen $\exp'' > 0$ ist exp eine konvexe Funktion. Damit gilt nach Aufgabe 3(a) aus Abschnitt 9.2, daß

$$ab = e^{\ln(a)} e^{\ln(b)} = e^{\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)} \leq \frac{1}{p} e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q} e^{\ln(b^q)} = \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}. \qquad \square$$

Beweis der Hölder*schen Ungleichung.* Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\|f\|_p$, $\|g\|_q < \infty$.

Ist $\|f\|_p = 0$, so ist $f \underset{\mu}{=} 0$, also $\|f\|_1 = 0$. Wir können damit ohne Einschränkung davon ausgehen, daß $\|f\|_p > 0$ und ebenso $\|g\|_q > 0$. Indem wir gegebenenfalls f durch $f/\|f\|_p$ und g durch $g/\|g\|_q$ ersetzen, können wir weiter ohne Einschränkung davon ausgehen, daß $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Mit der Youngschen Ungleichung folgt dann

$$\|f\| \cdot \|g\| \leq \frac{\|f\|^p}{p} + \frac{\|g\|^q}{q}$$

und nach Integrieren dann

$$\|\|f\| \cdot \|g\|\|_1 \leq \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q\,. \qquad \square$$

Korollar 1. Seien p, $q \in [1, \infty[$ mit $1/p + 1/q = 1$ und $B\colon E \times E' \to F$ eine stetige bilineare (oder sesquilineare) Abbildung zwischen Banachräumen.

(a) Durch
$$\mathrm{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \to E, [f] \mapsto \int f \, d\mu$$
wird ein stetiger linearer Operator definiert.

(b) Durch
$$\mathrm{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \times \mathrm{L}^q(X, \mathfrak{A}, \mu; E') \to F, ([f], [g]) \mapsto \int B(f, g) \, d\mu$$
wird eine bilineare (bzw. sesquilineare) Abbildung definiert.

Es folgt die versprochene Formulierung und der Beweis der MINKOWSKI-Ungleichung:

Proposition 8. Seien f, $g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$, und sei $p \in [0, \infty[$. Dann gilt
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \, .$$

Beweis. Wir müssen nur noch den Fall $p > 1$ behandeln. Sei $q = 1/(1 - 1/p) = p/(p-1)$. Wir können ohne Einschränkung davon ausgehen, daß $\|f\|_p < \infty$ und $\|g\|_p < \infty$.

Da $x^p|\mathbf{R}_+$ konvex ist, gilt
$$\left\|\frac{f}{2} + \frac{g}{2}\right\|^p \leq \left(\frac{\|f\|}{2} + \frac{\|g\|}{2}\right)^p \leq \frac{\|f\|^p}{2} + \frac{\|g\|^p}{2},$$
also
$$\|f + g\|^p \leq 2^{p-1}(\|f\|^p + \|g\|^p).$$
Insbesondere folgt $\|f + g\|_p < \infty$. Weiter können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, daß $\|f + g\|_p > 0$. Indem wir gegebenenfalls f und g durch $f/\|f + g\|_p$ bzw. $g/\|f + g\|_p$ ersetzen, können wir weiter ohne Einschränkung davon ausgehen, daß $\|f + g\|_p = 1$. Es bleibt $1 \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ zu zeigen:
$$\begin{aligned}
1 = \|f + g\|_p{}^p &= \int \|f + g\|^p \, d\mu \\
&= \int \|f + g\| \cdot \|f + g\|^{p-1} \, d\mu \\
&\leq \int \|f\| \cdot \|f + g\|^{p-1} \, d\mu + \int \|g\| \cdot \|f + g\|^{p-1} \, d\mu \\
&= \left\| \|f\| \cdot \|f + g\|^{p-1} \right\|_1 + \left\| \|g\| \cdot \|f + g\|^{p-1} \right\|_1 \\
&\leq \|f\|_p \cdot \left\| \|f + g\|^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \cdot \left\| \|f + g\|^{p-1} \right\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \left(\int \|f + g\|^p \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \|f\|_p + \|g\|_p \, .
\end{aligned}$$
□

Theorem 3 (Theorem von RIESZ/FISCHER)**.** Seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, E ein Banachraum und $p \in [0, \infty[$. Der normierte Vektorraum $\mathrm{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ ist ein Banachraum.

Beweis. Es sei $([f_n])_{n\geq 0}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$. Es ist zu zeigen, daß diese in $\mathrm{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ konvergiert.

Zunächst können wir (indem wir gegebenenfalls zu einer Teilfolge übergehen), davon ausgehen, daß

$$\forall n \geq 0\colon\ \|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{-n}.$$

Für $n \geq 0$ setzen wir dann

$$g_n := \|f_0\| + \sum_{k=0}^{n-1} \|f_{k+1} - f_k\| \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}).$$

Nach der MINKOWSKI-Ungleichung gilt dann

$$\|g_n\|_p \leq \|f_0\|_p + \sum_{k=0}^{n-1} \|f_{k+1} - f_k\|_p < \|f_0\|_p + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} < \|f_0\|_p + 2.$$

Sei $g := \sup_n g_n \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$. Dann ist $(g_n^p)_n$ eine Levi-Folge, die punktweise gegen g^p konvergiert. Nach dem Satz von BEPPO LEVI gilt also

$$\int g^p \, d\mu = \sup_n \int g_n^p \, d\mu = \sup_n \|g_n\|_p{}^p \leq \left(\|f_0\|_p + 2\right)^p < \infty.$$

Es folgt, daß g^p und damit g fast überall endlich sein muß, d. h. die Folge $(\|f_0\| + \sum_{k=0}^{n-1} \|f_{k+1} - f_k\|)_n$ konvergiert fast überall. Da E ein Banachraum ist, konvergiert damit aber auch die Folge der $f_n = f_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+1} - f_k)$ fast überall, d. h. wir finden ein $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$ mit

$$f \underset{\mu}{=} \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Da

$$\|f\| \underset{\mu}{=} \lim_{n\to\infty} \|f_n\| \leq \lim_{n\to\infty} g_n = g$$

und $g \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A})$, folgt $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

Nach dem Lemma von FATOU gilt schließlich für alle $n \geq 0$, daß

$$\|f - f_n\|_p{}^p = \int \|f - f_n\|^p \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int \|f_k - f_n\|^p \, d\mu = \liminf_{k\to\infty} \|f_k - f_n\|_p{}^p \leq \left(2^{-n+1}\right)^p,$$

also $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. □

Beispiel 4. Sei $1 \leq p < \infty$.

(a) Die Räume

$$\mathrm{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu) := \mathrm{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; \mathbf{R})$$

sind reelle Banachräume.

(b) Die Räume
$$\mathrm{L}^p_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A}, \mu) := \mathrm{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; \mathbf{C})$$
sind komplexe Banachräume.

Korollar 2. Sei H ein Hilbertraum. Dann ist $\mathrm{L}^2(X, \mathfrak{A}, \mu; H)$ ein Hilbertraum bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{L}^2(X, \mathfrak{A}, \mu; H) \times \mathrm{L}^2(X, \mathfrak{A}, \mu; H) \to \mathbf{K}, ([f], [g]) \mapsto \int \langle f, g \rangle \, d\mu. \tag{2}$$

Beweis. Wegen Korollar 1(b) ist das Skalarprodukt in (2) wohldefiniert und $(\mathrm{L}^2(X, \mathfrak{A}, \mu; H), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zunächst ein Prähilbertraum. Es gilt offensichtlich

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(X, \mathfrak{A}, \mu; H) \colon \; \|[f]\|_2 = \sqrt{\langle [f], [f] \rangle}.$$

Da die Norm $\|\cdot\|_2$ nach dem Theorem von Riesz/Fischer $\mathrm{L}^2(X, \mathfrak{A}, \mu; H)$ zu einem Banachraum macht, ist damit $(\mathrm{L}^2(X, \mathfrak{A}, \mu; H), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sogar ein Hilbertraum. □

Beispiel 5. Der Banachraum $\mathrm{L}^2_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{L}^2_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A}, \mu) \times \mathrm{L}^2_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A}, \mu) \to \mathbf{K}, ([f], [g]) \mapsto \int \overline{f} \cdot g \, d\mu.$$

Aufgabe 1. Sei $K \subseteq \mathbf{R}^n$ eine kompakte Teilmenge, für die $\overline{K^o} = K$ gilt (z. B. ist jedes Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ eine derartige kompakte Teilmenge von $\mathbf{R}$). Dann ist die Einschränkung der Pseudonorm $\|\cdot\|_1$ auf den Untervektorraum $C^0(K, \mathbf{C}) \subseteq \mathcal{L}^1_{\mathbf{C}}(K, \lambda^n)$ eine Norm. Diesbezüglich ist aber $C^0(K, \mathbf{C})$ nicht vollständig. Letzteres beweise man für $n = 1$ und $K = [-1, 1]$. Aus dem Vorangegangenen folgere man: Sind f, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbf{C}}(K, \lambda^n)$ stetige Funktionen, so folgt aus $[f] = [g]$ bereits $f = g$.

Kommentar 2. Diese Aufgabe deckt einen der wesentlichen Gründe dafür auf, warum wir uns die Mühe machen, die Lebesgue-integrierbaren Funktionen einzuführen, nämlich damit wir in einem Banachraum arbeiten und somit die starken funktionalanalytischen Hilfsmittel ausnutzen können. Übrigens ist das Bild von $C^0(K, \mathbf{C})$ unter der Projektion $f \mapsto [f]$ eine dichte Teilmenge des Banachraumes $\mathrm{L}^1_{\mathbf{C}}(K, \lambda^n)$.

Aufgabe 2. Konvergiert eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ im μ-Mittel gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$, so gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Aufgabe 3. Konvergiert eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ im μ-Mittel gegen ein $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$, so braucht sie dennoch nicht μ-fast überall gegen f zu konvergieren.

(Tip: $X = [0, 1]$, $\mu = \lambda_X$, $E = \mathbf{R}$, $f_0 = 1_{[0,1]}$, $f_1 = 1_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f_2 = 1_{[\frac{1}{2},1]}$, $f_3 = 1_{[0,\frac{1}{3}]}$, $f_4 = 1_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}$, $\ldots$.)

Aufgabe 4. Es seien $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$ und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:

(a) Existiert ein $g \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ mit $f \underset{\mu}{=} g$, so ist auch $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

(b) Ist $\mu(X) < \infty$ und ist f beschränkt, so ist $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

Aufgabe 5. Sei $1 \leq p < \infty$. Es sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$, die punktweise gegen eine Funktion $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ konvergiert. Man zeige in jeder der drei folgenden Situationen, daß auch $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ ist und daß $\lim \|f_n - f\|_p = 0$.

(a) Es existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ derart, daß

$$\|f_n\|^p \leq g.$$

für alle n.

(Tip: Man beachte auch $\|f_n - f\|^p \leq 2^p \cdot g$.)

(b) Es ist $\mu(X) < \infty$, und es existiert eine Konstante $C \in \mathbf{R}_+$ mit

$$\|f_n\| \leq C$$

für alle n.

(c) Es ist $\mu(X) < \infty$ und die Konvergenz von (f_n) gegen f ist gleichmäßig.

Aufgabe 6. Sei $1 \leq p < \infty$.

(a) Ist $\mu(X) < \infty$, so gilt $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

(b) Im allgemeinen gilt weder die Inklusion $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ noch $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \subseteq \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

(Tip: $p = 2$, $X = \mathbf{R}$, $\mu = \lambda$, $E = \mathbf{R}$. Für $s \in \mathbf{R}_-$ sei $f_s \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ die triviale Fortsetzung von $x^s \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$; man betrachte nun für geeignete Intervalle $I \subseteq \mathbf{R}_+$ die Funktion $f_s \cdot 1_I \in \mathcal{M}(\mathbf{R}, \mathfrak{B}(\mathbf{R}))$.)

Aufgabe 7. In der Situation der Aufgabe 5 aus Abschnitt 15.4 ist für alle $1 \leq p < \infty$

$$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E) = \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E) \cap \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{B}, \nu; E),$$

und die Pseudonorm $\|\cdot\|_p$ von $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{B}, \nu; E)$ ist eine Fortsetzung der entsprechenden Pseudonorm von $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

(Tip: Man beachte auch Aufgabe 10 aus Abschnitt 15.5.)

15.7 Fortsetzung von Prämaßen

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist der Beweis des Theorems 1 aus Abschnitt 15.3 (wobei für den Fall $n \geq 2$ noch Ergebnisse aus Abschnitt 15.8 benötigt werden), d. h. die Konstruktion des Lebesgueschen Maßes auf dem $\mathbf{R}^n$. Wir werden jedoch das Augenmerk nicht nur auf dieses Ziel richten, da wir allgemeinere Ergebnisse, nämlich den Fortsetzungssatz von Carathéodory und den Eindeutigkeitssatz von Hahn, im folgenden Abschnitt verwenden werden.

Wie schon gesagt, ist die Grundlage des Lebesgueschen Maßes auf dem $\mathbf{R}^n$ das Volumen von Quadern $Q \subseteq \mathbf{R}^n$; vgl. Abschnitt 15.3. Nun ist die Menge der Quader weit davon entfernt, eine σ-Algebra zu sein; dies motiviert die folgende Definition:

Definition 1 (Mengen-Algebren und Prämaße)**.** Sei X eine Menge.

(a) Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ heißt eine *Algebra* (von X), wenn folgende Axiome erfüllt sind:

- (i) $\emptyset \in \mathfrak{A}$.
- (ii) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}\colon \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}$.
- (iii) $\forall A \in \mathfrak{A}\colon A^{\mathrm{c}} = X \setminus A \in \mathfrak{A}$.

(b) Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine Algebra, so heißt eine Funktion $\mu\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}$ ein *Prämaß*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii) $\mu \geq 0$.
- (iii) Ist (A_n) eine disjunkte Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$ und ist $\bigcup A_n \in \mathfrak{A}$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup A_n\Big) = \sum \mu(A_n).$$

Es sei beachtet, daß in der Folge (A_n) beliebig viele der A_n leer sein können, so daß die entsprechende Aussage insbesondere auch für endliche disjunkte Vereinigungen gilt.

Natürlich ist jede σ-Algebra erst recht eine Algebra und jedes Maß auch ein Prämaß.

Theorem 1. Sei $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathfrak{P}(\mathbf{R}^n)$ das System aller derjenigen Teilmengen $A \subseteq \mathbf{R}^n$, so daß A eine endliche (eventuell leere) disjunkte Vereinigung von Quadern ist. Dann ist $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)$ eine Algebra, und wir erhalten ein eindeutiges Prämaß $\mu_0\colon \mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n) \to \widehat{\mathbf{R}}$, so daß

$$\mu_0(Q) = \mathrm{vol}(Q)$$

für alle Quader $Q \subseteq \mathbf{R}^n$, insbesondere also

$$\mu_0(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(Q_i), \tag{1}$$

falls $A \in \mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)$ disjunkte Vereinigung der Quader $Q_1, \ldots, Q_n \subseteq \mathbf{R}^n$ ist.

Im Falle $n = 0$ ist das Theorem trivial. Im Falle $n \geq 2$ ist die Existenz der Funktion μ_0 durchaus ein Problem; und auch der Nachweis, daß es sich dabei um ein Prämaß handelt, ist nicht so leicht. Diesen Beweisteil (für $n \geq 2$) verschieben wir auf Abschnitt 15.8. Hingegen ist es in jedem Falle leicht zu beweisen, daß $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)$ eine Algebra ist.

Beweis. Wir beweisen also, daß μ_0 im Falle $n = 1$ existiert und ein Prämaß ist. Sobald wir erst einmal eine Funktion $\mu_0 \colon \mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n) \to \widehat{\mathbf{R}}$ gefunden haben, die (1) erfüllt, sind die Axiome (i) und (ii) für die Funktion μ_0 trivialerweise erfüllt. Der Beweis der Existenz von μ_0 und des Axioms (iii) wiederum reduziert auf den Nachweis der folgenden Tatsache:

> Ist ein Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ eine höchstens abzählbare, disjunkte Vereinigung von Intervallen I_i, so gilt $\ell(I) = \sum \ell(I_i)$. [1]

Sei also $I = \bigcup I_i$ eine disjunkte Vereinigung von Intervallen. Wir setzen jeweils $a_i := \inf(I_i)$ und $b_i := \inf(I_i)$. Ist $\{i_1, \ldots, i_n\}$ eine endliche Teilmenge paarweise verschiedener Indizes, so numerieren wir diese derartig um, daß

$$\forall k = 1, \ldots, n-1 \colon b_{i_k} \leq a_{i_{k+1}} \tag{2}$$

gilt. Dann folgt sofort

$$\sum_k \ell(I_{i_k}) \leq b_{i_n} - a_{i_1} \leq \sup(I) - \inf(I) = \ell(I).$$

Ist $\{i_1, \ldots, i_n\}$ die ganze Indexmenge, so sehen wir leicht, daß in dieser Ungleichungskette überall das Gleichheitszeichen stehen muß, womit die Behauptung bewiesen wäre. Wir können uns also auf den Fall beschränken, daß die Indexmenge $\mathbf{N}_0$ ist. In diesem Falle folgt durch Vergrößern der Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_n\}$ im Grenzübergang zumindest

$$\sum_{i=0}^{\infty} \ell(I_i) \leq \ell(I).$$

Es bleibt also

$$\ell(I) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \ell(I_i) \tag{3}$$

zu beweisen. Ist eines der Intervalle I_i unbeschränkt, so steht auf der rechten Seite dieser Abschätzung ∞, weswegen sie trivialerweise erfüllt ist. Also können wir uns für das folgende auf den Fall a_i, $b_i \in \mathbf{R}$ beschränken. Dazu beweisen wir für jedes Teilintervall $[a, b] \subseteq I$ und jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, daß

$$b - a \leq \varepsilon + \sum_{i=0}^{\infty} \ell(I_i). \tag{4}$$

---

[1] Bei flüchtigem Hinsehen mag man auf die Idee kommen, einen einfacheren Beweis als den folgenden dadurch führen zu können, indem man die I_i derartig numeriert, daß jeweils gilt: $\forall x \in I_i, y \in I_{i+1} \colon x < y$. Daß dies nicht geht, zeigt das folgendes Beispiel: Es sei $I :=]0,1]$ und für jedes Paar $(n,m) \in \mathbf{N}_1^2$ sei $I(n,m) :=]\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(m+1)n(n+1)}, \frac{1}{n+1} + \frac{1}{mn(n+1)}]$; dann gilt jeweils $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] = \dot{\bigcup}_{m=1}^{\infty} I(n,m)$ und somit $]0,1] = \bigcup\limits_{(n,m) \in \mathbf{N}_1^2} I(n,m)$. Nun wähle man eine Bijektion $\varphi \colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_1^2$ und setze $I_i := I(\varphi(i))$; dann ist $]0,1] = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} I_i$.

Aus diesem Ergebnis folgt die Behauptung (3) (womit der gesamte Beweis abgeschlossen ist), und zwar zunächst durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$, woraus $b - a \leq \sum_{i=0}^{\infty} \ell(I_i)$ folgt und sodann durch Grenzübergang $a \to \inf(I)$ und $b \to \sup(I)$.

Es bleibt also (4) zu beweisen. Dazu setzen wir $\varepsilon_i \coloneqq 2^{-i} \cdot \varepsilon$ und $J_i \coloneqq \,]a_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i[$ für jedes $i \in \mathbf{N}_0$. Dann ist $(J_i)_{i \in \mathbf{N}_0}$ eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge $[a, b]$. Somit gibt es eine endliche Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \mathbf{N}_0$ paarweise verschiedener Indizes, so daß bereits $[a, b] \subseteq I_{i_1} \cup \cdots \cup I_{i_n}$ gilt. Dabei können wir voraussetzen, daß die Indexmenge $\{i_1, \ldots, i_n\}$ minimal ist. Wir können die Indizes so umnumerieren, daß (2) gilt und erhalten folgende Abschätzungen

$$a_{i_1} - \varepsilon_{i_1} < a, \tag{5}$$

$$a_{i_{k+1}} - \varepsilon_{i_{k+1}} < b_{i_k} + \varepsilon_{i_k} \tag{6}$$

$$b < b_{i_n} + \varepsilon_{i_n} \tag{7}$$

für alle $k = 1, \ldots, n-1$. Wegen (6) folgt

$$b_{i_{k+1}} = (b_{i_{k+1}} - a_{i_{k+1}}) + a_{i_{k+1}} = \ell(I_{i_{k+1}}) + a_{i_{k+1}} < \ell(I_{i_{k+1}}) + b_{i_k} + \varepsilon_{i_k} + \varepsilon_{i_{k+1}},$$

also wegen (5) und (7):

$$\begin{aligned}
b &< b_{i_n} + \varepsilon_{i_n} \\
&< \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_{i_{k+1}}) + b_{i_1} + \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_{i_k} + \varepsilon_{i_{k+1}}) + \varepsilon_{i_n} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ell(I_{i_k}) + (b_{i_1} - a_{i_1}) + (a_{i_1} - \varepsilon_{i_1}) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{i_k} \\
&< \sum_{k=1}^{n} \ell(I_{i_k}) + a + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{i_k} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \ell(I_i) + a + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \ell(I_i) + a + \varepsilon,
\end{aligned}$$

womit (4) und damit die ganze Behauptung bewiesen ist. □

Proposition 1. Sei X eine Menge. Es sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine beliebige Algebra, $\mu\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}$ ein Prämaß und A, B, A_0, A_1, $A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

(a) $B \setminus A, A_0 \cap \cdots \cap A_n \in \mathfrak{A}$.

(b) $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

(c) $A \subseteq \bigcup A_n \implies \mu(A) \leq \sum \mu(A_n)$.

Beweis. **Zu (a).** $A_0 \cap \cdots \cap A_n = (A_0^{\mathrm{c}} \cup \cdots \cup A_n^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$, $B \setminus A = B \cap A^{\mathrm{c}}$.

Zu (b). $B = A \dot\cup (B \setminus A)$, also $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

Zu (c). Für $B_n := (A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k) \cap A$ ist $A = \dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} B_n$; folglich $\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_k)$ nach dem Axiom (iii) für Prämaße und nach (b). □

Definition 2 (Das äußere Maß beliebiger Teilmengen)**.** Sei X eine Menge. Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine Algebra und $\mu\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}$ ein Prämaß. Für jede Teilmenge $E \in \mathfrak{P}(X)$ heißt dann

$$\mu^*(E) := \inf\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)\Big)$$

das *äußere Maß* von E bezüglich μ; hierbei wird das Infimum über alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$ genommen, für die $E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

Die Terminologie ist insofern etwas unglücklich, als daß das äußere Maß μ im allgemeinen gar kein Maß (auf $\mathfrak{P}(X)$) ist.

Proposition 2. Sei X eine Menge. Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine Algebra und $\mu\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}$ ein Prämaß. Seien A, B, E, E_0, E_1, $E_2, \ldots \in \mathfrak{P}(X)$. Für das äußere Maß μ^* gilt dann:

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(b) $\mu^* \geq 0$.

(c) $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(d) $A \in \mathfrak{A} \implies \mu^*(A) = \mu(A)$.

(e) $\mu^*\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n)$

(f) $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$.

Beweis. **Zu (d).** Mit der Folge $(A_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$, die durch $A_0 := A$ und $A_n := \emptyset$ für $n \geq 1$ definiert ist, erhalten wir $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Ist aber $(A_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ irgendeine Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, so gilt nach Proposition 1(c), daß $\mu(A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$; also $\mu(A) \leq \mu^*(A)$.

Zu (e). Ist $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ beliebig, aber fest gewählt, so können wir nach der Definition von μ^* für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ eine Folge $(A_{n_k})_{k\in\mathbf{N}_0}$ von Mengen $A_{n_k} \in \mathfrak{A}$ derart wählen, daß

$$E_n \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n_k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_{n_k}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ist. Da die Familie $(A_{n_k})_{(n,k)\in\mathbf{N}_0^2}$ abzählbar ist und $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{(n,k)\in\mathbf{N}_0^2} A_{n_k}$ gilt, folgt aus der Definition von μ^*, daß

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big) \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_{n_k}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Da dies für jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ gilt, folgt die behauptete Ungleichung. □

Definition 3. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Algebren von Teilmengen einer Menge X, $\mu\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}$ und $\nu\colon \mathfrak{B} \to \widehat{\mathbf{R}}$ zwei Prämaße, so nennen wir ν eine *Fortsetzung* von μ, wenn $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mu = \nu|A$ gilt.

Wie schon bemerkt, ist das äußere Maß μ^* im allgemeinen kein Maß auf $\mathfrak{P}(X)$, und zwar, weil diese Funktion nicht σ-additiv sein muß. Umso bemerkenswerter ist folgendes Theorem:

Theorem 2 (Die Carathéodory-Fortsetzung eines Prämaßes)**.** Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine Algebra von Teilmengen einer Menge X, ist $\mu\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}$ ein Prämaß und $\mu^*\colon \mathfrak{P}(X) \to \widehat{\mathbf{R}}$ das von μ induzierte äußere Maß, so ist

$$\mathfrak{A}^* := \{A \in \mathfrak{P}(X) \mid \forall E \subseteq X\colon \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)\}$$

eine σ-Algebra mit $\mathfrak{A}^* \supseteq \mathfrak{A}$ und die Einschränkung $\mu^*|\mathfrak{A}^*$ ein Maß, welches das Prämaß μ fortsetzt. Das Maß $\mu^*|\mathfrak{A}^*$ heißt die *Carathéodory-Fortsetzung* von μ.

Beweis. Trivialerweise gelten für $\mathfrak{A}^*$ die Axiome (M1) und (M3) einer σ-Algebra (das sind die Axiome (i) und (iii) einer Algebra), also

$$\emptyset \in \mathfrak{A}^* \quad \text{und} \quad \forall A \in \mathfrak{A}^*\colon A^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{A}^*, \tag{8}$$

und wegen Proposition 2 die Axiome (i) und (ii) eines Prämaßes, also

$$(\mu^*|\mathfrak{A}^*)(\emptyset) = 0 \quad \text{und} \quad \mu^*|\mathfrak{A}^* \geq 0. \tag{9}$$

Als nächstes zeigen wir

$$\forall A, B \in \mathfrak{A}^*\colon A \cap B \in \mathfrak{A}^*. \tag{10}$$

Sei dazu $E \subseteq X$ vorgegeben. Für $F := E \setminus (A \cap B)$ gilt $F \cap B = (E \cap B) \setminus A$ und $F \setminus B = E \setminus B$. Da A, $B \in \mathfrak{A}^*$ folgt daher

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \setminus B), \\ \mu^*(E \cap B) &= \mu^*((E \cap B) \cap A) + \mu^*((E \cap B) \setminus A) \end{aligned}$$

und

$$\mu^*(E \setminus (A \cap B)) = \mu^*(F) = \mu^*(F \cap B) + \mu^*(F \setminus B) = \mu^*((E \cap B) \setminus A) + \mu^*(E \setminus B).$$

Durch Kombination dieser drei Gleichungen erhalten wir

$$\mu^*(E) = \mu^*((E \cap (A \cap B)) + \mu^*(E \setminus (A \cap B)),$$

womit (10) vollständig bewiesen ist. Kombinieren wir dies mit (8), so sehen wir, daß $\mathfrak{A}^*$ auch gegenüber Vereinigungsbildung abgeschlossen ist, daß $\mathfrak{A}^*$ also eine Algebra (im Sinne von Definition 1) ist.

Nun zeigen wir, daß μ^* auf $\mathfrak{A}^*$ das Axiom (iii) für Prämaße erfüllt. Wegen (9) reicht es,

$$\forall A, B \in \mathfrak{A}^*\colon \bigl(A \cap B = \emptyset \implies \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)\bigr)$$

zu beweisen. Dies folgt wegen $A \in \mathfrak{A}^*$ aus

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \setminus A) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Als nächstes zeigen wir, daß $\mathfrak{A}^*$ eine σ-Algebra ist, und daß $\mu^*|\mathfrak{A}^*$ sogar σ-additiv ist. Dazu seien $(A_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ eine *disjunkte* Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}^*$ und $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. Aus dem Vorherigen wissen wir, daß $B_n := \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} A_k \in \mathfrak{A}^*$, also:

$$\forall E \subseteq X\colon \mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \setminus B_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \setminus B_n). \tag{11}$$

Wegen $B_n \subseteq A$ ist $E \setminus A \subseteq E \setminus B_n$; lassen wir in (11) daher $n \to \infty$ gehen, so erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E). \tag{12}$$

Weiter folgt mit Proposition 2(e) und (f), daß

$$\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) \tag{13}$$

und

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A). \tag{14}$$

Mit (12), (13) und (14) schließen wir

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \setminus A).$$

Einerseits ist daher $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n = A \in \mathfrak{A}^*$. Andererseits folgt durch Einsetzen von $E = A$ sofort die σ-Additivität

$$\mu^*(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Da wir aber oben vorausgesetzt haben, daß es sich bei $(A_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ um eine disjunkte Folge handelt, haben wir noch nicht das Axiom (M2) für σ-Algebren nachgewiesen. Sei daher jetzt $(B_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ eine beliebige Folge in $\mathfrak{A}^*$. Dann gilt $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ mit $A_n := B_n \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} B_k \in \mathfrak{A}^*$; da die Folge $(A_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ disjunkt ist, folgt mit dem Vorangegangenen $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathfrak{A}^*$. Also ist $\mathfrak{A}^*$ tatsächlich eine σ-Algebra.

Schließlich beweisen wir $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^*$: Sei dazu $A \in \mathfrak{A}$ und $E \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ vorgegeben. Wir wählen dann eine Folge $(A_n)_{n\geq 0}$ von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$ derart, daß

$$E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \subseteq \mu^*(E) + \varepsilon \tag{15}$$

gilt. Da $E \cap A \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (A_n \cap A)$ und $E \setminus A \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (A_n \setminus A)$ ist, folgt mit Proposition 2(d) und (e), daß

$$\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mu^*(A_n \cap A)}_{=\mu(A_n \cap A)} \quad \text{und} \quad \mu^*(E \setminus A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mu^*(A_n \setminus A)}_{=\mu(A_n \setminus A)}.$$

Folglich erhalten wir mit (15), daß

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ beliebig war, gilt damit sogar $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E)$. Wegen Proposition 2(e) haben wir damit sogar die Gleichheit $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E)$, womit $A \in \mathfrak{A}^*$ bewiesen ist. □

Theorem 3 (Eindeutigkeitssatz von Hahn)**.** In der Situation von Theorem 2 seien eine weitere σ-Algebra $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}^*$ und eine weiteres Maß $\nu \colon \mathfrak{B} \to \widehat{\mathbf{R}}$ gegeben, welches das Prämaß μ fortsetzt. Ist μ ein σ-endliches Prämaß, d. h. existiert eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$ mit $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ und $\forall n \in \mathbf{N}_0 \colon \mu(A_n) < \infty$, so ist μ^* eine Fortsetzung von ν.

Dieses Ergebnis läßt sich natürlich insbesondere auf $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^*$ anwenden, womit gesagt ist, daß die Fortsetzung von μ auf die σ-Algebra $\mathfrak{A}^*$ eindeutig ist.

Beweis. Zunächst gilt

$$\forall B \in \mathfrak{B} \colon \nu(B) \leq \mu^*(B); \tag{16}$$

ist nämlich (A'_n) irgendeine Folge von Mengen $A'_n \in \mathfrak{A}$ mit $B \subseteq \bigcup A'_n$, so ist $\bigcup A'_n \in \mathfrak{B}$ und

$$\nu(B) \leq \nu\big(\bigcup A'_n\big) \leq \sum \nu(A'_n) = \sum \mu(A'_n),$$

woraus (16) folgt.

Als nächstes beweisen wir

$$\forall B \in \mathfrak{B}\, \forall A \in \mathfrak{A} \colon \big(\mu(A) < \infty \implies \nu(A \cap B) = \mu^*(A \cap B)\big) : \tag{17}$$

Da $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathfrak{B}$, gilt wegen (16) sowohl

$$\nu(A \cap B) \leq \mu^*(A \cap B) \quad \text{als auch} \quad \nu(A \setminus B) \leq \mu^*(A \setminus B).$$

Wegen der Additivität von μ^* und ν ist andererseits

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) = \mu^*(A) = \mu(A) = \nu(A) = \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B).$$

Wegen $\mu(A) < \infty$ folgt hieraus insbesondere (17).

Dieses Ergebnis wenden wir nun auf die A_n des zu beweisenden Satzes an. Dabei dürfen wir annehmen, daß (A_n) eine monoton wachsende Folge von Mengen ist (andernfalls gehen wir zur Folge (A'_n) mit $A'_n := \bigcup_{k \leq n} A_k$ über). Nach Proposition 2(a) aus Abschnitt 15.3 folgt dann wegen (17), daß

$$\nu(B) = \lim_{n\to\infty} \nu(B \cap A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(B \cap A_n) = \mu^*(B)$$

für alle $B \in \mathfrak{A}^*$. □

Theorem 4 (Die kleinste Fortsetzung eines Prämaßes)**.** Es sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine Algebra von Teilmengen einer Menge X, $\mu_0 \colon \mathfrak{A}_0 \to \widehat{\mathbf{R}}$ ein Prämaß und $\mu_0^*|\mathfrak{A}_0^*$ die Carathéodory-Fortsetzung von μ_0. Dann liegt die von $\mathfrak{A}_0$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}_0^*$ und $\mu := \mu_0^*|\mathfrak{A}$ ist ein Maß. Schließlich ist $N \subseteq X$ genau dann eine Nullmenge des Maßraumes $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}_0$ existiert, so daß

$$N \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \varepsilon. \tag{18}$$

Beweis. Die Inklusion $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_0^*$ ist nach Definition von $\mathfrak{A}$ klar; weil $\mu_0^* | \mathfrak{A}_0^*$ ein Maß ist, ist natürlich auch die Restriktion $\mu := \mu_0^* | \mathfrak{A}$ ein Maß.

Es bleibt also die Charakterisierung der Nullmengen von $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ zu beweisen:

Ist etwa $N \subseteq X$ eine μ-Nullmenge, so existiert ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $N \subseteq A$ und $\mu(A) = \mu_0^*(A) = 0$. Nach Definition des äußeren Maßes folgt die Existenz einer Folge $(A_n)_{n \geq 0}$ mit $A_n \in \mathfrak{A}_0$, so daß (18) für A anstelle von N gilt. Dann ist (18) trivialerweise aber auch für N erfüllt.

Nehmen wir umgekehrt an, daß (18) für ein $N \subseteq X$ und jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ gilt. Demnach gibt es jeweils eine Teilmenge $B_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ (nämlich $\bigcup A_n$), so daß $N \subseteq B_\varepsilon$ und $\mu(B_\varepsilon) = \mu_0^*(B_\varepsilon) < \varepsilon$ gilt. Setzen wir $A := \liminf\limits_{n \to \infty} B_{\frac{1}{n}}$ (vgl. Aufgabe 2(b) aus Abschnitt 15.1), so ist $N \subseteq A$, $A \in \mathfrak{A}$ und $0 \leq \mu(A) \leq \liminf\limits_{n \to \infty} \mu(B_{\frac{1}{n}}) = 0$ nach Aufgabe 2(a) aus Abschnitt 15.3; also $\mu(A) = 0$. Damit ist N als μ-Nullmenge erkannt. □

Im Theorem 1 haben wir die Algebra $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)$ und ein Prämaß $\mu_0 \colon \mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n) \to \widehat{\mathbf{R}}$ eingeführt. Da die Algebra $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)$ die Borel-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$ erzeugt, brauchen wir, um das Theorem 1 aus Abschnitt 15.3 zu erhalten, auf diese Situation nur das Theorem 4 dieses Abschnitts anzuwenden, und $\lambda^n := \mu_0^* | \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$ zu setzen. Das hier auftauchende äußere Maß μ_0^* wird das *äußere Lebesguesche Maß* des $\mathbf{R}^n$ genannt. Die Eindeutigkeit von λ^n folgt aus dem Eindeutigkeitssatz von Hahn.

Wohlgemerkt, noch ist der Beweis des Theorems 1 aus Abschnitt 15.3 lückenhaft, da wir noch nicht nachgewiesen haben, daß μ_0 für $n \geq 2$ ein wohldefiniertes Prämaß auf $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)$ ist. Dies holen wir, wie versprochen, im nächsten Abschnitt nach.

Kommentar. Es könnte die Frage auftauchen, warum wir das Lebesguesche Maß nur auf der Borel-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$ betrachten; wir hätten doch auch die umfassendere Carathéodory-Fortsetzung $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)^*$ wählen können. Wer interessiert ist, möglichst viele meßbare Mengen zur Verfügung zu haben und möglichst viele Funktionen integrieren zu können, der kann durchaus zur Carathéodory-Fortsetzung $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)^*$ übergehen. Er gerät dadurch nicht in Widerspruch zu unserem Standpunkt, wie die Aufgabe 5 aus Abschnitt 15.4, die Aufgabe 10 aus Abschnitt 15.5 und die Aufgabe 7 aus Abschnitt 15.6 zeigen. Wir werden aber mit der Borel-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$ auskommen; unser wesentliches Ziel haben wir damit ja erreicht: wir haben schlagkräftige Konvergenzsätze und der Raum (der Restklassen) integrierbarer bzw. quadratintegrierbarer Funktionen ist ein Banach- bzw. ein Hilbertraum.

Es sollte schon darauf hingewiesen werden, daß eine gewisse Fortsetzung des Maßes λ^n sinnvoll wäre, und zwar deswegen, weil nicht jede Lebesguesche Nullmenge eine Borel-Menge ist. Dieser Mangel läßt sich durch eine kanonische Fortsetzung des Maßes λ^n beheben, die sogenannte *Vervollständigung* von λ^n.

Aufgabe 1 (Translationsinvarianz des Lebesgueschen Maßes)**.** Das Lebesguesche Maß des $\mathbf{R}^n$ ist translationsinvariant, d. h.: Ist $v \in \mathbf{R}^n$ ein Vektor, $T \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, p \mapsto p + v$

die Translation um v und $A \subseteq \mathbf{R}^n$ eine Borel-meßbare Menge A, so ist $T(A)$ ebenfalls Borel-meßbar mit $\lambda^n(T(A)) = \lambda^n(A)$.

(Tip: Translationsinvarianz von $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$; Translationsinvarianz des äußeren Lebesgueschen Maßes; Translationsinvarianz von $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)^*$; usw.)

Aufgabe 2 (Eine nicht-borelsche Teilmenge von $\mathbf{R}$)**.** Auf $\mathbf{R}$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$a \sim b :\Longleftrightarrow b - a \in \mathbf{Q}.$$

(Betrachten wir $\mathbf{R}$ als Vektorraum über dem Körper $\mathbf{Q}$, so sind die Äquivalenzklassen bezüglich der soeben definierten Äquivalenzrelation gerade die Elemente des Quotientenvektorraumes $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$, also die affinen Unterräume $a + \mathbf{Q}$, $a \in \mathbf{R}$.) Aufgrund des Auswahlaxioms existiert eine Teilmenge $E \subseteq [0,1]$ mit

$$\forall a \in \mathbf{R}\, \exists! b \in E\colon a \sim b.$$

Die abzählbare Teilmenge $[-1,1] \cap \mathbf{Q}$ werde vermittels einer (injektiven) Abzählung $n \mapsto r_n$ durchnumeriert, also

$$[-1,1] \cap \mathbf{Q} = \{r_n \mid n \in \mathbf{N}_0\}.$$

Wir setzen $E_n := r_n + E$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ und $F := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$.

Man zeige:

(a) $\forall a, b \in E\colon (a \sim b \implies a = b)$.

(b) $(E_n)_{n \geq 0}$ ist eine Folge paarweise disjunkter Mengen.

(c) $[0,1] \subseteq F \subseteq [-1,2]$.

(d) Für das äußere Lebesguesche Maß μ_0^* gilt $1 \leq \mu_0^*(F) \leq 3$.

Aus (b) und (d) leite man her, daß E keine Borel-Menge sein kann. (Sie kann nicht einmal ein Element der Carathéodory-Fortsetzung $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R})^*$ sein.)

Aufgabe 3 (Regularität des Lebesgueschen Maßes)**.** Es sei $A \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$. Man beweise:

(a) Es ist A *von außen regulär*, d. h. zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert eine offene Teilmenge $G \subseteq \mathbf{R}^n$, so daß

$$A \subseteq G \quad \text{und} \quad \lambda^n(G) \leq \lambda^n(A) + \varepsilon.$$

(Tip: Man arbeite mit dem äußeren Maß μ_0^* und konstruiere G als Vereinigung endlich vieler offener Quader.)

(b) Ist die Menge A beschränkt, so ist sie *von innen regulär*, d. h. zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbf{R}^n$, so daß

$$K \subseteq A \quad \text{und} \quad \lambda^n(A) \leq \lambda^n(K) + \varepsilon.$$

(Tip: Es sei $C \subseteq \mathbf{R}^n$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbf{R}^n$ mit $A \subseteq C$. Dann ist $B := C \setminus A$ eine beschränkte Menge, auf die sich (a) anwenden läßt; nun betrachte man $K := C \setminus G$ und überlege $A \setminus K \subseteq G \setminus B$.)

Aufgrund der hier beschriebenen Situation ist λ^n ein sogenanntes *reguläres Maß*.

Theorem 5 (Dichte-Satz)**.** Seien $G \subseteq \mathbf{R}^n$ eine offene Teilmenge und E ein $\mathbf{K}$-Banachraum. Wir bezeichnen mit $C_c^\infty(G, E)$ den $\mathbf{K}$-Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f\colon G \to E$ mit *kompaktem Träger*. Dabei hat eine Funktion $f\colon G \to E$ kompakten Träger, wenn eine kompakte Teilmenge $K \subseteq G$ mit $f|(G \setminus K) \equiv 0$ existiert.

Dann liegt für jedes $p \in [1, \infty[$ der Vektorraum $C_c^\infty(G, E)$ in $\mathcal{L}^p(G, \lambda^n; E)$ dicht, d. h. $C_c^\infty(G, E) \subseteq \mathcal{L}^p(G, \lambda^n; E)$ und zu jeder Funktion $f \in \mathcal{L}^p(G, \lambda^n; E)$ existiert eine Folge (f_k) von Funktionen $f_k \in C_c^\infty(G, E)$, so daß $\lim \|f_k - f\|_p = 0$.

Infolgedessen kann jeweils $\mathrm{L}^p(G, \lambda^n; E)$ als die Vervollständigung des normierten Raumes $(C_c^\infty(G, E), \|\cdot\|_p)$ betrachtet werden.

Die folgende beiden Aufgaben liefern einen Beweis für den Dichtesatz.

Aufgabe 4. Seien $K \subseteq \mathbf{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $G \in \mathfrak{U}^o(K, \mathbf{R}^n)$ eine offene Umgebung von K in $\mathbf{R}^n$. Dann existiert eine „Höckerfunktion“ $\varphi \in C_c^\infty(G, \mathbf{R})$ mit $0 \le \varphi \le 1$ und $\varphi|K \equiv 1$.

(Tip: Wir verwenden die euklidische Norm auf dem $\mathbf{R}^n$. Es existiert eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften $f|]-\infty, 0] \equiv 0$ und $f|]0, \infty[> 0$; vgl. die Aufgabe aus Abschnitt 9.5. Die Funktion

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

ist beliebig oft differenzierbar und erfüllt $0 \le g \le 1$, $g|]-\infty, 0] \equiv 0$ und $g|[1, \infty[\equiv 1$. Für $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ ist die Funktion

$$h_\varepsilon\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, p \mapsto g\Big(2 - \frac{\|p\|_2}{\varepsilon}\Big)$$

beliebig oft differenzierbar und erfüllt $0 \le h_\varepsilon \le 1$, $h_\varepsilon|(\mathbf{R}^n \setminus U_{2\varepsilon}(0)) \equiv 0$ und $h_\varepsilon|U_\varepsilon(0) \equiv 1$. Für jedes $p \in K$ wähle man ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $U_{3\varepsilon}(p) \subseteq G$ und setze $U_p := U_\varepsilon(p)$ und $\psi_p := h_\varepsilon(x-p)$. Es existiert eine endliche Teilmenge $I \subseteq K$, so daß $K \subseteq \bigcup_{p \in I} U_p$. Schließlich setze man $\psi := \sum_{p \in I} \psi_p$ und betrachte $\varphi := g \circ \psi|G$.)

Aufgabe 5. Seien $G \subseteq \mathbf{R}^n$ eine offene Teilmenge und E ein $\mathbf{K}$-Banachraum.

(a) Sei $\varphi \in \mathcal{E}_0(G, \mathfrak{B}(G), \lambda^n; E)$ eine einfache Funktion mit $\varphi|(G \setminus A) \equiv 0$ für eine beschränkte meßbare Teilmenge $A \subseteq G$. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ ein $f \in C_c^\infty(G; E)$ mit $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$.

(Tip: Aufgabe 3(b).)

(b) Man folgere Theorem 5.

(Tip: Sei $f \in \mathcal{L}^p(G, \mathfrak{B}(G), \lambda^n; E)$. Sei $(\varphi_n)_{n \ge 0}$ eine Folge einfacher Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{E}_0(G, \mathfrak{B}(G), \lambda^n; E)$ mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_p = 0$. Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n \cdot 1_{K_n} - f\|_p = 0$, wenn $(K_n)_{n \ge 0}$ eine monotone Folge kompakter Teilmengen $K_n \subseteq \mathbf{R}^n$ mit $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n = \mathbf{R}^n$ ist.)

15.8 Produkte von Maßen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst das Produkt zweier meßbarer Räume einführen, sodann das Produkt zweier Maße konstruieren und zeigen, daß sich Funktionen bezüglich eines Produktmaßes integrieren lassen können, indem sie bezüglich der einzelnen Faktoren iteriert integriert werden. Nebenbei diskutieren wir den besonders wichtigen Fall der Produkte Lebesguescher Maße.

Im diesem Abschnitt seien $(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{B})$ zwei meßbare Räume.

Definition 1. Die Mengen $A \times B$ mit $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{B}$ nennen wir *meßbare Rechtecke* von $X \times Y$. Sei $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0 \subseteq \mathfrak{P}(X \times Y)$ das System aller derjenigen Teilmengen $E \subseteq X \times Y$, so daß E eine endliche (eventuell leere) Vereinigungen derartiger Rechtecke ist. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(X \times Y)$ die von $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0$ erzeugte σ-Algebra. Diese σ-Algebra nennen wir das *Produkt* der σ-Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Proposition 1. Das System $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0$ ist eine Algebra von Teilmengen von $X \times Y$, und jedes Element $E \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0$ ist eine endliche (eventuell leere) *disjunkte* Vereinigung meßbarer Rechtecke von $X \times Y$.

Beweis. Seien A_1, $A_2 \in \mathfrak{A}$ und B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$. Dann gilt

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \tag{1}$$

und

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)). \tag{2}$$

Wegen (1) ist der Durchschnitt zweier meßbarer Rechtecke wieder ein meßbares Rechteck. Wegen (2) ist die Differenz zweier meßbarer Rechtecke disjunkte Vereinigung höchstens zweier meßbarer Rechtecke; insbesondere also ein Element von $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0$. Daraus folgt für alle E, $F \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0$, daß $E \cap F$, $E \setminus F \in (\mathfrak{A} \otimes B)_0$. Da trivialerweise $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0$ gegenüber Vereinigungen abgeschlossen ist und $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$, $X \times Y \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0$, ist $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0$ eine Algebra.

Es bleibt zu zeigen, daß eine Vereinigung $E = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \times B_k)$ meßbarer Rechtecke $A_k \times B_k$ als Vereinigung paarweise disjunkter Rechtecke geschrieben werden kann. Wir beweisen diese Aussage durch vollständige Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial. Gelte sie also für n. Wir wollen sie dann für eine Vereinigung von $n + 1$ meßbaren Rechtecken der Form

$$E = \Big(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \times B_k)\Big) \cup (A \times B) \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0$$

zeigen. Unter Verwendung der Induktionsannahme existiert zunächst eine Darstellung der Form $\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \times B_k) = \dot{\bigcup}_{j=1}^{m} Q_j$, wobei die Q_j paarweise disjunkte meßbare Rechtecke in $X \times Y$ sind. Wegen $C \cup D = (C \setminus D) \dot{\cup} D$ für je zwei Mengen C und D erhalten wir

$$E = \Big(\bigcup_{k=1}^{m} (Q_k \setminus (A \times B))\Big) \dot{\cup} (A \times B),$$

wobei jede Menge $Q_k \setminus (A \times B)$ wegen (2) jeweils eine disjunkte Vereinigung höchstens zweier meßbarer Rechtecke ist. $\square$

Proposition 2. Seien $X = \mathbf{R}^n$ und $Y = \mathbf{R}^m$.[2] Dann gilt

$$\mathfrak{B}(X) \otimes \mathfrak{B}(Y) = \mathfrak{B}(X \times Y).$$

Beweis. Seien $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offene Mengen in X bzw. Y. Damit ist $U \in \mathfrak{B}(X)$ und $V \in \mathfrak{B}(Y)$, also $U \times V \in (\mathfrak{B}(X) \otimes \mathfrak{B}(Y))_0 \subseteq \mathfrak{B}(X) \otimes \mathfrak{B}(Y)$. Da jede offene Teilmenge in $X \times Y$ eine höchstens abzählbare Vereinigung offener Teilmengen der Form $U \times V$ ist und $\mathfrak{B}(X) \otimes \mathfrak{B}(Y)$ eine σ-Algebra ist, folgt $\mathfrak{B}(X \times Y) \subseteq \mathfrak{B}(X) \otimes \mathfrak{B}(Y)$.

Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, definieren wir für jede Borel-meßbare Menge $A \in \mathfrak{B}(X)$ und jede offene Menge $B \in \mathfrak{T}(Y)$ die Mengensysteme

$$\mathfrak{A}(A) \coloneqq \{B' \in \mathfrak{B}(Y) \mid A \times B' \in \mathfrak{B}(X \times Y)\} \subseteq \mathfrak{B}(Y)$$

und

$$\mathfrak{A}(B) \coloneqq \{A' \in \mathfrak{B}(X) \mid A' \times B \in \mathfrak{B}(X \times Y)\} \subseteq \mathfrak{B}(X).$$

Diese Mengen sind σ-Algebren, wie sich schnell überlegen läßt.

Da $B \subseteq Y$ offen ist, ist $\mathfrak{T}(X) \subseteq \mathfrak{A}(B)$ nach Definition der Produkttopologie auf $X \times Y$. Nach Definition der Borel-Algebra auf X folgt $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{A}(B)$.

Da $A \in \mathfrak{B}(X)$ folgt damit $B \in \mathfrak{A}(A)$ für alle $B \in \mathfrak{T}(Y)$, also $\mathfrak{T}(Y) \subseteq \mathfrak{A}(A)$. Nach Definition der Borel-Algebra auf Y also $\mathfrak{B}(Y) \subseteq \mathfrak{A}(A)$.

Da dies für jedes $A \in \mathfrak{B}(X)$ gilt, folgt

$$\forall (A, B) \in \mathfrak{B}(X) \times \mathfrak{B}(Y) \colon A \times B \in \mathfrak{B}(X \times Y).$$

Dies gilt dann aber auch für die von diesen meßbaren Rechtecken erzeugte σ-Algebra, also $\mathfrak{B}(X) \otimes \mathfrak{B}(Y) \subseteq \mathfrak{B}(X \otimes Y)$. □

Definition 2. Sei $E \subseteq X \times Y$. Für $(p_0, q_0) \in X \times Y$ heißt

$$E(p_0) \coloneqq \{q \in Y \mid (p_0, q) \in E\}$$

der p_0-*Schnitt* und

$$E^{-1}(q_0) \coloneqq \{p \in X \mid (p, q_0) \in E\}$$

der q_0-*Schnitt* von E.

Im Falle, daß E der Graph einer Funktion $f \colon X \to Y$ ist, ist $E(p_0) = f(\{p_0\})$ und $E^{-1}(q_0) = f^{-1}(\{q_0\})$. Dies begründet unsere Nomenklatur.

Proposition 3. Es seien $(p, q) \in X \times Y$ und $(Z, \mathfrak{C})$ ein weiterer meßbarer Raum. Dann gilt:

(a) Für alle $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ist $E(p) \in \mathfrak{B}$ und $E^{-1}(q) \in \mathfrak{A}$.

[2] Wie aus dem Beweis ersichtlich, reicht es, anzunehmen, daß X und Y jeweils das *zweite Abzählbarkeitsaxiom* erfüllen, d. h. es existieren höchstens abzählbare Systeme $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ offener Teilmengen von X bzw. Y, so daß jede offene Teilmenge von X bzw. Y als Vereinigung von Mengen in $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{V}$ geschrieben werden können.

(b) Für jede meßbare Abbildung $f\colon (X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}) \to (Z, \mathfrak{C})$ sind auch die Abbildungen $f_x\colon (Y, \mathfrak{B}) \to (Z, \mathfrak{C})$ und $f^y\colon (X, \mathfrak{A}) \to (Z, \mathfrak{C})$ meßbar (für die Bezeichnungen f_p, f^q vgl. Abschnitt 8.11).

Beweis. Es ist $\mathfrak{S} := \{E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \mid \forall p \in X\colon E(p) \in \mathfrak{B}\}$ eine σ-Algebra, die jedes meßbare Rechteck in $X \times Y$ enthält. Daher ist $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{S}$, woraus die erste Aussage von (a) folgt. Die zweite Aussage von (a) folgt aus Symmetriegründen.

Ist $C \subseteq Z$ und $E := f^{-1}(C)$, so ist $f_p^{-1}(C) = E(p)$, und eine entsprechende Aussage gilt für $(f^q)^{-1}(C)$. Daher folgt (b) aus (a). □

Definition 3. Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ heißt *monotone Klasse* in X, falls für jede monoton wachsende Folge (E_n) von Mengen $E_n \in \mathfrak{K}$ auch $\bigcup E_n \in \mathfrak{K}$ gilt und für jede monoton fallende Folge (E_n) von Mengen $E_n \in \mathfrak{K}$ auch $\bigcap E_n \in \mathfrak{K}$ gilt.

Proposition 4. Sei $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{P}(X \times Y)$ eine monotone Klasse mit $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0 \subseteq \mathfrak{K}$. Dann folgt schon $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{K}$.

Die Proposition ergibt sich aus folgendem allgemeinen Lemma:

Lemma. Sei X eine Menge. Ist $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein Mengensystem, so existiert eine kleinste monotone Klasse $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ mit $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{S}$. Für diese monotone Klasse gilt $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$. Ist $\mathfrak{S}$ bereits eine Algebra, so gilt $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$.

Beweis. Da $\mathfrak{P}(X)$ trivialerweise eine monotone Klasse ist, folgt durch Durchschnittsbildung aller $\mathfrak{S}$ enthaltenden monotonen Klassen in X die Existenz einer kleinsten derartigen monotonen Klasse $\mathfrak{K}$. Da jede σ-Algebra eine monotone Klasse ist, gilt zudem $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$.

Es sei nun $\mathfrak{S}$ als Algebra vorausgesetzt. Für jede Menge $E \in \mathfrak{K}$ ist dann das Mengensystem

$$\mathfrak{K}(E) := \{F \in \mathfrak{K} \mid E \cap F, E \setminus F, F \setminus E \in \mathfrak{K}\}$$

eine monotone Klasse. Außerdem gilt offensichtlich:

$$\forall F \in \mathfrak{K}(E)\colon E \in \mathfrak{K}(F). \tag{3}$$

Wir zeigen als nächstes, daß

$$\forall E \in \mathfrak{S}\colon \mathfrak{K}(E) = \mathfrak{K}: \tag{4}$$

Sei also $E \in \mathfrak{S}$. Da $\mathfrak{S}$ eine Algebra ist, folgt $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{K}(E)$ nach Definition; wegen der Minimalität von $\mathfrak{K}$ impliziert dies $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}(E)$, also (4), da trivialerweise $\mathfrak{K}(E) \subseteq \mathfrak{K}$.

Ist $F \in \mathfrak{K}$, so folgt aus (4) und (3), daß $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{K}(F)$ und wegen der Minimalität von $\mathfrak{K}$ wieder $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}(F)$, also

$$\forall F \in \mathfrak{K}\colon \mathfrak{K}(F) = \mathfrak{K}. \tag{5}$$

Wegen $X \in \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{K}$ und (5) folgt, daß $\mathfrak{K}$ eine Algebra ist. Da $\mathfrak{K}$ gleichzeitig eine monotone Klasse ist, ist $\mathfrak{K}$ sogar eine σ-Algebra. Aufgrund der Minimalität von $\mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ folgt $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{K}$. □

Von nun an seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume (vgl. Definition 1 aus Abschnitt 15.3).

Theorem 1. Für $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ seien die Abbildungen

$$s_E \colon X \to \widehat{\mathbf{R}}, p \mapsto \nu(E(p))$$

und

$$s^E \colon Y \to \widehat{\mathbf{R}}, q \mapsto \mu(E^{-1}(q))$$

definiert. Dann gilt $s_E \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ und $s^E \in \widehat{\mathcal{M}}^+(Y, \mathfrak{B})$ mit

$$\int s_E \, d\mu = \int s^E \, d\nu.$$

Für die Wohldefiniertheit der Funktionen s_E und s^E sei Proposition 3 beachtet.

Beweis. Sei $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ das System aller derjenigen Mengen $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, welche die Aussage des Theorems erfüllen. Wir beweisen jetzt der Reihe nach:

(a) Jedes meßbare Rechteck $Q = A \times B$ von $X \times Y$ gehört zu $\mathfrak{S}$.

(b) Ist (E_n) eine monoton wachsende Folge von Mengen $E_n \in \mathfrak{S}$, so ist auch $E := \bigcup E_n \in \mathfrak{S}$.

(c) Ist (F_n) eine disjunkte Folge von Mengen $F_n \in \mathfrak{S}$, so ist auch $F := \bigcup F_n \in \mathfrak{S}$.

(d) Ist $(E_n)_{n \geq 0}$ eine monoton fallende Folge von Mengen $E_n \in \mathfrak{S}$ und existiert ein meßbares Rechteck $Q = A \times B$ mit $E_0 \subseteq Q$ und $\mu(A)$, $\mu(B) < \infty$, so ist auch $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathfrak{S}$.

(e) $\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

Zu den einzelnen Behauptungen:

Zu (a). Es ist jeweils

$$Q(p) = \begin{cases} B & \text{falls } p \in A, \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$

also $s_Q = \nu(B) \cdot 1_A \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$. Entsprechend ist $s^Q = \mu(A) \cdot 1_B \in \widehat{\mathcal{M}}^+(Y, \mathfrak{B})$. Damit folgt $\int s_Q \, d\mu = \mu(A) \cdot \nu(B) = \int s^Q \, d\nu$.

Zu (b). Für jedes $p \in X$ ist $(E_n(p))$ ebenfalls eine monoton wachsende Folge und $E(p) = \bigcup E_n(p)$; daher ist (s_{E_n}) eine Levi-Folge meßbarer Funktionen, die wegen Proposition 2(a) aus Abschnitt 15.3 gegen s_E konvergiert. Folglich ist $s_E \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ (vgl. das Theorem aus Abschnitt 15.2) und $\int s_E \, d\mu = \lim \int s_{E_n} \, d\mu$ (vgl. den Konvergenzsatz von Beppo Levi aus Abschnitt 15.4). Entsprechend folgt $s^E \in \widehat{\mathcal{M}}^+(Y, \mathfrak{B})$ und $\int s^E \, d\nu = \lim \int s^{E_n} \, d\nu$. Wegen $E_n \in \mathfrak{S}$ folgt daher auch $\int s_E \, d\mu = \int s^E \, d\mu$.

Zu (c). Die Folge (E_n) der Mengen $E_n := \dot{\bigcup\limits_{k \leq n}} F_k$ ist monoton wachsend und $F = \bigcup F_n = \bigcup E_n$. Daher folgt nach (b), daß $F \in \mathfrak{S}$, weil jeweils $E_n \in \mathfrak{S}$. Und letzteres beweisen wir durch vollständige Induktion. Die Induktionsverankerung ist klar; für den Induktionsschritt müssen wir lediglich zeigen: Sind E, $F \in \mathfrak{S}$ zwei disjunkte Mengen, so ist auch $E \cup F \in \mathfrak{S}$. Dazu sei beachtet: Es ist jeweils $(E \cup F)(p) = E(p) \dot{\cup} F(p)$ und daher $s_{E \cup F} = s_E + s_F \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$; entsprechend folgt $s^{E \cup F} = s^E + s^F \in \widehat{\mathcal{M}}^+(Y, \mathfrak{B})$; dies impliziert $E \cup F \in \mathfrak{S}$.

Zu (d). Diese Behauptung läßt sich analog zu (b) beweisen, wobei anstatt des Konvergenzsatzes von Beppo Levi der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz aus Abschnitt 15.5 benutzt wird. Z. B. wird $|s_{E_n}| \leq s_Q = \nu(B) \cdot 1_A \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ benutzt; die letzte Inklusion gilt wegen $\mu(A)$, $\nu(B) < \infty$.

Zu (e). Wir können $X = \dot{\bigcup} A_n$ und $Y = \dot{\bigcup} B_m$ mit $A_n \in \mathfrak{A}$, $B_m \in \mathfrak{B}$ und $\mu(A_n)$, $\nu(B_m) < \infty$ schreiben, da die Maßräume $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ nach Voraussetzung σ-endlich sind. Sodann definieren wir für alle $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ und alle (n, m) die Mengen

$$E_{nm} := E \cap (A_n \times B_m) \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}.$$

Weiter setzen wir

$$\mathfrak{K} := \{E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \mid \forall n, m \colon E_{nm} \in \mathfrak{S}\}.$$

Wegen (b) und (d) ist $\mathfrak{K}$ eine monotone Klasse, für die wegen (a) und (c) gilt, daß $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0 \subseteq \mathfrak{K}$. Daher ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ nach Proposition 4.

Für jedes $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ gilt daher $E_{nm} \in \mathfrak{S}$ für alle (n, m); mit (c) folgt somit $E = \dot{\bigcup} E_{nm} \in \mathfrak{S}$. □

Theorem 2. Die Funktion

$$\mu \otimes \nu \colon \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \to \widehat{\mathbf{R}}, E \mapsto \int \nu(E(p))\, d\mu(p) = \int \mu(E^{-1}(q))\, d\nu(q) \tag{6}$$

ist ein Maß (vgl. Theorem 1), das sogenannte *Produkt* von μ und ν. Der Maßraum $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \otimes \nu)$ heißt der *Produktmaßraum* zu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$. Dieses Maß ist durch

$$\forall A \in \mathfrak{A}\, \forall B \in \mathfrak{B} \colon (\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

charakterisiert. Insbesondere ist das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ ebenfalls σ-endlich.

Die Methode zur Bestimmung von $(\mu \otimes \nu)(E)$ vermittels der Formel (6) heißt das *Cavalierische Prinzip.*

Beweis. Die Axiome (M1) und (M2) eines Maßes sind trivialerweise erfüllt. Zum Nachweis des Axioms (M3) gehen wir noch einmal in den Beweis des Theorems 1, genauer in den Beweis der dortigen Teilaussagen (b) und (c): Sind E, $F \in \mathfrak{S} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ disjunkt, so ist $s_{E \cup F} = s_E + s_F$, also $(\mu \otimes \nu)(E \cup F) = (\mu \otimes \nu)(E) + (\mu \otimes \nu)(F)$. Sei nun (F_n) eine disjunkte Folge von Mengen $F_n \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ und $E_n := \bigcup\limits_{k \leq n} F_k$, also ist $F := \bigcup\limits_k F_k = \bigcup\limits_k E_k$; dann folgt aus der soeben bewiesenen Additivität von $\mu \otimes \nu$ durch vollständige Induktion $(\mu \otimes \nu)(E_n) = \sum\limits_{k \leq n} (\mu \otimes \nu)(F_n)$. Gehen wir nun in den Beweis von (b); der Konvergenzsatz von Beppo Levi ergibt:

$$(\mu \otimes \nu)(F) = \int s_F\, d\mu = \lim \int s_{E_n}\, d\mu = \sum_k (\mu \otimes \nu)(F_k).$$

Damit ist die σ-Additivität von $\mu \otimes \nu$ bewiesen. □

Skizze einer zweiten Konstruktion des Produktmaßes. Hier wird die σ-Endlichkeit von μ und ν nicht vorausgesetzt. Als erstes wird gezeigt, daß genau ein Prämaß $\zeta \colon (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0 \to \widehat{\mathbf{R}}$ existiert, so daß

$$\forall A \in \mathfrak{A}\, \forall B \in \mathfrak{B} \colon \zeta(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

gilt. Dies scheint auf dem ersten Blick trivial zu sein: Ist $E \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_0$, so können wir E nach Proposition 1 als disjunkte Vereinigung $E = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} Q_k$ meßbarer Rechtecke $Q_k = A_k \times B_k$ schreiben. Daher ist

$$\zeta(E) := \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \cdot \nu(B_k)$$

zu definieren. Die Schwierigkeit besteht nun darin zu zeigen, daß ζ wohldefiniert ist, d. h. daß die Definition $\zeta(E)$ von der „zufälligen" Darstellung $E = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} Q_k$ unabhängig ist. Diese Schwierigkeit läßt sich durch eine sorgfältige, leider ziemlich aufwendige Argumentation auf einem durchaus elementaren Niveau überwinden. Anschließend ist das Axiom (iii) für Prämaße zu prüfen. Hierfür wird ebenfalls der Konvergenzsatz von Beppo Levi verwendet. Schließlich wenden wir das Theorem 4 aus Abschnitt 15.7 an und erhalten damit das Produktmaß auf $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Im σ-endlichen Falle zeigt der Eindeutigkeitssatz von Hahn, daß wir zu demselben Maße $\mu \otimes \nu$ kommen. Im nicht σ-endlichen Falle haben wir keine Eindeutigkeitsaussage für das hier konstruierte Maß, so daß die gesamte Theorie wesentlich subtiler wird.

Wir kehren wieder zu unserer Voraussetzung zurück, daß $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ σ-endlich sind.

Proposition 5. Unter Beachtung der Proposition 2 können wir rekursiv für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ ein Maß $\tilde{\lambda}^n \colon \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n) \to \widehat{\mathbf{R}}$ durch

$$\tilde{\lambda}^1 = \lambda \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbf{N}_0 \colon \tilde{\lambda}^{n+1} = \tilde{\lambda}^n \otimes \lambda$$

definieren. Für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ ist

$$\mu_0 := \tilde{\lambda}^n | \mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)$$

dasjenige Prämaß auf der von den Quadern $Q \subseteq \mathbf{R}^n$ erzeugten Algebra $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)$, welches durch

$$\mu_0(Q) = \mathrm{vol}(Q) \tag{7}$$

festgelegt ist (vgl. Theorem 1 aus Abschnitt 15.7).

Daher ist $\tilde{\lambda}^n = \lambda^n$. Weiterhin gilt

$$\forall n, m \in \mathbf{N}_0 \colon \lambda^n \otimes \lambda^m = \lambda^{n+m}. \tag{8}$$

Mit dieser Aussage ist der Beweis des Theorems 1 aus 15.3 abgeschlossen (es fehlt uns bisher, daß es auf $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)$ ein Prämaß gibt, für welches die Formel (7) gilt).

Die Formel (8) ist für die Berechnung mehrdimensionaler Lebesguescher Integrale von entscheidender Bedeutung; vgl. das folgende Theorem von Fubini.

Beweis. Zunächst beweisen wir, daß das Maß $\tilde{\lambda}^n$ die Formel (7) erfüllt: Dieses beweisen wir per Induktion über n. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, daß die Aussage für ein n bewiesen ist. Sei ein Quader $Q \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ vorgegeben. Es existieren dann ein Quader $Q' \subseteq \mathbf{R}^n$ und ein Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$, so daß $Q = Q' \times I$. Damit gilt

$$\tilde{\lambda}^{n+1}(Q) = (\tilde{\lambda}^n \otimes \lambda)(Q' \times I) = \tilde{\lambda}^n(Q') \cdot \lambda(I) = \mathrm{vol}(Q') \cdot \ell(I) = \mathrm{vol}(Q).$$

Damit gilt (7) also auch für $n + 1$.

Die Formel (8) beweist sich ganz ähnlich: Für jeden Quader $Q = Q' \times Q''$ mit Quadern $Q' \subseteq \mathbf{R}^n$ und $Q'' \subseteq \mathbf{R}^m$ gilt

$$(\lambda^n \otimes \lambda^m)(Q) = (\lambda^n \otimes \lambda^m)(Q' \times Q'') = \lambda^n(Q') \cdot \lambda^m(Q'') = \mathrm{vol}(Q') \cdot \mathrm{vol}(Q'') = \mathrm{vol}(Q) = \lambda^{n+m}(Q).$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz von Hahn folgt daraus zwingend (8). □

Cavalierisches Prinzip.

(a) Für jede Borel-Menge $E \subseteq \mathbf{R}^2$ ist ihr Flächeninhalt $\lambda^2(E)$ durch

$$\lambda^2(E) = \int \lambda(E_p)\, d\lambda(p) = \int \lambda(E_q) d\lambda(q)$$

gegeben, wobei jeweils

$$E_p = \{q \in \mathbf{R} \mid (p,q) \in E\} \quad \text{bzw.} \quad E_q = \{p \in \mathbf{R} \mid (p,q) \in E\}.$$

(b) Für jede Borel-Menge $E \subseteq \mathbf{R}^3$ ist ihr Volumen $\lambda^3(E)$ durch

$$\lambda^3(E) = \int \lambda^2(E_p)\, d\lambda(p) = \int \lambda^2(E_r) d\lambda(r)$$

gegeben, wobei jeweils

$$E_p = \{(q,r) \in \mathbf{R}^2 \mid (p,q,r) \in E\} \quad \text{bzw.} \quad E_r = \{(p,q) \in \mathbf{R}^2 \mid (p,q,r) \in E\}.$$

Theorem 3 (Satz von Tonelli)**.** Sei $f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})$. Wir definieren die Funktionen

$$\int f\, d\nu \colon X \to \widehat{\mathbf{R}}, p \mapsto \int f_p\, d\nu = \int f(p,q)\, d\nu(q)$$

und

$$\int f\, d\mu \colon Y \to \widehat{\mathbf{R}}, q \mapsto \int f^q\, d\nu = \int f(p,q)\, d\mu(p).$$

Dann gilt $\int f\, d\nu \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ und $\int f\, d\mu \in \widehat{\mathcal{M}}^+(Y, \mathfrak{B})$ mit

$$\int \Big(\int f\, d\nu \Big)\, d\mu = \int f\, d(\mu \otimes \nu) = \int \Big(\int f\, d\mu \Big)\, d\nu.$$

Beachte erneut Proposition 3 für die Wohldefiniertheit der Funktionen $\int f\,d\nu$ und $\int f\,d\mu$.

Beweis. Ist E eine beliebige Menge aus $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$, so folgt die Behauptung für deren charakteristische Funktion $f = 1_E$ aus Theorem 1 und 2, weil dann $f_p = 1_{E(p)}$, $f^q = 1_{E^{-1}(q)}$ (somit folgt $(\int f\,d\nu)(p) = \nu(E(p))$ und $(\int f\,d\mu)(q) = \mu(E^{-1}(q)))$ und $\int f\,d(\mu\otimes\nu) = (\mu\otimes\nu)(E)$ ist. Natürlich gilt das Theorem dann auch für die Funktionen $c\cdot 1_E$ mit $c\in\mathbf{R}$.

Durch Summation läßt sich die Gültigkeit des Theorems für Funktionen $f\in\mathcal{E}^+(X\times Y,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$ folgern.

Ist schließlich $f\in\widehat{\mathcal{M}}^+(X\times Y,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$, so wählen wir nach dem Lemma 1 aus Abschnitt 15.4 eine Levi-Folge (φ_n) von Funktionen $\varphi_n\in\mathcal{E}^+(X\times Y,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$, die gegen f konvergiert. Damit definieren wir

$$F_n\colon X\to\widehat{\mathbf{R}}, p\mapsto\int\varphi_n(p,q)\,d\nu(q)$$

und

$$\tilde{F}_n\colon Y\to\widehat{\mathbf{R}}, q\mapsto\int\varphi_n(p,q)\,d\mu(p).$$

Nach dem vorherigen Beweisschritt sind dies nicht-negative meßbare Funktionen, für die

$$\int F_n\,d\mu = \int\varphi_n d(\mu\otimes\nu) = \int\tilde{F}_n\,d\nu \tag{9}$$

gelten. Weiterhin sind (F_n) und $(\tilde{F}_n)$ Levi-Folgen, die wegen des Konvergenzsatzes von Beppo Levi gegen $\int f\,d\nu$ bzw. $\int f\,d\mu$ konvergieren. Bei erneuter Anwendung dieses Konvergenzsatzes gehen daher die Gleichungen (9) beim Grenzübergang $n\to\infty$ in das gewünschte Resultat über. □

Im folgenden sei E ein $\mathbf{K}$-Banachraum.

Theorem 4 (Theorem von Fubini)**.** Sei $f\in\mathcal{L}^1(X\times Y,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B},\mu\otimes\nu;E)$. Dann existiert eine μ-Nullmenge $N\in\mathfrak{A}$, so daß $f_p\in\mathcal{L}^1(Y,\mathfrak{B},\nu;E)$ für alle $p\in X\setminus N$, so daß die Funktion

$$g\colon X\setminus N\to E, p\mapsto\int f_p\,d\nu$$

stark μ-integrierbar ist und so daß

$$\int f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_{X\setminus N} g\,d\mu.$$

Etwas salopp schreiben wir die letzte Formel in der Form

$$\int f\,d(\mu\otimes\nu) = \int\Big(\int f\,d\nu\Big)\,d\mu.$$

Eine entsprechende Aussage gilt auch dafür, daß zunächst über X und anschließend über Y integriert wird.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für eine Funktion der Form $f = 1_M$ mit $M \in \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ und $(\mu\otimes\nu)(M) < \infty$. In diesem Falle ist $f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\otimes\nu)$ und der Satz von Tonelli liefert $\int f\, d\nu \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mit

$$\int\Big(\int f\, d\nu\Big)\, d\mu = \int f\, d(\mu\otimes\nu) = (\mu\otimes\nu)(M) < \infty.$$

Nach Proposition 4(c) aus Abschnitt 15.4 ist damit $N := \{p \in X \mid \int f_p\, d\nu = \infty\} \in \mathfrak{A}$ eine μ-Nullmenge. Weiter ist nach der Definition aus Abschnitt 15.5 $f_p \in \mathcal{L}^1(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ für alle $p \in X \setminus N$. Schließlich ist

$$\int_{X\setminus N} g\, d\mu = \int_{X\setminus N}\Big(\int f\, d\nu\Big)\, d\mu = \int\Big(\int f\, d\nu\Big)\cdot 1_{X\setminus N}\, d\mu = \int\Big(\int f\, d\nu\Big)\, d\mu = \int f\, d(\mu\otimes\nu),$$

wieder nach dem Satz von Tonelli.

Durch Summation folgern wir anschließend die Gültigkeit des Theorems für alle Funktionen $f \in \mathcal{E}_0(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\otimes\nu; E)$.

Sei schließlich $f \in \mathcal{L}^1(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\otimes\nu; E)$ beliebig. Nach Proposition 4 aus Abschnitt 15.6 existiert eine Folge $(\varphi_n)_n$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{E}_0(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\otimes\nu; E)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_1 = 0$ und $\|\varphi_n\| \le 2\cdot\|f\|$.

Zweimalige Anwendung des Satzes von Tonelli und der Monotonie des Integrals liefert

$$\int\Big(\int \|\varphi_n\|\ d\nu\Big)\, d\mu = \int \|\varphi_n\|\ d(\mu\otimes\nu) \le 2\cdot\int \|f\|\ d(\mu\otimes\nu) = 2\cdot\int\Big(\int \|f\|\ d\nu\Big)\, d\mu.$$

Nach Proposition 4(c) aus Abschnitt 15.4 folgt

$$\int \|\varphi_n\|\ d\nu \le 2\cdot\int \|f\|\ d\nu \underset{\mu}{<} \infty.$$

Damit hat die Folge $(q \mapsto \|\varphi_n(p,q)\|)_n$ für μ-fast alle $p \in X$ eine integrierbare Majorante (nämlich $q \mapsto \|f(p,q)\|$).

Nach dem schon Bewiesenen existiert eine μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$, so daß für alle $p \in X\setminus N$ $\int \varphi_n(p,q)\, d\nu(q) \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$; nach dem Theorem von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz ist daher (eventuell nach geeigneter Vergrößerung von N) $\int f_p\, d\nu \in \mathcal{L}^1(Y, \mathfrak{B}, \nu; E)$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n(p,q)\, d\nu(q) = \int f_p\, d\nu = g(p)$$

für alle $p \in X\setminus N$. Damit ist g punktweiser Limes der stark μ-meßbaren Funktionen $\int \varphi_n\, d\nu|X\setminus N$ und damit selbst stark μ-meßbar.

Da nach dem Satz von Tonelli

$$\int_{X\setminus N} \|g\|\ d\mu \le \int\Big(\int \|f_p\|\ d\nu\Big)\, d\mu = \int \|f\|\ d(\mu\otimes\nu) < \infty,$$

ist g sogar stark μ-integrierbar. Es bleibt, daß Integral über g auszurechnen. Dazu verwenden wir

$$\int_{X\setminus N}\Big\|\Big(\int \varphi_n\, d\nu\Big) - g\Big\|\ d\mu \le \int\Big(\int \|\varphi_n - f\|\ d\nu\Big)\, d\mu = \int \|\varphi_n - f\|\ d(\mu\otimes\nu),$$

nach dem Satz von Tonelli, also

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\Big(\int \varphi_n\, d\nu\Big) - g\Big\|_1 \le \lim_{n\to\infty}\|\varphi_n - f\|_1 = 0.$$

Damit ist aufgrund der Stetigkeit des Integrals bezüglich der L^1-Norm schließlich

$$\int_{X\setminus N} g\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus N} \Big(\int \varphi_n\,d\nu\Big)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\,d(\mu\otimes\nu) = \int f\,d(\mu\otimes\nu),$$

wobei wir in der vorletzten Gleichheit ausgenutzt haben, daß wir schon bewiesen haben, daß das Theorem für die Funktionen φ_n gilt. □

Korollar 1 (Satz von Fubini–Tonelli)**.** Sei $f \in \mathcal{M}(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}; E)$. Es ist genau dann $f \in \mathcal{L}^1(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}; E)$, wenn

$$\int \Big(\int \|f\|\;d\nu\Big)\,d\mu < \infty,$$

und in diesem Falle gilt

$$\int f\,d(\mu\otimes\nu) = \int \Big(\int f\,d\nu\Big)\,d\mu.$$

Eine entsprechende Aussage gilt dafür, daß zunächst über X und anschließend über Y integriert wird.

Dieser Satz gibt uns einerseits ein hinreichendes Kriterium für die Integration einer Funktion bezüglich eines Produktmaßes und andererseits eine Berechnungsmethode.

Beweis. Es ist $f \in \mathcal{L}^1(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}; E)$ genau dann, wenn $\int \|f\|\;d(\mu\otimes\nu) < \infty$. Nach dem Satz von Tonelli ist aber $\int \|f\|\;d(\mu\otimes\nu) = \int(\int \|f\|\;d\nu)\,d\mu$. Schließlich folgt die Formel für das Integral über f direkt aus dem Theorem von Fubini. □

Beispiel. Sind $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ und $g \in \mathcal{M}(Y, \mathfrak{B})$, so gilt $f\otimes g \in \mathcal{M}(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$. Ist sogar $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}(Y, \mathfrak{B}, \nu)$, so gilt auch $f\otimes g \in \mathcal{L}(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\otimes\nu)$ mit

$$\int (f\otimes g)\,d(\mu\otimes\nu) = \Big(\int f\,d\mu\Big)\cdot\Big(\int g\,d\nu\Big).$$

Korollar 2. Es sei $M \subseteq X\times Y$ eine $\mu\otimes\nu$-meßbare Menge. Dann ist

$$P \coloneqq \{p \in X \mid M(p) \neq \emptyset\} = \{p \in X \mid \exists q\colon (p,q) \in M\} \in \mathfrak{A}.$$

Weiter sei $f \in \mathcal{L}(M, (\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})_M, (\mu\otimes\nu)_M; E)$. Dann existiert eine μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{A}_P$, so daß $f_p \in \mathcal{L}^1(M(p), \mathfrak{B}_{M(p)}, \nu_{M(p)}; E)$ für alle $p \in P\setminus N$, so daß die Funktion

$$g\colon P\setminus N \to E, p \mapsto \int_{M(p)} f(p,q)\,d\nu(q)$$

stark μ-integrierbar ist und so daß

$$\int_M f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_{P\setminus N} g\,d\mu.$$

Etwas salopp schreiben wir die letzte Formel in der Form

$$\int_M f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_P \Big(\int_{M(p)} f(p,q)\,d\nu(q)\Big)\,d\mu(p).$$

Eine entsprechende Aussage gilt dafür, daß zunächst über X und anschließend über Y integriert wird.

Beweis. Nach der Definition von $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ist $M = \bigcup (A_k \times B_k)$ für eine Folge $(A_k \times B_k)$ meßbarer Rechtecke in $X \times Y$. Damit ist $P = \bigcup_{B_k \neq \emptyset} A_k \in \mathfrak{A}$, womit die erste Behauptung bewiesen ist.

Für den zweiten Teil der Behauptung sei $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \otimes \nu; E)$ die triviale Fortsetzung von f. Nach dem Theorem von Fubini existiert damit eine μ-Nullmenge $\hat{N} \in \mathfrak{A}$, so daß $\hat{f}_p \in \mathcal{L}^1(Y, \mathfrak{B}, \nu; E)$ für alle $p \in X \setminus \hat{N}$, so daß die Funktion

$$\hat{g} \colon X \setminus \hat{N} \to E, p \mapsto \int f_p \, d\nu$$

stark μ-integrierbar ist und so daß

$$\int \hat{f} \, d(\mu \otimes \nu) = \int_{X \setminus N} \Big(\int \hat{f} \, d\nu \Big) \, d\mu.$$

Da $\hat{f}_p$ die triviale Fortsetzung von f_p für jedes $p \in P$ ist und $\hat{f}_p \equiv 0$ für alle $p \in X \setminus P$ und $\hat{g}$ die triviale Fortsetzung von g (mit $N := \hat{N} \cap P$) ist, folgt die Behauptung mit Proposition 2(b) aus Abschnitt 15.5. □

Aufgabe. Es seien $f, g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}, \lambda)$.

(a) Die Funktion $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (t, s) \mapsto f(t - s)$ ist eine Borel-Funktion; daher (?) ist auch

$$F \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (t, s) \mapsto f(t - s) \cdot g(s)$$

eine Borel-Funktion.

(Tip: Man benutze geeignete meßbare Abbildungen $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.)

(b) Es gilt

$$\forall s \in \mathbf{R} \colon \int_{\mathbf{R}} |f(t - s)| \, d\lambda(t) = \int_{\mathbf{R}} |f| \, d\lambda = \|f\|_1 .$$

(Tip: Aufgabe 1 aus Abschnitt 15.7.)

(c) Es gilt

$$\int |F| \, d\lambda^2 = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 ,$$

also $F \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \lambda^2)$.

(Tip: Man benutze (b) und den Satz von Tonelli.)

(d) Es ist $N := \{t \in \mathbf{R} \mid F_t \notin \mathcal{L}(\mathbf{R}, \lambda)\}$ eine Lebesguesche Nullmenge.

(e) Es ist

$$f * g \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} \int_{\mathbf{R}} F(t, s) \, d\lambda(s) & \text{für } t \in \mathbf{R} \setminus N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Lebesgue-integrierbare Funktion, die sogenannte *Faltung* von f und g.

(f) Es gilt

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 .$$

(Tip: Im Theorem von Fubini läßt sich wählen, bezüglich welcher Variablen zuerst integriert wird.)

15.9 Der Transformationssatz

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des Transformationssatzes, den wir zunächst mit einer Reihe von Lemmata vorbereiten:

Lemma 1. Sei $T\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto at + b$ mit a, $b \in \mathbf{R}$ eine affine Abbildung. Ist dann $K \subseteq \mathbf{R}$ eine kompakte Teilmenge, so gilt

$$\lambda(T(K)) = |a| \cdot \lambda(K).$$

Beweis. Der Fall $a = 0$ ist trivial, so daß wir $a \neq 0$ voraussetzen können. Damit können wir

$$\mu\colon \mathfrak{B}(\mathbf{R}) \to \widehat{\mathbf{R}}, A \mapsto |a|^{-1} \cdot \lambda(T(A))$$

definieren. Diese Abbildung ist offensichtlich ein Maß. Da $T(I)$ für jedes Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ wieder ein Intervall mit $\ell(T(I)) = |a| \cdot \ell(I)$ ist, stimmen die Maße μ und λ auf der Algebra $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R})$ überein. Nach dem Eindeutigkeitssatz von Hahn folgt $\mu \equiv \lambda$. □

Lemma 2. Sei $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine lineare Abbildung. Für jede kompakte Teilmenge $E \subseteq \mathbf{R}^n$ gilt dann

$$\lambda^n(A(E)) = |\det A| \cdot \lambda^n(E). \tag{1}$$

Es sei beachtet, daß A als lineare Abbildung, deren Definitionsbereich der endlichdimensionale Vektorraum $\mathbf{R}^n$ ist, stetig ist, so daß $A(E)$ wieder kompakt und damit Borel-meßbar ist. Damit sind beide Seiten von (1) wohldefiniert (und endlich).

Beweis. Die Behauptung ist offensichtlich richtig, wenn $A = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$ die identische lineare Abbildung ist. Gilt die Behauptung für lineare Abbildungen A, $B\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, so gilt sie auch für die lineare Abbildung $A \circ B\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, denn dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda^n((A \circ B)(E)) &= \lambda^n(A(B(E))) = |\det A| \cdot \lambda^n(B(E)) \\ &= |\det A| \cdot |\det B| \cdot \lambda^n(E) = |\det(A \circ B)| \cdot \lambda^n(E)\end{aligned}$$

wegen der Multiplikativität der Determinanten und des Absolutbetrages. Da sich nach dem Gauss-Algorithmus jede lineare Abbildung als Komposition linearer Abbildungen der Form

$$\begin{aligned} T_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, (v_1, \ldots, v_n) &\mapsto (v_i, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_1, v_{i+1}, \ldots, v_n) \\ R_a\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) &\mapsto (v_1 + a \cdot v_2, v_2, v_3, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

und

$$S_c\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto (cv_1, v_2, \ldots, v_n)$$

mit $i = 2, \ldots, n$ und a, $c \in \mathbf{R}$ schreiben lässt, reicht es also, die Behauptung für lineare Abbildungen der Form T_i, R_a und S_c nachzurechnen.

Zu T_i: Sei σ die Transposition $\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}$, so daß $T_i(v_1, \ldots, v_n) = (v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)})$. Es ist dann $\det T_i = \operatorname{sign}(\sigma) = -1$, also $|\det T_i| = 1$.

Nach dem Satz von TONELLI gilt weiter

$$
\begin{aligned}
\lambda^n(T_i(E)) &= \int 1_{T_i(E)}\, d\lambda^n = \int d\lambda(t_1) \cdots \int d\lambda(t_n)\, 1_{T_i(E)}(t_1, \dots, t_n) \\
&= \int d\lambda(t_1) \cdots \int d\lambda(t_n)\, 1_E(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}) \\
&= \int d\lambda(t_{\sigma^{-1}(1)}) \cdots \int d\lambda(t_{\sigma^{-1}(n)})\, 1_E(t_1, \dots, t_n) \\
&= \int 1_E\, d\lambda^n = \lambda^n(E).
\end{aligned}
$$

Zu R_a: Es gilt $|\det R_a| = 1$. Wir bemühen wieder den Satz von TONELLI. Damit und wegen Lemma 1 gilt:

$$
\begin{aligned}
\lambda^n(R_a(E)) &= \int 1_{R_a(E)}\, d\lambda^n = \int d\lambda^{n-1}(t_2, \dots, t_n) \int d\lambda(t_1)\, 1_{R_a(E)}(t_1, \dots, t_n) \\
&= \int d\lambda^{n-1}(t_2, \dots, t_n) \int d\lambda(t_1)\, 1_E(t_1 - a \cdot t_2, t_2, t_3, \dots, t_n) \\
&= \int d\lambda^{n-1}(t_2, \dots, t_n) \int d\lambda(t_1)\, 1_E(t_1, \dots, t_n) \\
&= \int 1_E\, d\lambda^n = \lambda^n(E).
\end{aligned}
$$

Zu S_c: Es gilt $\det S_c = c$ und damit $|\det S_c| = |c|$. Wieder nach Satz von TONELLI und wegen Lemma 1 gilt:

$$
\begin{aligned}
\lambda^n(S_c(E)) &= \int 1_{S_c(E)}\, d\lambda^n = \int d\lambda^{n-1}(t_2, \dots, t_n) \int d\lambda(t_1)\, 1_{S_c(E)}(t_1, \dots, t_n) \\
&= \int d\lambda^{n-1}(t_2, \dots, t_n) \int d\lambda(t_1)\, 1_E(c^{-1} \cdot t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) \\
&= |c| \cdot \int d\lambda^{n-1}(t_2, \dots, t_n) \int d\lambda(t_1)\, 1_E(t_1, \dots, t_n) \\
&= |c| \cdot \int 1_E\, d\lambda^n = |c| \cdot \lambda^n(E).
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3. Sei $F\colon G \to \mathbf{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus von einer offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^n$. Ist dann $Q \subseteq G$ ein kompakter Quader, so gilt

$$\lambda^n(F(Q)) = \int_Q |\det(JF)|\, d\lambda^n. \tag{2}$$

Beweis. Im folgenden Beweis versehen wir $\mathbf{R}^n$ mit der Maximumsnorm. Wir zeigen zunächst, daß

$$\lambda^n(F(Q)) \le \sup_{p \in Q} |\det(J_p F)| \cdot \lambda^n(Q). \tag{3}$$

Dazu reicht es zu zeigen, daß

$$\lambda^n(F(Q)) \le \sup_{p \in Q} |\det(J_p F)| \cdot \lambda^n(Q) \cdot (1 + \varepsilon)^n. \tag{4}$$

für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$. Sei also $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$.

Es ist $(DF)^{-1}$ stetig. Da Q ein Kompaktum ist, existiert also ein $C \in \mathbf{R}_+$ mit $\left\|(D_pF)^{-1}\right\| \le C$ für alle $p \in Q$. Weiter ist DF stetig, insbesondere also gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum Q. Damit existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $\|D_pF - D_qF\| \le L := \frac{\varepsilon}{C}$ für alle p, $q \in Q$ mit $\|p - q\| < \delta$.

Beide Seiten von (4) sind stabil unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen von Quadern, d. h. ist Q die disjunkte Vereinigung von Quadern Q_0, Q_1, Q_2, …, und gilt (4) jeweils für die Quader Q_i, so gilt (4) ebenfalls für Q. Indem wir Q geeignet unterteilen, können wir also ohne Einschränkung annehmen, daß Q ein Würfel mit Durchmesser höchstens δ ist. Sei $p_0 \in Q$ der Mittelpunkt. Sei $A := D_{p_0}F$. Nach dem Korollar 2 aus Abschnitt 13.10 gilt

$$\forall p \in Q\colon\ \|R(p)\| \le L \cdot \|p - p_0\|$$

wobei das Restglied $R\colon Q \to \mathbf{R}^n$ durch

$$\forall p \in Q\colon F(p) = F(p_0) + A(p - p_0) + R(p)$$

definiert ist. Da F ein C^1-Diffeomorphismus ist und A damit invertierbar ist, können wir die letzte Gleichung in die Form

$$\forall p \in Q\colon F(p) = A\bigl(A^{-1}(F(p_0)) - p_0 + p + A^{-1}(R(p))\bigr)$$

umschreiben. Weiter gilt

$$\forall p \in Q\colon\ \left\|A^{-1}(R(p))\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|R(p)\| \le C \cdot L \cdot \|p - p_0\| = \varepsilon \cdot \|p - p_0\|\,.$$

Ist also Q ein Würfel der Kantenlänge ℓ, so ist $\tilde{Q} := \{p + A^{-1}(R(p)) \mid p \in Q\}$ in einem Würfel der Kantenlänge $\ell \cdot (1 + \varepsilon)$ enthalten. Nach Lemma 2 und der Translationsinvarianz des Lebesgueschen Maßes folgt damit

$$\begin{aligned}
\lambda^n(F(p)) &= |\det A| \cdot \lambda^n(\{A^{-1}(F(p_0)) - p_0 + p + A^{-1}(R(p)) \mid p \in Q\}) \\
&= |\det A| \cdot \lambda^n(\tilde{Q}) \\
&\le |\det A| \cdot \lambda^n(Q) \cdot (1 + \varepsilon)^n \\
&\le \sup_{p \in Q} |\det D_pF| \cdot \lambda^n(Q) \cdot (1 + \varepsilon)^n,
\end{aligned}$$

womit (4) und damit auch (3) bewiesen ist.

Auf die gleiche Art und Weise läßt sich

$$\lambda^n(F(Q)) \ge \inf_{p \in Q} |\det(J_pF)| \cdot \lambda^n(Q)$$

zeigen.

Schließlich wollen wir (2) zeigen. Dazu reicht es wiederum,

$$\left|\lambda^n(F(Q)) - \int_Q |\det(JF)|\, d\lambda^n\right| \le \varepsilon \cdot \lambda^n(Q)$$

für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ zu zeigen. Wir wählen ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $||\det J_pF| - |\det J_qF|| < \varepsilon$ für alle p, $q \in Q$ mit $\|p - q\| < \delta$. Indem wir Q geeignet unterteilen, können wir wieder annehmen, daß Q einen Durchmesser von höchstens δ hat. Dann gilt wegen (3), daß

$$\begin{aligned}
\int_Q |\det(JF)|\, d\lambda^n &\ge \int_Q \bigl(\sup_{p \in Q} |\det J_pF| - \varepsilon\bigr)\, d\lambda^n = \sup_{p \in Q} |\det J_pF| \cdot \lambda^n(Q) - \varepsilon \cdot \lambda^n(Q) \\
&\ge \lambda^n(F(Q)) - \varepsilon \cdot \lambda^n(Q).
\end{aligned}$$

Analog rechnen wir

$$\int_Q |\det(JF)|\, d\lambda^n \leq \lambda^n(F(Q)) + \varepsilon \cdot \lambda^n(Q)$$

nach. $\square$

Lemma 4. Sei $F\colon G \to \mathbf{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus von einer offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^n$. Ist dann $Q \subseteq G$ ein kompakter Quader und $f\colon F(Q) \to E$ eine stetige Funktion in einen Banachraum E, so gilt

$$\int_{F(Q)} f\, d\lambda^n = \int_Q (f \circ F) \cdot |\det(JF)|\, d\lambda^n.$$

Beweis. Es reicht,

$$\left\| \int_{F(Q)} f\, d\lambda^n - \int_Q (f \circ F) \cdot |\det(JF)|\, d\lambda^n \right\| \leq \varepsilon \cdot \lambda^n(F(Q))$$

für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ zu zeigen. Sei also $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$. Da Q kompakt ist, ist die Funktion $f \circ F\colon Q \to E$ gleichmäßig stetig. Damit existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $\|f(F(p)) - f(F(q))\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle p, $q \in Q$ mit $\|p - q\| \leq \delta$. Wie schon im Beweis von Lemma 3 können wir davon ausgehen, daß Q schon Durchmesser höchstens δ hat. Sei ohne Einschränkung $Q \neq \emptyset$. Wir wählen ein $p_0 \in Q$. Dann gilt unter mehrmaliger Verwendung von Lemma 3, daß

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{F(Q)} f\, d\lambda^n - \int_Q (f \circ F) \cdot |\det(J_pF)|\, d\lambda^n \right\| \\
&\leq \left\| \int_{F(Q)} \bigl(f - f(F(p_0))\bigr)\, d\lambda^n + \int_Q \bigl(f \circ F - f(F(p_0))\bigr) \cdot |\det(JF)|\, d\lambda^n \right\| \\
&\leq \int \|f - f(F(p_0))\|\, d\lambda^n + \int_Q \|f \circ F - f(F(p_0))\| \cdot |\det(JF)|\, d\lambda^n \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \lambda^n(F(Q)) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \lambda^n(F(Q)) \\
&\leq \varepsilon \cdot \lambda^n(F(Q)).
\end{aligned}$$

$\square$

Theorem 1 (Transformationssatz)**.** Seien $G \subseteq \mathbf{R}^n$ eine offene Teilmenge und $F\colon G \to \mathbf{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Weiter seien A eine Borel-Menge von G und N eine λ^n-Nullmenge, so daß $F|(A \setminus N)$ injektiv ist. Dann ist $F(A)$ Lebesgue-meßbar, d. h. die Vereinigung einer Borel-meßbaren Menge mit einer λ^n-Nullmenge, und es gilt:

Ist $f\colon F(A) \to E$ eine Funktion in einen Banachraum E, so gilt $f \in \mathcal{L}^1(F(A), \lambda^n; E)$ genau dann, wenn $(f \circ F) \cdot |\det(JF)| \in \mathcal{L}^1(A, \lambda^n; E)$. Im Falle der Integrierbarkeit ist

$$\int_{F(A)} f\, d\lambda^n = \int_A (f \circ F) \cdot |\det(JF)|\, d\lambda^n.$$

Beweis. Da differenzierbare Bilder von Nullmengen wieder Nullmengen sind und außerdem gilt $F(A) \setminus F(N) \subseteq F(A \setminus N) \subseteq F(A)$, unterscheidet sich $F(A)$ von $F(A \setminus N)$ nur um eine Nullmenge. Wir können daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß $N = \emptyset$. Insbesondere ist F injektiv. Sei $C \coloneqq \{p \in G \mid \det(J_pF) = 0\}$. Nach der äquidimensionalen

Version des Satzes von SARD, die wir weiter unten formulieren, ist $F(C)$ eine Nullmenge. Damit unterscheidet sich $F(A \setminus C) = F(A) \setminus F(C)$ von $F(A)$ nur um eine Nullmenge. Wir können damit ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß $C = \emptyset$. Nach dem lokalen Umkehrsatz ist F damit ein Diffeomorphismus auf die offene Teilmenge $F(G) \subseteq \mathbf{R}^n$. Insbesondere ist $F(A)$ als Urbild von A unter der meßbaren, da stetigen Abbildung $F^{-1}\colon F(G) \to G$ meßbar.

Indem wir f durch $f \cdot 1_{F(A)}$ ersetzen, können wir weiterhin davon ausgehen, daß $A = G$. Damit reicht es, das folgende „Korollar" des Transformationssatzes zu beweisen. □

Korollar 1 (Einfache Form des Transformationssatzes)**.** Sei $F\colon G \to \mathbf{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus von einer offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^n$. Ist dann $f\colon F(G) \to E$ eine Funktion in einen Banachraum E, so gilt $f \in \mathcal{L}^1(F(G), \lambda^n; E)$ genau dann, wenn $(f \circ F) \cdot |\det(JF)| \in \mathcal{L}^1(G, \lambda^n; E)$. In Falle der Integrierbarkeit ist

$$\int_{F(G)} f \, d\lambda^n = \int_G (f \circ F) \cdot |\det(JF)| \, d\lambda^n.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{L}^1(F(G), \lambda^n; E)$. Wir wollen $(f \circ F) \cdot |\det(JF)| \in \mathcal{L}^1(G, \lambda^n; E)$ zeigen (die umgekehrte Implikation ergibt sich aus Symmetriegründen) und die Integralgleichheit beweisen.

Nach dem Dichtesatz ist $C_c^\infty(F(G), E)$ dicht in $\mathcal{L}^1(F(G), \lambda^n; E)$, d. h. es existiert eine Folge (f_k) von Funktionen $f_k \in C_c^\infty(F(G), E)$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_1 = 0$. Insbesondere ist (f_k) eine Cauchy-Folge bezüglich der L^1-Norm.

Nach Lemma 2 aus Abschnitt 15.4 können wir davon ausgehen, daß eine λ^n-Nullmenge $N \subseteq F(G)$ existiert, so daß die Folge (f_k) gegen f auf $F(G) \setminus N$ punktweise konvergiert. Damit konvergiert die Folge $(\tilde{f}_k)$ mit $\tilde{f}_k := (f_k \circ F) \cdot |\det(JF)|$ punktweise gegen $\tilde{f} := (f \circ F) \cdot |\det(JF)|$ auf $G \setminus \tilde{N}$, wobei $\tilde{N} := F^{-1}(N)$ als Bild einer Nullmenge unter der C^1-Abbildung $F^{-1}\colon F(U) \to U$ nach Aufgabe 5 aus Abschnitt 15.3 wieder eine λ^n-Nullmenge ist.

Sei $Q \subseteq G$ ein kompakter Quader. Wir nehmen zunächst an, daß $f|(F(G) \setminus F(Q)) \equiv 0$. Dann können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, daß ebenfalls $f_k|(F(G) \setminus F(Q)) \equiv 0$ für alle k. Nach Lemma 4 ist dann

$$\int_G \|\tilde{f}_k - \tilde{f}_\ell\| \, d\lambda^n = \int_Q \|\tilde{f}_k - \tilde{f}_\ell\| \, d\lambda^n = \int_{F(Q)} \|f_k - f_\ell\| \, d\lambda^n = \int_{F(G)} \|f_k - f_\ell\| \, d\lambda^n,$$

d. h. mit (f_k) ist auch $(\tilde{f}_k)$ eine L^1-Cauchy-Folge. Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathrm{L}^1(G, \lambda^n; E)$ (Theorem von RIESZ/FISCHER) existiert damit ein $g \in \mathcal{L}^1(G, \lambda^n; E)$, so daß $\lim_{k\to\infty} \|\tilde{f}_k - g\|_1 = 0$. Wieder nach Lemma 2 aus Abschnitt 15.4 folgt (indem wir nötigenfalls wieder zu einer Teilfolge übergehen), daß $\lim \tilde{f}_k \underset{\lambda^n}{=} g$. Damit ist $g \underset{\lambda^n}{=} \tilde{f}$, also auch $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(G, \lambda^n; E)$ mit

$$\int_G \tilde{f} \, d\lambda^n = \lim_{k\to\infty} \int_G \tilde{f}_k \, d\lambda^n = \int_Q \tilde{f}_k \, d\lambda^n = \lim_{k\to\infty} \int_{F(Q)} f_k \, d\lambda^n = \lim_{k\to\infty} \int_{F(G)} f_k \, d\lambda^n = \int_{F(G)} f \, d\lambda^n,$$

wobei hier wieder Lemma 4 eingegangen ist.

Schließlich wählen wir eine disjunkte Zerlegung $G = \bigcup_k A_k$ in meßbare Mengen $A_k \in \mathfrak{B}(G)$, so daß für jedes k ein kompakter Quader Q_k mit $A_k \subseteq Q_k \subseteq G$ existiert. Sei jetzt $f \in \mathcal{L}^1(F(G), \lambda^n; E)$ beliebig.

Dann ist

$$\begin{aligned}\int \|f \circ F\| \cdot |\det(JF)| \, d\lambda^n &= \sum_k \int_{A_k} \|f \circ F\| \cdot |\det(JF)| \, d\lambda^n = \sum_k \int_{F(A_k)} \|f\| \, d\lambda^n \\ &= \int_{F(G)} \|f\| \, d\lambda^n < \infty,\end{aligned}$$

nach dem schon Bewiesenen und dem Satz über die monotone Konvergenz gilt damit also $(f\circ F)\cdot|\det(JF)| \in \mathcal{L}^1(G,\lambda^n;E)$. Damit können wir das Theorem über die majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten

$$\int (f\circ F)\cdot|\det(JF)|\;d\lambda^n = \sum_k \int_{A_k} (f\circ F)\cdot|\det(JF)|\;d\lambda^n = \sum_k \int_{F(A_k)} f\,d\lambda^n = \int_{F(G)} f\,d\lambda^n. \;\square$$

Theorem 2 (Äquidimensionale Version des Satzes von Sard)**.** Seien $G \subseteq \mathbf{R}^n$ eine offene Menge und $F\colon G \to \mathbf{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Ist dann

$$C := \{p \in G \mid \det J_pF = 0\}$$

die Menge der *kritischen Stellen* von F, so ist die Menge $F(C)$ der *kritischen Werte* eine λ^n-Nullmenge.

Beweis. Wir versehen den $\mathbf{R}^n$ mit der Maximumsnorm. Da G als abzählbare Vereinigung kompakter Würfel $Q \subseteq G$ geschrieben werden kann und da eine abzählbare Vereinigung von λ^n-Nullmengen wieder eine λ^n-Nullmenge ist, reicht es zu zeigen, daß jeweils $F(C\cap Q)$ eine λ^n-Nullmenge ist. Sei also $Q \subseteq G$ ein kompakter Quader der Seitenlänge ℓ. Wir zeigen, daß für jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ eine Borel-meßbare Menge $A_\varepsilon \subseteq \mathbf{R}^n$ mit

$$A_\varepsilon \supseteq F(C\cap Q) \quad \text{und} \quad \lambda^n(A_\varepsilon) < \varepsilon$$

existiert. Setzen wir $N := \bigcap_{n\geq 0} A_{\frac{1}{n}}$. Dann gilt $\lambda^n(N) = 0$ und $F(C\cap Q) \subseteq N$.

Sei also $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ vorgegeben. Sei $L := \sup_{p\in Q} \|D_pF\|$. Nach dem Theorem aus Abschnitt 13.10 gilt dann

$$\forall p,q \in Q\colon\; \|F(p) - F(q)\| \leq L\cdot\|p-q\|\,.$$

Sei $M \gg 1$. Wir zerlegen Q äquidistant in M^n kompakte Würfel Q' der Seitenlänge $\delta := \ell/M$. Insbesondere haben wir

$$\forall p,q \in Q'\colon\; \|F(p) - F(q)\| \leq L\cdot\|p-q\| \leq L\cdot\delta. \tag{5}$$

Da DF auf Q gleichmäßig stetig ist, können wir M so groß wählen, daß $\|D_pF - D_qF\| \leq C$ mit $C := \frac{\varepsilon}{2^{n+1}L^{n-1}\ell^n}$ für alle $p,q \in Q'$. Mit dem Korollar 2 aus Abschnitt 13.10 erhalten wir

$$\forall p,q \in Q'\colon\; \|F(q) - F(p) - D_pF(q-p)\| \leq C\cdot\|p-q\| \leq C\cdot\delta. \tag{6}$$

Sei $C\cap Q' \neq \emptyset$, etwa $p_0 \in C\cap Q'$. Nach Definition von C ist $D_{p_0}F$ keine surjektive lineare Abbildung auf $\mathbf{R}^n$, d. h. es existiert eine affine Hyperebene $H \subseteq \mathbf{R}^n$ mit $F(p_0) + \operatorname{im} D_{p_0}F \subseteq H$. Bezeichnen wir mit $Q_{L\cdot\delta}(F(p_0))$ den kompakten Würfel mit Mittelpunkt p_0 und Radius $2\cdot L\delta$ und mit $B_{C\cdot\delta}(H)$ den Abschluß der $C\delta$-Umgebung um die Hyperebene H, so folgt

$$F(Q') \subseteq A(Q') := Q_{L\cdot\delta}(F(p_0)) \cap B_{C\cdot\delta}(H)$$

nach (5) und (6). Nach dem Cavalierischen Prinzip ist

$$\lambda^n(A(Q')) = 2C\cdot\delta\cdot(2L\cdot\delta)^{n-1} = 2^n\cdot C\cdot L^{n-1}\cdot\delta^n$$

Es folgt, daß

$$F(C\cap Q) = \bigcup_{C\cap Q'\neq\emptyset} F(C\cap Q') \subseteq \bigcup_{C\cap Q'\neq\emptyset} F(C) \subseteq A_\varepsilon := \bigcup_{C\cap Q'\neq\emptyset} A(Q'),$$

und

$$\lambda^n(A_\varepsilon) \leq \sum_{C\cap Q'\neq\emptyset} \lambda(A(Q')) \leq N^n\cdot 2^n\cdot C\cdot L^{n-1}\cdot\delta^n = 2^n\cdot C\cdot L^{n-1}\cdot\ell^n < \varepsilon. \qquad \square$$

Wir wollen noch drei einfache Folgerungen aus dem Transformationssatz formulieren, die teilweise schon in den Beweis eingegangen sind:

Korollar 2 (Die Translationsinvarianz des λ^n-Integrals)**.** Für alle $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \lambda^n; E)$ und alle $v \in \mathbf{R}^n$ ist

$$\int f(p+v)\, d\lambda^n(p) = \int f(p)\, d\lambda^n(p).$$

Vom höheren Standpunkt betrachtet aus bedeutet dies: Das Maß λ^n ist das *Haarsche Maß* der lokal kompakten Gruppe $\mathbf{R}^n$.

Korollar 3 (Der Transformationssatz für lineare Abbildungen)**.** Ist $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine lineare Abbildung, so ist für jedes $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \lambda^n; E)$ auch $f \circ A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \lambda^n; E)$, und es gilt

$$\int f\, d\lambda^n = |\det A| \cdot \int (f \circ A)\, d\lambda^n.$$

Diese Folgerung zeigt die geometrische Bedeutung der *speziellen linearen Gruppe*

$$\mathrm{SL}(n, \mathbf{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) \mid \det A = 1\}.$$

Ihre Elemente beschreiben gerade die orientierungs- ($\det A > 0$) und volumenerhaltenden ($|\det A| = 1$) linearen Abbildungen.

Korollar 4 (Das Volumen von Parallelotopen)**.** Sind $v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^n$, so hat das *Parallelotop*

$$[0; v_1, \ldots, v_n] := \Big\{\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot v_i \mid t_1, \ldots, t_n \in [0,1]\Big\}$$

das Volumen

$$\lambda^n([0; v_1, \ldots, v_n]) = |\det(v_1, \ldots, v_n)|\,.$$

Aufgabe. Es sei $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$ eine streng monoton wachsende C^1-Funktion. Man zeige, daß die Substitutionsmethode auf jede λ-integrierbare Funktion $f\colon \varphi([a,b]) \to \mathbf{R}$ anwendbar ist. (Vorsicht! $[a,b]$ ist nicht offen.)

15.10 Integration vermittels Polarkoordinaten

Proposition. Es seien φ_0, $\varphi_1 \in \mathbf{R}$ mit $\varphi_0 < \varphi_1 \leq \varphi_0 + 2\pi$, $R\colon [\varphi_0, \varphi_1] \to [0, \infty[$ eine stetige Funktion, E ein $\mathbf{K}$-Banachraum

$$A := \{(r, \varphi) \mid \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \wedge 0 \leq r \leq R(\varphi)\}$$

und

$$S := \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \mid (r, \varphi) \in A\}.$$

Dann läßt sich das Integral einer jeden Funktion $f \in \mathcal{L}(S, \lambda^2; E)$ durch

$$\int_S f \, d\lambda^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \Big(\int_0^{R(\varphi)} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot r \, dr \Big) \, d\varphi$$

berechnen. Insbesondere ist

$$\lambda^2(S) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R^2(\varphi) \, d\varphi.$$

Beispiel. Es ist

$$\int e^{-x^2} \, d\lambda = \sqrt{\pi}.$$

Nach dem Beispiel aus Abschnitt 15.8 ist nämlich $(\int e^{-x^2} \, d\lambda)^2 = \int e^{-(x^2+y^2)} \, d\lambda^2$, und das letzte Integral läßt sich vermittels Polarkoordinaten sofort berechnen.

15.11 Guldinsche Regel für das Volumen eines Rotationskörpers

Proposition. Es sei $K \subseteq [0, \infty[\times \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^2$ eine kompakte Menge (in der (x, z)-Ebene). Sei R die x-Koordinate des Schwerpunktes von K, d h.

$$R := \frac{1}{\lambda^2(K)} \cdot \int_K x \, d\lambda^2.$$

Dann hat der *Rotationskörper*

$$K^* := \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), t) \in \mathbf{R}^3 \mid (r, t) \in K \wedge \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

das Volumen

$$\lambda^3(K^*) = 2\pi \cdot R \cdot \lambda^2(K).$$

15.12 Integration vermittels Kugelkoordinaten

Proposition. Es seien E ein $\mathbf{K}$-Banachraum,

$$\begin{aligned} &F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (r, \theta, \varphi) \mapsto (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)), \\ &A_0 := [0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \end{aligned}$$

und

$$N_0 := (\{0\} \times \mathbf{R}^2) \cup (\mathbf{R} \times \Big\{0, \pi\Big\} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R}^2 \times \{2\pi\}).$$

Dann ist $F(A_0) = \mathbf{R}^3$, N_0 ist eine λ^3-Nullmenge, $F|(A_0 \setminus N_0)$ ist injektiv und es gilt $\Big|\det(J_{(r,\theta,\varphi)}F)\Big| = r^2 \cdot \sin(\theta)$. Daher gilt für jede Borel-meßbare Menge $A \subseteq A_0$ und jede Funktion $f \in \mathcal{L}(F(A), \lambda^3; E)$, daß

$$\int_{F(A)} f \, d\lambda^3 = \int_A r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot f(F(r, \theta, \varphi)) \, d\lambda^3(r, \theta, \varphi).$$

Kapitel 16

Integration längs Flächenstücken

16.1 Vektorfelder und dynamische Systeme

In diesem Abschnitt sei G eine offene Teilmenge eines Banachraumes E. Weiter sei $r \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Definition.

(a) Unter einem C^r*-Vektorfeld* auf G verstehen wir eine r-mal stetig differenzierbare Funktion

$$X\colon G \to E, p \mapsto X(p) = X_p.$$

Dabei stellen wir uns X_p jeweils als einen in p angehefteten Richtungsvektor vor.

(b) Unter einer *Integralkurve* eines derartigen Vektorfeldes X verstehen wir eine auf einem offenen Intervall $J \subseteq \mathbf{R}$ definierte Kurve $\alpha\colon J \to G$, welche Lösung der autonomen Differentialgleichung (vgl. die Aufgabe aus Abschnitt 11.1)

$$\alpha' = X \circ \alpha$$

ist, für die also $\forall t \in J\colon \alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$ gilt.

Beispiel 1. Hat ein C^r-Vektorfeld X auf G in p eine Nullstelle (d. h. $X_p = 0 \in E$), so ist $\alpha\colon \mathbf{R} \to G, t \mapsto p$ „die" maximale Integralkurve (s. u.) von X mit $\alpha(0) = p$. In diesem Falle nennen wir p auch eine *Gleichgewichtslage* oder eine *Singularität* des durch X beschriebenen dynamischen Systems (s. u.).

Theorem. Es sei X ein C^r-Vektorfeld auf G mit $r \geq 1$.

(a) Zu jedem $p \in G$ existiert genau eine Integralkurve $\alpha_p\colon J_p \to G$ von X mit $0 \in J_p$ und $\alpha_p(0) = p$, die in folgendem Sinne *eindeutig* und *maximal* ist: Ist $\alpha\colon J \to G$ eine weitere Integralkurve von X mit $0 \in J$ und $\alpha(0) = p$, so ist $J \subseteq J_p$ und $\alpha = \alpha_p|J$.

(b) Ist $\alpha\colon J \to G$ eine Integralkurve von X und $s \in \mathbf{R}$, so ist auch

$$\beta\colon (-s) + J \to G, t \mapsto \alpha(t+s)$$

eine Integralkurve von X.

(c) Die Menge
$$D := \bigcup_{p \in G} (J_p \times \{p\})$$
(vgl. (a)) ist eine offene Teilmenge von $\mathbf{R} \times G$, welche die Teilmenge $\{0\} \times G$ enthält und
$$\Phi\colon D \to G, (t, p) \mapsto \alpha_p(t)$$
eine C^r-Abbildung, der sogenannte *maximale Fluß* von X. Er erfaßt die Abhängigkeit der Integralkurven vom „Startpunkt“ p.

(d) Es sei X *vollständig*, d h. der maximale Fluß Φ ist auf ganz $\mathbf{R} \times G$ definiert. Dann ist für jedes $t \in \mathbf{R}$ die Abbildung
$$\Phi_t\colon G \to G, p \mapsto \Phi(t, p) = \alpha_p(t)$$
ein C^r-Diffeomorphismus und die Abbildung $t \mapsto \Phi_t$ ein Gruppenhomomorphismus von $\mathbf{R}$ in die Gruppe aller C^r-Diffeomorphismen $G \to G$, also
$$\forall t, s \in \mathbf{R}\colon \Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s;$$
insbesondere
$$\Phi_0 = \mathrm{id}_G \quad \text{und} \quad \forall t \in \mathbf{R}\colon \Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}.$$
Die Familie $(\Phi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ heißt daher auch die von X erzeugte *Einparametergruppe* oder das von X induzierte *dynamische System*.

Beispiele 2.

(a) Es sei X ein konstantes Vektorfeld auf ganz E, etwa $X \equiv v$ für ein $v \in E$. Dann ist $\alpha_p\colon \mathbf{R} \to E, t \mapsto p + t \cdot v$ die maximale Integralkurve von X, die zur Zeit $t = 0$ durch p läuft. Daher ist X ein vollständiges Vektorfeld mit dem maximalen Fluß
$$\Phi\colon \mathbf{R} \times E \to E, (t, p) \mapsto p + t \cdot v.$$

(b) Es sei $X\colon E \to E$ eine stetige lineare Abbildung, die wir als Vektorfeld betrachten. Es ist beliebig oft differenzierbar und vollständig. Sein maximaler Fluß ist
$$\Phi\colon \mathbf{R} \times E \to E, (t, p) \mapsto \exp(t \cdot X)(p);$$
also ist seine Einparametergruppe $(\Phi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ durch $\Phi_t \equiv \exp(t \cdot X) \in \mathrm{GL}(E)$ gegeben.

16.2 Flächenstücke und deren Flächenelement

In diesem Abschnitt sei H ein reeller Hilbertraum. Mit K bezeichnen wir eine zusammenhängende kompakte Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ mit $\overline{K^o} = K$. Beispiele für solche Teilmengen sind kompakte Quader oder allgemeiner Mengen der Form
$$K = B_r(p) := \{q \in \mathbf{R}^n \mid \|q - p\| \le r\},$$

wobei $p \in \mathbf{R}^n$, $r \in \mathbf{R}_+$ und $\|\cdot\|$ *irgendeine* Norm des $\mathbf{R}^n$ ist.

Schließlich sei $F\colon K \to H$ eine Abbildung, die im folgenden Sinne eine C^r-Abbildung mit $r \in \mathbf{N}_1 \cup \{\infty\}$ ist: Es existiere eine Umgebung $G \in \mathfrak{U}^o(K, \mathbf{R}^n)$ und eine C^r-Abbildung $\tilde{F}\colon G \to H$ mit $\tilde{F}|K = F$.

Für alle $p \in K$ und $i = 1, \ldots, n$ sind dann

$$D_pF := D_p\tilde{F}, \quad \operatorname*{rk}_p F := \operatorname{rk} D_pF, \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i}(p)$$

wohldefiniert.

Definition.

(a) Die *stetige* Funktion

$$\rho_F\colon K \to \mathbf{R}, p \mapsto \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(p), \frac{\partial F}{\partial x_k}(p)\right\rangle\right)}$$

heißt das *Flächen-* oder *Volumenelement* von F.

Sie beschreibt die infinitesimale Volumenverzerrung, die F verursacht; vgl. Abschnitt 16.3.

(b) Wir sagen, daß F in $p \in K$ *regulär* ist, wenn $\operatorname*{rk}_p F = n$, d. h. wenn $D_pF\colon \mathbf{R}^n \to H$ injektiv ist, d. h. wenn $\rho_F(p) > 0$ ist; vgl. Lemma 2(b) aus Abschnitt 14.8.

(c) Wir nennen F ein *n-dimensionales Flächenstück* in H, wenn F λ^n-fast überall injektiv und regulär ist. Ist der „Parameterbereich“ K ein kompakter Quader, so heißt F ein *n-dimensionales Pflaster*.

Beispiele.

(a) **Kurven als 1-dimensionale Pflaster.** Jede C^r-Kurve $\alpha\colon [a,b] \to H$ ordnet sich obiger Definition unter, indem wir $K := [a,b]$ sowie $F := \alpha$ setzen. Dann ist $\rho_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$. Folglich ist die Länge der Kurve α durch

$$L(\alpha) = \int_a^b \rho_\alpha(t)\, dt$$

gegeben; vgl. Abschnitt 9.6. Offenbar ist die Kurve α in t genau dann im Sinne von Abschnitt 9.6 regulär, wenn sie in obigem Sinne regulär ist.

(b) **n-dimensionale Flächenstücke im $\mathbf{R}^n$.** Für ein n-dimensionales Flächenstück $F\colon K \to \mathbf{R}^n$ ist

$$\rho_F(p) = |\det(J_pF)|\,. \tag{1}$$

Nach dem Transformationssatz gilt daher

$$\int_K \rho_F\, d\lambda^n = \lambda^n(F(K)).$$

Der Beweis von (1) ergibt sich aus Lemma 2(a) aus Abschnitt 14.8, wenn wir für $(a_1, \ldots, a_n)$ die kanonische Basis des $\mathbf{R}^n$ und für v_i den Vektor $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)$ einsetzen.

(c) **Die zweidimensionale Sphäre als Flächenstück.** Sei $R \in \mathbf{R}_+$. Hier ist dann $K := [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ und

$$F\colon K \to \mathbf{R}^3, (\theta, \varphi) \mapsto (R\cos(\varphi)\sin(\theta), R\sin(\varphi)\sin(\theta), R\cos(\theta))$$

die „geographische“ Parametrisierung der Sphäre $\mathbf{S}^2_R$ vom Radius R. Dann ist $\rho_F(\theta, \varphi) = R^2 \sin(\theta)$ und F ein zweidimensionales Pflaster, welches auf $]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ regulär und injektiv ist. Es gilt

$$\int_K \rho_F \, d\lambda^2 = 4\pi R^2.$$

Aufgabe (Das Flächenelement einer Graphenfläche)**.** Es sei $f\colon K \to \mathbf{R}$ eine C^1-Funktion und

$$F\colon K \to \mathbf{R}^{n+1}, p \mapsto (p, f(p))$$

ihr Graph. Dann ist das Flächenelement von F durch

$$\rho_F(p) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\Big)^2}$$

gegeben. (Dies kann als pythagoräische Darstellung des Flächenelementes bezeichnet werden.)

16.3 Integration längs eines Flächenstückes

Sei $F\colon K \to H$ ein n-dimensionales Flächenstück. Ist dieses in $a \in K^o$ regulär, so bildet D_aF den $\mathbf{R}^n$ isomorph auf den n-dimensionalen Unterraum

$$T_aF := \operatorname{span}\Big\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(a)\Big\}$$

ab; ist $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ sehr klein, so unterscheidet sich das Bild $F(Q_\varepsilon)$ des Quaders $Q_\varepsilon := a + [0, \varepsilon]^n$ nur sehr wenig vom Parallelotop

$$P_\varepsilon := F(a) + D_aF([0, \varepsilon]^n) = \Big[F(a); \varepsilon \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}(a), \ldots, \varepsilon \cdot \frac{\partial F}{\partial x_n}(a)\Big].$$

Berechnen wir das Volumen von P_ε (in dem affinen Unterraum $F(a) + T_aF$) gemäß dem Korollar 4 aus Abschnitt 15.9: Dazu wählen wir eine Orthonormalbasis $(a_1, \ldots, a_n)$ von T_aF; dann ist das Volumen von P_ε nach Lemma 2(a) aus Abschnitt 14.8 gleich

$$\begin{aligned}\left|\det\left(\left\langle \varepsilon \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(a), a_k\right\rangle\right)\right| &= \varepsilon^n \cdot \left|\det\left(\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(a), a_k\right\rangle\right)\right| \\ &= \varepsilon^n \cdot \rho_F(a) = \rho_F(a) \cdot \lambda^n(Q_\varepsilon).\end{aligned}$$

Es ist nun naheliegend, das eben untersuchte Volumen als den *Flächeninhalt* des Flächenstückes $F(a) + D_aF([0, \varepsilon]^n)$, also in Näherung als den Flächeninhalt von $F(Q_\varepsilon)$ zu bezeichnen. Führen wir den üblichen Prozeß „$\varepsilon \to 0$ und Summation“ durch (vgl. Abschnitt 8.12 und Abschnitt 15.9), so gelangen wir zur folgenden Definition:

Definition 1. Die Zahl $\lambda^n(F) := \int_K \rho_F \, d\lambda^n$ heißt der *Flächeninhalt* des Flächenstückes $F\colon K \to H$.

Die Beispiele aus Abschnitt 16.2 stehen mit dieser Definition in Einklang. Mehr noch, es liegt nahe, die in der folgenden Proposition beschriebene Konstruktion durchzuführen:

Proposition. Durch

$$\lambda^n_F(A) := \int_A \rho_F \, d\lambda^n$$

für alle $A \in \mathfrak{B}(K)$ wird auf K ein Maß λ^n_F definiert (vgl. Korollar 3 aus Abschnitt 15.4 und Theorem 3 aus Abschnitt 15.5); für jede Borel-meßbare Funktion $f\colon K \to \mathbf{R}$ gilt $f \in \mathcal{L}(K, \lambda^n_F)$ genau dann, wenn $f \cdot \rho_F \in \mathcal{L}(K, \lambda^n)$, und im Falle der Integrierbarkeit gilt

$$\int f \, d\lambda^n_F = \int_K f \cdot \rho_F \, d\lambda^n.$$

Dies motiviert die nächste Definition:

Definition 2. Ist $F\colon K \to H$ ein n-dimensionales Flächenstück und gilt $f \circ F \in \mathcal{L}(K, \lambda^n_F)$ für eine Funktion $f\colon F(K) \to \mathbf{R}$, so schreiben wir $f \in \mathcal{L}(F, \lambda^n)$ und setzen

$$\int_F f \, d\lambda^n := \int (f \circ F) \, d\lambda^n_F = \int_K (f \circ F) \cdot \rho_F \, d\lambda^n.$$

Dahinter steckt folgende Philosophie: Anstatt auf der geometrischen komplizierten Fläche $F(K)$ eine Integration für f zu definieren, ziehen wir das Problem mit der Parametrisierung F auf den „ungekrümmten“ Parameterbereich K zurück; dabei nehmen wir allerdings in Kauf, daß wir die Volumenverzerrung der Parametrisierung F durch Einfügen des Flächenelementes ρ_F ausgleichen müssen.

Beispiel. Jede stetige Funktion $f\colon F(K) \to \mathbf{R}$ ist in diesem Sinne integrierbar.

Theorem (Invarianz von Flächenintegralen gegenüber Parametertransformationen.)**.** Es seien $F\colon K \to H$ und $\tilde{F}\colon \tilde{K} \to H$ zwei n-dimensionale Flächenparametrisierungen und es existiere ein C^1-Diffeomorphismus $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ von einer offenen Teilmengen $G \in \mathfrak{U}^o(\tilde{K}, \mathbf{R}^n)$ in den $\mathbf{R}^n$, so daß $\varphi(\tilde{K}) = K$ und $F \circ \varphi = \tilde{F}$, also insbesondere $F(K) = \tilde{F}(\tilde{K})$. Dann gilt aufgrund des Transformationssatzes für jede Borel-meßbare Funktion $f\colon F(K) \to \mathbf{R}$, daß $f \in \mathcal{L}(F, \lambda^n)$ genau dann wenn $f \in \mathcal{L}(\tilde{F}, \lambda^n)$ und im Falle der Integrierbarkeit gilt

$$\int_F f \, d\lambda^n = \int_{\tilde{F}} f \, d\lambda^n.$$

Beweis. Nach der Kettenregel gilt $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i}(p) = \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(p)$ und daher

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i}, \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_k} \right\rangle = \sum_{j,\ell=1}^n \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_l} \right\rangle \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_k}(p).$$

Hieraus folgt $\rho_{\tilde{F}}(p) = \rho_F(\varphi(p)) \cdot |J_p \varphi|$ und damit die Behauptung. $\square$

16.4 Flächenstücke und Flußintegrale im $\mathbf{R}^3$

In diesem Abschnitt sei $H = \mathbf{R}^3$. Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Wir erinnern an die Regeln des Kreuzproduktes $v \times w$ von Vektoren v, $w \in \mathbf{R}^3$:

Regeln.

(a) $\forall u, v, w \in \mathbf{R}^3 \colon \langle u \times v, w\rangle = \det(u, v, w)$.

(b) $\forall v, w \in \mathbf{R}^3 \colon v \times w \perp \operatorname{span}\{v, w\}$.

(c) Es gilt die *Lagrange-Identität*

$$\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbf{R}^3 \colon \langle v_1 \times v_2, w_1 \times w_2\rangle = \det(\langle v_i, w_k\rangle);$$

also insbesondere

$$\|v_1 \times v_2\|^2 = \det(\langle v_i, v_k\rangle) = \det(v_1 \times v_2, v_1, v_2).$$

(d) Sind u und v linear unabhängig und ist $w := u \times v$, so ist $\det(u, v, w)$ eine *positiv orientierte* Basis des $\mathbf{R}^3$, d. h. es ist $\det(u, v, w) > 0$.

Regel (a) können wir aufgrund des RIESZschen Darstellungssatzes (vgl. Abschnitt 12.10) zur Definition des Kreuzproduktes erheben.

Proposition.

(a) Für ein 2-dimensionales Flächenelement $F \colon K \to \mathbf{R}^3$ gilt

$$\rho_F = \left\| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\|.$$

(b) Sei $p \in K$ ein regulärer Punkt. Dann ist

$$N_F(p) := \frac{1}{\rho_F(p)} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(p)$$

ein *Einheitsnormalenvektor* auf F, d. h.

$$\|N_F(p)\| = 1 \quad \text{und} \quad N_F(p) \perp T_p F.$$

Für jedes $v \in \mathbf{R}^3$ ist

$$\langle v, N_F(p)\rangle \cdot \rho_F(p) = \left\langle v, \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(p) \right\rangle = \det\Big(v, \frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p)\Big).$$

Dies rechtfertigt die folgende Definition:

Definition. Ist $X\colon F(K) \to \mathbf{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, so heißt die Zahl

$$\int_F \langle X, N_F\rangle \, d\lambda^2 = \int_K \det\Big(X \circ F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\Big) \, d\lambda^2$$

der *(Durch-)fluß* von X durch F.

Deuten wir nämlich X als Geschwindigkeitsvektorfeld einer Flüssigkeitsströmung, so gibt das Integral an, wieviel Flüssigkeit pro Zeiteinheit durch das Flächenstück hindurch fließt, und zwar in der durch N_F beschriebenen Richtung; d. h. daß Flüssigkeitsmengen, welche in entgegengesetzter Richtung fließen, negativ in die Bilanz eingehen.

16.5 Pfaffsche Formen

Wenn nicht Anderes gesagt wird, sei bis zum Ende des Kapitels G eine offene Teilmenge in einem reellen Banachraum E. Weiter sei $r \in \mathbf{N}_0 \cup \{0\}$.

Definition. Unter einer *Pfaffschen C^r-Form* oder einer *C^r-1-Form* auf G verstehen wir eine C^r-Funktion

$$\omega\colon G \to \mathrm{L}(E, \mathbf{R}), p \mapsto \omega_p.$$

Wir können uns unter ω_p eine lineare Wirkung auf die an p angetragen Vektoren $v \in E$ vorstellen.

Beispiel.

(a) Ist $f\colon G \to \mathbf{R}$ eine C^r-Funktion und $r \geq 1$, so ist ihr Differential $df\colon G \to \mathrm{L}(E, \mathbf{R})$ eine Pfaffsche C^{r-1}-Form auf G.

(b) Ist E ein reeller Hilbertraum und X ein C^r-Vektorfeld auf G, so ist

$$\langle X, \cdot\rangle : p \mapsto \langle X_p, \cdot\rangle$$

eine Pfaffsche C^r-Form auf G.

Ist $X = \operatorname{grad} f$ für eine differenzierbare Funktion $f\colon G \to \mathbf{R}$, so ist $\langle X, \cdot\rangle = df$.

Proposition. Ist im Falle $E = \mathbf{R}^n$ ω eine Pfaffsche C^r-Form, $(e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbf{R}^n$ und

$$a_i\colon G \to \mathbf{R}, p \mapsto \omega_p(e_i),$$

so gilt

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i \cdot dx_i, \quad \text{also} \quad \forall p \in G\colon \omega_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \cdot d_p x_i.$$

16.6 Kurvenintegrale

Definition. Sei ω eine stetige 1-Form auf G. Ist dann $\alpha\colon [a,b] \to G$ eine Kurve, so ist

$$[a,b] \to \mathbf{R}, t \mapsto \omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$$

eine stetige Funktion, so daß wir das *Kurvenintegral*

$$\int_\alpha \omega := \int_a^b \omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\, dt$$

definieren können.

Diese Definition wird folgendermaßen auf stückweise C^1-Kurven $\alpha\colon [a,b] \to G$ übertragen: Ist $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, so daß für alle $t = 1, \ldots, n$ die Einschränkung $\alpha|[t_{i-1}, t_i]$ eine C^1-Kurve ist, so sei

$$\int_\alpha \omega := \sum_{i=1}^n \int_{\alpha|[t_{i-1},t_i]} \omega.$$

Diese Definition hängt nicht von der speziellen Wahl der Zerlegung (t_i) ab; vgl. Regel (a) weiter unten.

Beispiele.

(a) Ist $f\colon G \to \mathbf{R}$ eine C^1-Funktion, so gilt für jede Kurve $\alpha\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, daß

$$\int_\alpha df = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

(b) Im Falle $E = \mathbf{R}^n$ gilt für eine gegebene 1-Form $\omega = \sum\limits_{i=1}^n a_i\, dx_i$ und eine Kurve $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\colon G \to \mathbf{R}^n$

$$\int_\alpha \omega = \sum_{i=1}^n \int_a^b (a_i \circ \alpha) \cdot \alpha_i'\, dx.$$

(c) Ist im Falle $E = \mathbf{R}^3$ ein „Kraftfeld“ X (also ein Vektorfeld) auf G gegeben und $\omega := \langle X, \cdot \rangle$, so gibt

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \langle X \circ \alpha, \alpha' \rangle\; dx =: \int_\alpha X \cdot \overrightarrow{ds}$$

die *Arbeit* an, die vom Kraftfeld X bei einer Bewegung von $\alpha(a)$ nach $\alpha(b)$ längs α verrichtet wird.

Sei zum Beispiel H die magnetische Feldstärke eines geraden, unendlich langen Drahtes. Wählen wir die Koordinaten so, daß der Draht mit der z-Achse L zusammenfällt und der Strom I in positiver Richtung der z-Achse fließt, so gilt

$$H = \frac{1}{2\pi} \cdot I \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (-y, x, 0) \quad \text{mit} \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Dieses Feld ist auf $G := \mathbf{R}^3 \setminus L$ definiert. Es gilt

$$\omega := \langle H, \cdot \rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot I \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (x\,dy - y\,dx).$$

Ist $\alpha\colon [a,b] \to G$ eine C^1-Kurve, so schreiben wir

$$\alpha = (r_\alpha \cdot \cos \circ \theta_\alpha, r_\alpha \cdot \sin \circ \theta_\alpha, h_\alpha)$$

in *Zylinderkoordinaten*, wobei $r_\alpha := r \circ \alpha$, $h_\alpha := z \circ \alpha$ und θ_α eine geeignete C^1-Funktion ist. Dann ergibt sich

$$\omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \langle H(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot I \cdot \theta'_\alpha(t),$$

also

$$\int_\alpha \omega = \frac{1}{2\pi} \cdot I \cdot (\theta_\alpha(b) - \theta_\alpha(a))$$

für die magnetische Spannung. Ist insbesondere α eine geschlossene Kurve, so ist

$$\frac{1}{2\pi} \cdot (\theta_\alpha(b) - \theta_\alpha(a)) \in \mathbf{Z}$$

die Anzahl der Windungen von α um die z-Achse.

(d) Wir betrachten ein thermodynamisches System, dessen Menge der makroskopisch unterscheidbaren Gleichgewichtszustände mit Σ bezeichnet sei. Jede Funktion $f\colon \Sigma \to \mathbf{R}$ wird von Physikern eine *Zustandsvariable* genannt; Beispiele sind etwa die Temperatur T, der Druck p, das Volumen V oder die Entropie S. Es sei angenommen, daß die Abbildung $\Phi := (p, V)\colon \Sigma \to \mathbf{R}^2$ eine Bijektion auf eine offene Teilmenge im $\mathbf{R}^2$ definiert. Indem wir die Zustände des Systems via Φ mit Punkten des $\mathbf{R}^2$ identifizieren, betrachten wir Σ als offene Teilmenge des $\mathbf{R}^2$. Bei diesem Vorgehen ist es sinnvoll, die kanonischen Koordinaten des $\mathbf{R}^2$ ihrer physikalischen Bedeutung zufolge mit p bzw. V zu bezeichnen.

Eine Kurve $\alpha\colon J \to \Sigma$ beschreibt einen *Prozeß*, d. h. eine zeitliche Zustandsänderung. Sind t_1, $t_2 \in J$ mit $t_1 < t_2$, so ist mit $\alpha|[t_1, t_2]$ eine Aufnahme bzw. Abgabe einer Wärmemenge $Q(\alpha|[t_1, t_2])$ verbunden. Aufgrund der Erfahrungen existiert eine 1-Form δQ auf Σ, so daß

$$Q(\alpha|[t_1, t_2]) = \int_{\alpha|[t_1, t_2]} \delta Q$$

für alle möglichen Prozesse gilt. Diese 1-Form ist kein (totales) Differential einer Funktion, daher die merkwürdige Bezeichnung δQ. Dieses Beispiel zeigt, daß der „abstrakte“ mathematische Begriff der Pfaffschen Formen notwendig ist, um gewisse physikalische Größen richtig modellieren zu können.

Regeln.

(a) **Kurven-Additivität.** Ist $a < c < b$, so gilt

$$\int_\alpha \omega = \int_{\alpha|[a,c]} \omega + \int_{\alpha|[c,b]} \omega.$$

(b) **Invarianz gegenüber Parametertransformationen.** Ist $\varphi\colon [a', b'] \to [a, b]$ eine C^1-Funktion, $c := \varphi(a')$ und $d := \varphi(b')$, so gilt

$$\int_{\alpha\circ\varphi} \omega = \begin{cases} \int_{\alpha|[c,d]} \omega & \text{falls } c < d, \\ 0 & \text{falls } c = d, \\ -\int_{\alpha|[d,c]} \omega & \text{falls } c > d. \end{cases}$$

Insbesondere gilt also

$$\int_{\alpha\circ\varphi} \omega = \int_\alpha \omega,$$

wenn φ eine *Parametertransformation* ist, d. h. $\varphi' > 0$, $\varphi(a') = a$ und $\varphi(b') = b$, und

$$\int_{\alpha\circ\varphi} \omega = -\int_\alpha \omega,$$

wenn φ die „Wegumkehrung“ beschreibt, d. h. $\varphi(t) = a + b - t$, $a' = a$, $b' = b$.

16.7 Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

Mit $\Omega(G)$ wollen wir die Menge der stückweise C^1-Kurven $\alpha\colon [0,1] \to G$ bezeichnen. Für Punkte p_0, $p_1 \in G$ setzen wir weiterhin $\Omega(G; p_0, p_1) := \{\alpha \in \Omega(G) \mid \alpha(0) = p_0, \alpha(1) = p_1\}$.

Für eine stetige 1-Form ω auf G können wir dann das *Kurvenintegral-Funktional*

$$\int \omega\colon \Omega(G) \to \mathbf{R}, \alpha \mapsto \int_\alpha \omega$$

einführen.

Definition. Das Kurvenintegral $\int \omega$ heißt *wegunabhängig*, wenn für alle p_0, $p_1 \in G$ die Abbildung $\int \omega|\Omega(G, p_0, p_1)$ konstant ist, d. h.

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega(G, p_0, p_1)\colon \int_\alpha \omega = \int_\beta \omega.$$

Ist E ein Hilbertraum und $\omega = \langle X, \cdot\rangle$ für ein Vektorfeld X auf G, so heißt X *konservativ*, wenn das Kurvenintegral $\int \omega$ wegunabhängig ist.

Theorem. Für jede auf G definierte stetige 1-Form ω sind die folgenden Aussagen zueinander äquivalent:

(a) Das Kurvenintegral $\int \omega$ ist wegunabhängig.

(b) Für jede geschlossene stückweise C^1-Kurve $\alpha\colon [a,b] \to G$ gilt $\int_\alpha \omega = 0$.

(c) Es ist ω ein *totales Differential*, d. h. es existiert eine C^1-Funktion $f\colon G \to \mathbf{R}$ mit $df = \omega$. Die Funktion f heißt auch ein *Potential* der 1-Form ω bzw. des Vektorfeldes X; letzteres, wenn E ein Hilbertraum ist und $\omega = \langle X, \cdot\rangle$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung davon ausgehen, daß G wegweise zusammenhängend ist.

Aus (a) folgt (c): Sei $p_0 \in G$. Für jeden Punkt beliebigen $p \in G$ wählen wir dann eine Kurve $\alpha_p \in \Omega(G, p_0, p)$ und setzen

$$f(p) := \int_{\alpha_p} \omega. \tag{1}$$

Wir zeigen jetzt, daß f in $p_1 \in G$ differenzierbar ist, und zwar mit dem Differential ω_{p_1}. Dazu wählen wir eine (konvexe) Umgebung $U_r(p_1) \subseteq G$. Ist $p \in U_r(p_1)$ und bezeichnen wir mit $[p_1, p]$ die Strecke von p_1 nach p, so gilt aufgrund der Wegunabhängigkeit

$$f(p) = \int_{\alpha_p} \omega = f(p_1) + \int_{[p_1,p]} \omega = f(p_1) + \int_0^1 \omega_{p_1 + t\cdot(p-p_1)}(p - p_1)\, dt,$$

für das Restglied also

$$R(p) = f(p) - f(p_1) - \omega_{p_1}(p - p_1) = \int_0^1 (\omega_{p_1+t\cdot(p-p_1)} - \omega_{p_1})(p - p_1)\, dt.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion $\omega.(p - p_1)$ geht $R(p)$ für $p \to p_1$ stärker als von erster Ordnung gegen 0.

Aus (c) folgt (b): Ist $\omega = df$, so folgt für jede geschlossene Kurve $\gamma\colon [a,b] \to G$, daß

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.$$

Aus (b) folgt (a): Sind α, $\beta \in \Omega(G; p_0, p_1)$, so können wir α und β zu einer geschlossenen Kurve

$$\gamma\colon [0,2], t \mapsto \begin{cases} \alpha(t) & \text{für } t \in [0,1], \\ \beta(2-t) & \text{für } t \in [1,2] \end{cases}$$

zusammensetzen. Dann gilt

$$0 = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma|[0,1]} \omega + \int_{\gamma|[1,2]} \omega = \int_\alpha \omega - \int_\beta \omega. \qquad \square$$

Kommentar. In Abschnitt 16.6 haben wir bereits Beispiele für wegunabhängige als auch für wegabhängige Kurvenintegrale kennengelernt. In Abschnitt 16.11 werden wir das POINCARÉsche Lemma kennenlernen, mit welchem sich testen läßt, ob eine 1-Form ein totales Differential ist.

Aufgabe. Es sei $\omega = P\,dx + R\,dy$ eine stetige Differentialform auf einem offenen Quader $Q \subseteq \mathbf{R}^2$, von der wir voraussetzen, daß sie ein totales Differential ist. Man zeige: Ist $p_0 := (a, b) \in Q$, so wird durch

$$f(p) := \int_a^{x(p)} P(t, y(p))\,dt + c(y(p)) \quad \text{mit} \quad c(y) := \int_b^y R(a, s)\,ds$$

ein Potential von ω beschrieben. Dies ist ein merkenswertes Verfahren zur Bestimmung von Potentialen in der 2-dimensionalen Situation. Man entwickle mit diesen Ideen ebenfalls ein Verfahren für die 3-dimensionale Situation.

(Tip: Man benutze Formel (1) und wähle als α_p die „Hakenkurve", die erst in vertikaler Richtung von p_0 nach $(a, y(p))$ und dann in horizontaler Richtung von $(a, y(p))$ nach p verläuft.)

16.8 Alternierende Formen

Was für Kurvenintegrale die 1-Formen, sind für die Integrationstheorie längs n-dimensionaler Flächenstücke (oder auf n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten) die n-Formen. Diese basieren auf dem algebraischen Konzept der alternierenden Form, welches im benötigten Umfang in diesem Abschnitt entwickelt wird.

Definition. Eine stetige n-lineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{L}^n(E, \mathbf{R})$ heißt *alternierend*, wenn für alle $v_1, \ldots, v_n \in E$ schon $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = 0$ gilt, wenn $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und $v_i = v_j$ existieren.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Alt}^n(E)$ den Vektorraum aller derartigen stetigen alternierenden n-linearen Abbildungen. Es sind $\mathrm{Alt}^0(E) = \mathbf{R}$ und $\mathrm{Alt}^1(E) = \mathrm{L}(E, \mathbf{R})$.

Kommentar 1. Ist $\varphi \in \mathrm{Alt}^n(E)$ und sind $v_1, \ldots, v_n \in E$ Vektoren und π eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$, so gilt

$$\varphi(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}) = \operatorname{sign}(\pi) \cdot \varphi(v_1, \ldots, v_n).$$

Kommentar 2. Für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ ist $\mathrm{Alt}^n(E)$ ein abgeschlossener Unterraum des Banachraumes $\mathrm{L}^n(E, \mathbf{R})$ und somit auch ein Banachraum.

Beispiel. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{Alt}^1(E)$, so definieren wir eine alternierende n-lineare Abbildung $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \in \mathrm{Alt}^n(E)$ durch

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \colon (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det(\alpha_i(v_k)).$$

Insbesondere gilt für $\alpha, \beta \in \mathrm{Alt}^1(E)$, daß

$$\forall v, w \in E\colon (\alpha \wedge \beta)(v, w) = \alpha(v) \cdot \beta(w) - \alpha(w) \cdot \beta(v),$$

also insbesondere $\alpha \wedge \alpha = 0$ und damit $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.

Allgemeiner ist die n-lineare Abbildung

$$\bigwedge\colon (\mathrm{Alt}^1(E))^n \to \mathrm{Alt}^n(E), (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$$

alternierend. Dies ist ein grundlegender Sachverhalt, der beim Rechnen mit Differentialformen ständig verwendet wird.

Das „Produkt" $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ ist ein Spezialfall des sogenannten *äußeren Produktes* beliebiger n- und k-Formen.

Regel. Sind $v_1, \ldots, v_n \in E$ linear abhängig, so gilt

$$\forall \varphi \in \mathrm{Alt}^n(E)\colon \varphi(v_1, \ldots, v_n) = 0.$$

Proposition. Sei $m := \dim E$. Dann gilt:

(a) Für alle $n \geq \mathbf{N}_0$ gilt

$$\dim \mathrm{Alt}^n(E) = \binom{m}{n};$$

insbesondere ist

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{Alt}^1(E) = \dim \mathrm{Alt}^{m-1}(E) = m, \\ &\dim \mathrm{Alt}^0(E) = \dim \mathrm{Alt}^m(E) = 1 \end{aligned}$$

und

$$\dim \mathrm{Alt}^n(E) = 0, \quad \text{falls } n > m.$$

(b) Wir setzen

$$I(n,m) := \{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbf{N}_1^n \mid 1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_n \leq m\}.$$

Ist dann $(b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von E und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ die dazu duale Basis von $\mathrm{L}(E, \mathbf{R}) = \mathrm{Alt}^1(E)$, d. h.

$$\forall i, k \in \{1, \ldots, m\}\colon \alpha_i(b_k) = \delta_{ik},$$

so bilden die in obigem Beispiel definierten Abbildungen

$$\alpha_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\nu_n}, \quad (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in I(n,m)$$

eine Basis von $\mathrm{Alt}^n(E)$.

Für jede n-Form $\varphi \in \mathrm{Alt}^n(E)$ erhalten wir damit die eindeutige Darstellung

$$\varphi = \sum_{\nu \in I(n,m)} a_\nu \cdot \alpha_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\nu_n} \quad \text{mit} \quad a_\nu := \varphi(b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_n}).$$

Theorem. Die folgenden Abbildungen sind Vektorraum-Isomorphismen:

(a) $\mathbf{R}^m \to \mathrm{Alt}^1(\mathbf{R}^m), v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$,

(b) $\mathbf{R}^m \to \mathrm{Alt}^{m-1}(\mathbf{R}^m), v \mapsto \det(v, \cdot, \ldots)$,

(c) $\mathbf{R} \to \mathrm{Alt}^m(\mathbf{R}^m), c \mapsto c \cdot \det$.

16.9 Differentialformen

Im Abschnitt 16.5 haben wir bereits gesagt, was eine 1-Form ist. Wir verallgemeinern nun diesen Begriff.

Definition. Eine *C^r-n-Form* oder eine C^r-Form vom *Grad* n auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq E$ ist eine C^r-Funktion

$$\omega\colon G \to \mathrm{Alt}^n(E), p \mapsto \omega_p.$$

Sind $v_1, \ldots, v_n \in E$, so stellen wir uns $\omega_p(v_1, \ldots, v_n)$ als Wirkung von ω auf das von $v_1, \ldots, v_n$ an p aufgespannte Parallelotop $[p; v_1, \ldots, v_n]$ vor.

Beispiel. Differentialformen vom Grad 0 auf G sind gerade die Funktionen $G \to \mathbf{R}$. Die Differentialformen vom Grad 1 sind die Pfaffschen Formen aus Abschnitt 16.5.

Durch Anwendung von Proposition (b) aus Abschnitt 16.8 erhalten wir:

Theorem 1. Jede Differentialform $\omega\colon G \to \mathrm{Alt}^n(\mathbf{R}^m)$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form

$$\omega = \sum_{\nu \in I(n,m)} a_\nu \cdot dx_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\nu_n},$$

also ausführlicher

$$\forall p \in G\colon \omega_p = \sum_{\nu \in I(n,m)} a_\nu(p) \cdot d_p x_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge d_p x_{\nu_n}$$

wobei

$$a_\nu(p) = \omega_p(e_{\nu_1}, \ldots, e_{\nu_n}).$$

Die Differentialform ω ist genau dann C^r-differenzierbar, wenn die Funktionen $a_\nu\colon G \to \mathbf{R}$ jeweils C^r-Funktionen sind.

Wir erhalten insbesondere folgende Typen von n-Formen im $\mathbf{R}^m$:

n	$m=1$	$m=2$	$m=3$
0	f	f	f
1	$f \cdot dx$	$P \cdot dx + Q \cdot dy$	$P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz$
2	0	$f \cdot dx \wedge dy$	$A \cdot dx \wedge dy - C \cdot dx \wedge dz + B \cdot dy \wedge dz$
3	0	0	$f \cdot dx \wedge dy \wedge dz$
4	0	0	0

Ein Beispiel aus der Elektrodynamik. Im $\mathbf{R}^4$ hat eine 2-Form insgesamt $6 = \binom{4}{2}$ Koeffizientenfunktionen a_{ik}. (Physiker sprechen manchmal vom „Sechservektorfeld“ $(a_{ik})_{1 \le i < k \le 4}$. Das ist allerdings keine gute Idee: das Transformationsverhalten einer Differentialform unterscheidet sich doch wesentlich vom Transformationsverhalten eines

Vektors.) Ein wichtiges physikalisches Beispiel ist die FARADAY-*Form* des elektromagnetischen Feldes (E, B)

$$F = E_x\,dt \wedge dx + E_y\,dt \wedge dy + E_z\,dt \wedge dz - (B_x\,dy \wedge dz + B_y\,dz \wedge dx + B_z\,dx \wedge dy). \quad (1)$$

Hier sind (t, x, y, z) offensichtlich die kanonischen Koordinatenfunktionen der *Raumzeit* $\mathbf{R}^4$, in der Zeit und Raum zusammengefaßt werden. Im folgenden soll erläutert werden, welchen Vorteil die FARADAY-Form vor dem Paar (E, B) hat:

Die obige Darstellung von F ist diejenige eines speziellen inertialen Beobachters, der bezüglich seines Inertialsystems (t, x, y, z) die Größen E_x, E_y, usw. ermittelt. Ein anderer inertialer Beobachter ermittelt andere Meßwerte und schreibt daher eine andere 2-Form F auf. Versuchen wir aber die Sache invariant zu sehen. Das mathematische Modell der speziellen Relativitätstheorie basiert auf einem 4-dimensionalen affinen Raum E (vgl. Abschnitt 14.6); sein Richtungsvektorraum ist ein 4-dimensionaler Vektorraum V (zusammen mit dem LORENTZ-„Skalarprodukt“). Die FARADAY-Form des elektromagnetischen Feldes müssen wir eigentlich als eine Funktion

$$F \colon E \to \mathrm{Alt}^2(V)$$

sehen. Dies ist die invariante Sicht. Die Sache mit den Augen eines inertialen Beobachters zu sehen, bedeutet mathematisch die Festlegung eines speziellen Koordinatensystems, gerade so, wie es am Ende des Abschnitts 14.6 beschrieben wurde. Dadurch wird eine Basis von V festgelegt, wodurch ein Vektorraum-Isomorphismus $V \to \mathbf{R}^4$ ausgezeichnet wird. Wenn wir V mit $\mathbf{R}^4$ vermöge dieses Isomorphismus' identifizieren und Theorem 1 anwenden, erhalten wir gerade so einer Darstellung von F, wie sie durch (1) beschrieben wird. Wird ein anderes Koordinatensystem der Darstellung zugrundegelegt (d. h. sehen wir die Sache mit den Augen eines anderen inertialen Beobachters), so erhalten wir natürlich auch andere Koeffizienten E_x, E_y, ... der FARADAY-Form. Die Physiker haben durch ihre Beobachtungen bestätigt, daß diese mathematische Transformation der Koeffizienten E_x, E_y, ... beim Wechsel des Koordinatensystems genau den unterschiedlichen Wahrnehmungen des elektrischen bzw. magnetischen Feldes durch unterschiedliche inertiale Beobachter entspricht. Diese Einsicht führt zu dem Schluß, daß diese 2-Form die richtige mathematische Größe zur Beschreibung des elektromagnetischen Feldes ist.

Eine weitere wichtige Differentialform vom Grad 2 ist die *kanonische symplektische* 2-*Form* über dem Konfigurationsraum eines mechanischen Systems.

Theorem 2. Sei $E = \mathbf{R}^m$.

(a) Jede C^r-Differentialform ω vom Grad 1 auf G ist von der Form

$$\omega = \langle X, \cdot \rangle\,, \quad \text{also} \quad \forall p \in G \colon \omega_p = \langle X_p, \cdot \rangle$$

mit einem C^r-Vektorfeld $X \colon G \to \mathbf{R}^m$.

(b) Jede C^r-Differentialform ω vom Grad m ist von der Form

$$\omega = f \cdot \det, \quad \text{also} \quad \forall p \in G\colon \omega_p = f(p) \cdot \det$$

mit einer C^r-Funktion $f\colon G \to \mathbf{R}$. Insbesondere ist

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = \det .$$

(c) Jede C^r-Differentialform ω vom Grad $m-1$ ist von der Form

$$\omega = \det(X, \dots), \quad \text{also} \quad \forall p \in G\colon \omega_p = \det(X_p, \dots)$$

mit einem C^r-Vektorfeld $X\colon G \to \mathbf{R}^m$. Dieses Vektorfeld ist durch

$$X_p = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \cdot \omega_p(e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_m) \cdot e_i$$

gegeben, wobei die Schreibweise $\widehat{e_i}$ signalisieren soll, daß der Eintrag e_i zu streichen ist.

16.10 Integration von Differentialformen

Wir wollen den Begriff des Kurvenintegrals aus Abschnitt 16.6 auf höhere Dimensionen übertragen. Dazu seien G eine offene Teilmenge eines Banachraumes E, $\omega\colon G \to \operatorname{Alt}^n(E)$ eine stetige n-Form, $K \subseteq \mathbf{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit $\overline{K^o} = K$ und $F\colon K \to E$ eine C^1-Abbildung im Sinne von Abschnitt 16.2 mit $F(K) \subseteq G$.

In dieser Situation ist

$$K \to \mathbf{R}, p \mapsto \omega_{F(p)}\Big(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)\Big)$$

eine stetige Funktion.

Definition 1. Unter dem *Integral* von ω längs der Abbildung F verstehen wir

$$\int_F \omega := \int_K \omega_{F(p)}\Big(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)\Big)\, d\lambda^n(p).$$

Beispiele.

(a) Für eine Kurve $F = \alpha\colon [a,b] \to G$ stimmt die letzte Definition mit der für Kurvenintegrale aus dem Abschnitt 16.6 überein.

(b) Es sei $E = \mathbf{R}^n$ und $\omega = f \cdot det = f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ (vgl. Theorem 2(b) aus Abschnitt 16.9). Weiter sei vorausgesetzt, daß F *orientierungstreu* ist, d. h.

$$\forall p \in K\colon \det(D_pF) = \det\Big(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)\Big) \geq 0.$$

Dann gilt

$$\int_F \omega = \int_F f \, d\lambda^n,$$

wobei die rechte Seite im Sinne von Abschnitt 16.3 zu verstehen ist. Ist insbesondere $K \subseteq G$ und $F\colon K \hookrightarrow G$ die Inklusion, so erhalten wir die wichtige Formel

$$\int_K f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n := \int_F f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_K f \, d\lambda^n,$$

wobei das letzte Integral im Sinne von Kapitel 15 zu verstehen ist.

(c) Sei $E = \mathbf{R}^{n+1}$, und sei N_F ein *Einheitsnormalenvektorfeld* auf F, d. h. eine Funktion $N_F\colon K \to E$, so daß

$$\forall p \in K\colon \Big(\|N_F(p)\| = 1 \wedge N_F(p) \perp T_pF \wedge \det\Big(N_F(p), \frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)\Big) \geq 0 \Big).$$

Sei weiter $\omega = \det(X, \ldots)$ wie in Theorem 2(c) aus Abschnitt 16.9. Dann gilt

$$\int_F \omega = \int_F \langle X, N_F \rangle \, d\lambda^n;$$

vgl. auch Abschnitt 16.4.

Mit dem folgenden Begriff des Rücktransports einer Differentialform werden wir ein Instrument in die Hand bekommen, mit welchem sich die Integrale über Differentialformen sehr elegant behandeln lassen.

Definition 2. Es sei $\tilde{G}$ eine offene Teilmenge in einem weiteren Banachraum $\tilde{E}$ und $F\colon \tilde{G} \to E$ eine C^{r+1}-Abbildung mit $F(\tilde{G}) \subseteq G$. Für jede C^r-Form $\omega\colon G \to \mathrm{Alt}^n(E)$ auf G ist dann der *Rücktransport* oder *Pullback* $F^*\omega\colon \tilde{G} \to \mathrm{Alt}^n(\tilde{E})$ diejenige C^r-Form vom Grade n auf $\tilde{G}$, welche durch

$$\forall p \in \tilde{G}\, \forall v_1, \ldots, v_n \in \tilde{E}\colon (F^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_n) := \omega_{F(p)}(D_pF(v_1), \ldots, D_pF(v_n))$$

definiert ist.

Punkte auf $\tilde{G}$ werden also durch die Abbildung F, Vektoren durch deren Differential transportiert.

In der Situation der Definition gilt:

Proposition.

(a) Die Abbildung $\omega \mapsto F^*\omega$ ist $\mathbf{R}$-linear.

(b) Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n\colon G \to \mathrm{Alt}^1(E)$ jeweils 1-Formen auf G, so gilt

$$F^*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) = F^*\alpha_1 \wedge \cdots \wedge F^*\alpha_n.$$

Die Definition von $F^*\omega$ können wir aufgrund des in Abschnitt 16.2 Gesagten auch für solche C^{r+1}-Abbildungen $F\colon K \to E$ anwenden, wie wir sie in Abschnitt 16.2 eingeführt haben. In dieser Situation gilt:

Theorem. Für jede C^r-Differentialform $\omega\colon G \to \mathrm{Alt}^n(E)$ ist

$$F^*\omega = f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad \text{mit} \quad f\colon K \to \mathbf{R}, p \mapsto \omega_{F(p)}\Big(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)\Big)$$

und

$$\int_F \omega = \int_K F^*\omega.$$

Das letzte Integral kann wie in obigem Beispiel (b) berechnet werden.

Dieser Abschnitt hat uns also gezeigt, daß sich einige der besonders wichtigen Integrale aus den Abschnitten 16.3 und 16.4 vermittels Differentialformen in einfacher Weise beschreiben lassen; Differentialformen scheinen zwar formale Konstrukte zu sein, besitzen aber eine hohe rechnerische Flexibilität.

16.11 Die Cartansche Ableitung von Differentialformen

Definition 1. Die *Cartansche Ableitung* einer C^{r+1}-Form $\omega\colon G \to \mathrm{Alt}^n(E)$ vom Grad n ist die C^r-Form $d\omega$ vom Grad $n+1$, die durch

$$\forall p \in G\, \forall v_0, \ldots, v_n \in E\colon d_p\omega(v_0, \ldots, v_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (D_p\omega(v_i))(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n)$$

gegeben ist (es sei beachtet, daß $D_p\omega(v_i) \in \mathrm{Alt}^n(E)$). Für eine 1-Form ω ist also

$$d_p\omega(v, w) = (D_p\omega(v))(w) - (D_p\omega(w))(v).$$

Proposition 1.

(a) Der Differentialoperator $\omega \mapsto d\omega$ ist linear.

(b) Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}^m$. Für jede C^1-Differentialform der Form

$$\omega = \sum_{\nu \in I(n,m)} a_\nu \cdot dx_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\nu_n}\colon G \to \mathrm{Alt}^n(\mathbf{R}^m)$$

mit Funktionen $a_\nu \in C^1(G, \mathbf{R})$ gilt

$$d\omega = \sum_{\nu \in I(n,m)} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_i} \cdot (dx_i \wedge dx_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\nu_n}).$$

(Zur weiteren Vereinfachung der Formel bei konkreten Rechnungen sei beachtet, daß die $(n+1)$-lineare Abbildung $(\mathrm{Alt}^1(E))^{n+1} \to \mathrm{Alt}^n(E), (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ alternierend ist.)

Beispiele 1.

(a) Ist E ein Hilbertraum und $\omega = \langle X, \cdot \rangle$ für ein C^1-Vektorfeld $X\colon G \to E$, so ist $d_p\omega(v, w) = \langle D_pX(v), w\rangle - \langle D_pX(w), v\rangle$ für alle $p \in G$ und $v, w \in E$.

(b) Ist ω eine C^2-Form vom Grade n, so gilt

$$d^2\omega := d(d\omega) = 0.$$

(c) Ist $E = \mathbf{R}^n$, $X\colon G \to \mathbf{R}^n$ ein C^{r+1}-Vektorfeld und ω die C^{r+1}-Form

$$\omega = \det(X, \dots)$$

vom Grade $n-1$, so hat $d\omega$ als C^r-Form vom Grad n die Gestalt $f \cdot \det$ mit einer Funktion $f \in C^r(G, \mathbf{R})$. Diese Funktion heißt die *Divergenz* oder *Quellstärke* von X und wird mit $\operatorname{div} X$ bezeichnet. Sie erfüllt also die charakteristische Gleichung

$$d \det(X, \dots) = (\operatorname{div} X) \cdot \det .$$

Ist $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \cdot e_i$ mit Funktionen $X_i \in C^{r+1}(G, \mathbf{R})$, so ist

$$\operatorname{div}_p X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(p) = \operatorname{tr}(J_pX) = \operatorname{tr}(D_pX).$$

(d) Ist $E = \mathbf{R}^3$, $X\colon G \to \mathbf{R}^3$ ein C^{r+1}-Vektorfeld und ω die C^{r+1}-Form

$$\omega = \langle X, \cdot \rangle ,$$

so hat $d\omega$ als C^r-Form vom Grad 2 die Gestalt $\det(Y, \cdot, \cdot)$ mit einem geeigneten C^r-Vektorfeld $Y\colon G \to \mathbf{R}^3$. Dieses Vektorfeld Y heißt die *Rotation* oder *Wirbelstärke* von X und wird mit $\operatorname{rot} X$ bezeichnet. Es erfüllt also die charakteristische Gleichung

$$d \langle X, \cdot \rangle = \det(\operatorname{rot} X, \cdot, \cdot);$$

vgl. auch Beispiel (a). Ist $X = \sum\limits_{i=1}^{3} X_i \cdot e_i$ mit Funktionen $X_i \in C^{r+1}(G, \mathbf{R})$, so ist

$$\operatorname{rot} X = \Big(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\Big).$$

(e) Sei $E = \mathbf{R}^3$. Zeige:

(i) Für jede C^2-Funktion $f\colon G \to \mathbf{R}$ ist

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0.$$

(ii) Für jedes C^2-Vektorfeld $X : G \to \mathbf{R}^3$ ist

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0.$$

(Tip: (b).)

Die Maxwellschen Gleichungen. Ist F die Faraday-Form (vgl. Abschnitt 16.9), so lassen sich die ersten beiden Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} B = 0$$

äquivalent durch

$$dF = 0$$

ausdrücken. Definieren wir außerdem

$$*F := -(B_x dt \wedge dx + B_y dt \wedge dy + B_z dt \wedge dz) - (E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy)$$

und

$$J := \rho dx \wedge dy \wedge dz - (j_x dt \wedge dy \wedge dz + j_y dt \wedge dz \wedge dx + j_z dt \wedge dx \wedge dz),$$

so können die anderen beiden Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{rot} B = \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \cdot j \quad \text{und} \quad \operatorname{div} E = \mu_0 \cdot \rho$$

äquivalent durch

$$d(*F) = -\mu_0 \cdot J$$

ausgedrückt werden.

Definition 2. Eine C^1-Differentialform ω heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$ gilt; eine C^0-Differentialform heißt *exakt*, wenn es eine C^1-Form η gibt, so daß $\omega = d\eta$ ist.

Für 1-Formen bedeutet die Exaktheit genau die Existenz eines Potentials; im Theorem aus Abschnitt 16.7 sahen wir, daß dies mit der Wegunabhängigkeit des korrespondieren Kurvenintegrals gleichbedeutend ist; außerdem können bei Kenntnis eines Potentials Kurvenintegrale sehr einfach berechnet werden (vgl. Beispiel (a) aus Abschnitt 16.6). Im obigem Beispiel (b) sahen wir, daß exakte C^1-Formen auch geschlossen sind. Aufgrund der Bedeutung der Exaktheit besteht nun größtes Interesse daran, ob bzw. wann umgekehrt aus der Geschlossenheit einer Differentialform deren Exaktheit folgt. Diese Frage wird in dem folgenden Poincaréschen Lemma behandelt werden.

Proposition 2. Ist $E = \mathbf{R}^n$, so ist eine C^1-1-Form $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot dx_i$ genau dann geschlossen, wenn

$$\forall i, k = 1, \ldots, n \colon \frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}.$$

Definition 3. Eine Teilmenge M eines reellen Vektorraumes E heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $p_0 \in M$ gibt, so daß

$$\forall p \in M \colon [p_0, p] \subseteq M.$$

Einen solchen Punkt p_0 nennen wir einen *Sternpunkt* von M.

Beispiel 2. Jede nicht leere konvexe Teilmenge C eines reellen Vektorraumes ist sternförmig; und zwar sind dies genau diejenigen sternförmigen Teilmengen, für die jedes $p_0 \in C$ ein Sternpunkt von C ist.

Das Poincarésche Lemma. Ist G eine sternförmige offene Teilmenge des Banachraumes E und ist $n \geq 1$, so ist jede geschlossene C^1-Differentialform

$$\omega \colon G \to \operatorname{Alt}^n(E)$$

exakt; genauer: Ist ω eine r-mal stetig differenzierbare n-Form mit $r \geq 1$, so existiert eine r-mal stetig differenzierbare $(n-1)$-Form η auf G mit $d\eta = \omega$.

Kommentare.

(a) Ohne eine geeignete Voraussetzung über die Topologie von G ist das Poincarésche Lemma falsch, wie das Beispiel

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot dy - \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot dx$$

auf $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ zeigt. Zwar ist diese 1-Form geschlossen, aber trotzdem ist $\int_\alpha \omega = 2\pi \cdot n$ für jede geschlossene C^1-Kurve in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, die 0 in mathematisch positivem Sinne n-mal umkreist (vgl. Beispiel (c) aus Abschnitt 16.6); folglich kann ω nach dem Theorem aus Abschnitt 16.7 nicht exakt sein.

(b) Ist ω eine geschlossene C^1-1-Form auf einer beliebigen offenen Teilmenge G von E, so können wir zu jedem $p \in G$ eine konvexe Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(p, G)$ wählen. Nach dem Poincaréschen Lemma existiert dann jeweils eine C^1-Funktion $f_U \colon U \to \mathbf{R}$ mit $df_U = \omega|U$, und diese ist bis auf eine additive „Integrationskonstante“ eindeutig. Nun können wir versuchen, die Integrationskonstante der „lokalen Lösungen“ f_U so zu wählen, daß die f_U zu einer globalen Funktion $f \colon G \to \mathbf{R}$ verkleben. Ist dies der Fall, so ist natürlich $df = \omega$.

Mit dieser Methode läßt sich zeigen, daß das Poincarésche Lemma für 1-Formen (und nur für 1-Formen) richtig bleibt, wenn in ihm die Voraussetzung „sternförmig“ durch „einfach zusammenhängend“ ersetzt wird. Ein topologischer Raum G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er wegweise zusammenhängend ist und wenn je zwei Wege $\alpha_0 \colon [0,1] \to G$ und $\alpha_1 \colon [0,1] \to G$ mit $p_0 := \alpha_0(0) = \alpha_1(0)$ und $p_1 := \alpha_0(1) = \alpha_1(1)$ ineinander deformiert werden können, d. h. wenn eine stetige Abbildung $h \colon [0,1] \times [0,1] \to G$ mit

$$h^0 \equiv p_0, \quad h^1 \equiv p_1, \quad h_0 = \alpha_0 \quad \text{und} \quad h_1 = \alpha_1$$

existiert. (Durch $(h_s)_{s\in[0,1]}$ wird eine stetige Einparameterschar von Wegen von p_0 nach p_1 beschrieben, die bei α_0 beginnt und bei α_1 endet; für die Bezeichnung h_s vgl. Abschnitt 8.11.) Eine derartige Abbildung h wird eine *Homotopie* oder *Deformation* genannt, welche α_0 in α_1 überführt.

(c) Für n-Formen mit $n \geq 2$ lassen sich scharfe topologische Bedingungen (die schwächer als die Sternförmigkeit von G sind) für die Gültigkeit des POINCARÉschen Lemmas nur mit Mitteln der algebraischen Topologie (nämlich durch das Verschwinden der n-ten Kohomologiegruppe $H^n(G, \mathbf{R})$) formulieren; Hintergrund ist das Theorem von DE RHAM.

Korollar. Es sei $X: G \to \mathbf{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld auf einer offenen sternförmigen Teilmenge $G \subseteq \mathbf{R}^3$.

(a) Ist X *wirbelfrei*, d. h. $\operatorname{rot} X = 0$, so besitzt X ein Potential f, d. h. $X = \operatorname{grad} f$.

(b) Ist X *quellenfrei*, d. h. $\operatorname{div} X = 0$, so besitzt X ein *Vektorpotential* $Y: G \to \mathbf{R}^3$, d. h. $X = \operatorname{rot} Y$.

Beweis für das POINCARÉ*sche Lemma.* Es bezeichne $\check{\Phi}$ die Umkehrabbildung des Vereinfachungsisomorphismus

$$\Phi_{1,n-1}: \mathrm{L}(E, \mathrm{L}^{n-1}(E, \mathbf{R})) \to \mathrm{L}^n(E, \mathbf{R})$$

(vgl. Abschnitt 13.12) und Ψ dessen Einschränkung

$$\Psi := \check{\Phi}|\operatorname{Alt}^n(E)\colon \operatorname{Alt}^n(E) \to \mathrm{L}(E, \operatorname{Alt}^{n-1}(E)).$$

Für eine gegebene geschlossene C^r-n-Form $\omega: G \to \operatorname{Alt}^n(E)$ definieren wir die C^r-Funktionen

$$\tilde{\omega} := \Psi \circ \omega\colon G \to \mathrm{L}(E, \operatorname{Alt}^{n-1}(E))$$

und

$$f\colon [0,1] \times G \to \operatorname{Alt}^{n-1}(E), (t,p) \mapsto t^{n-1} \cdot \tilde{\omega}_{a+t(p-a)}(p-a),$$

wobei a ein fest gewählter Sternpunkt von G ist, und die $(n-1)$-Differentialform

$$\eta\colon G \to \operatorname{Alt}^{n-1}(E), p \mapsto \int_0^1 f(t,p)\, dt.$$

Nach dem Theorem über die differenzierbare Abhängigkeit eines Integrals von einem Parameter ist η eine C^r-Funktion mit dem Differential

$$\begin{aligned} D_p\eta(v) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p}(t,p) \cdot v\, dt \\ &= \int_0^1 t^{n-1} \cdot \big(t \cdot (D_{a+t(p-a)}\tilde{\omega}(v))(p-a) + \tilde{\omega}_{a+t(p-a)}(v)\big)\, dt \\ &= \int_0^1 \big(t^n \cdot (D_{a+t(p-a)}\tilde{\omega}(v))(p-a) + t^{n-1} \cdot \tilde{\omega}_{a+t(p-a)}(v)\big)\, dt \end{aligned}$$

für alle $p \in G$ und $v \in E$.

Sind Vektoren $v_2, \ldots, v_n \in E$ gegeben, so ist die Abbildung

$$A\colon \operatorname{Alt}^{n-1}(E) \to \mathbf{R}, \varphi \mapsto \varphi(v_2, \ldots, v_n)$$

stetig linear. Es folgt unter Beachtung von Proposition (b) aus Abschnitt 8.3, daß

$$\begin{aligned}
(D_p\eta(v))(v_2, \ldots, v_n) &= A(D_p\eta(v)) \\
&= A\Big(\int_0^1 \big(t^n \cdot (D_{a+t(p-a)}\tilde{\omega}(v))(p-a) + t^{n-1} \cdot \tilde{\omega}_{a+t(p-a)}(v)\big)\, dt\Big) \\
&= \int_0^1 \big(t^n \cdot (D_{a+t(p-a)}\tilde{\omega}(v))(p-a)(v_2, \ldots, v_n) \\
&\qquad + t^{n-1} \cdot \tilde{\omega}_{a+t(p-a)}(v)(v_2, \ldots, v_n)\big)\, dt \\
&= \int_0^1 \big(t^n \cdot (D_{a+t(p-a)}(\Psi \circ \omega)(v))(p-a)(v_2, \ldots, v_n) \\
&\qquad + t^{n-1} \cdot (\Psi \circ \omega_{a+t(p-a)})(v)(v_2, \ldots, v_n)\big)\, dt \\
&= \int_0^1 \big(t^n \cdot (\Psi(D_{a+t(p-a)}\omega(v)))(p-a)(v_2, \ldots, v_n) \\
&\qquad + t^{n-1} \cdot (\Psi(\omega_{a+t(p-a)}))(v)(v_2, \ldots, v_n)\big)\, dt \\
&= \int_0^1 \big(t^n \cdot (D_{a+t(p-a)}\omega(v))(p-a, v_2, \ldots, v_n) \\
&\qquad + t^{n-1} \cdot \omega_{a+t(p-a)}(v, v_2, \ldots, v_n)\big)\, dt.
\end{aligned}$$

Damit können wir die Cartansche Ableitung von η berechnen; sei dazu $v_1, \ldots, v_n \in E$:

$$\begin{aligned}
d_p\eta(v_1, \ldots, v_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (D_p\eta(v_i))(v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n) \\
&= \int_0^1 \Big(t^n \cdot \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (D_{a+t(p-a)}\omega(v_i))(p-a, v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n) \\
&\qquad + t^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \omega_{a+t(p-a)}(v_i, v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n)\Big)\, dt \\
&= \int_0^1 \Big(-t^n \cdot d_{a+t(p-a)}\omega(p-a, v_1, \ldots, v_n) + t^n \cdot (D_{a+t(p-a)}\omega(p-a))(v_1, \ldots, v_n) \\
&\qquad + n \cdot t^{n-1} \cdot \omega_{a+t(p-a)}(v_1, \ldots, v_n)\Big)\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(t^n \cdot \omega_{a+t(p-a)}(v_1, \ldots, v_n)\Big)\, dt \\
&= \omega_p(v_1, \ldots, v_n).
\end{aligned}$$

□

16.12 Integration über den Rand eines Pflasters

Definition. Sei $Q := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Quader und $F\colon Q \to E$ ein n-dimensionales Pflaster in den Banachraum E. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ setzen wir dann

$$\begin{aligned}\pi_i(Q) &:= [a_1, b_1] \times \cdots \times \widehat{[a_i, b_i]} \times \cdots \times [a_n, b_n],\\ \sigma_i &\colon \pi_i(Q) \to \mathbf{R}^n, (p_1, \dots, \widehat{p_i}, \dots, p_n) \mapsto (p_1, \dots, p_{i-1}, a_i, p_{i+1}, \dots, p_n),\\ \sigma^i &\colon \pi_i(Q) \to \mathbf{R}^n, (p_1, \dots, \widehat{p_i}, \dots, p_n) \mapsto (p_1, \dots, p_{i-1}, b_i, p_{i+1}, \dots, p_n)\end{aligned}$$

und

$$\partial Q := \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i(\pi_i(Q)) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \sigma^i(\pi_i(Q)).$$

Die regulären Pflaster σ_i und σ^i parametrisieren die $2n$ Randflächen von Q. Die Abbildungen $F \circ \sigma_i$ und $F \circ \sigma^i$ heißen die *Randpflaster* von F.

Für jede stetige $(n-1)$-Form $\omega\colon F(\partial Q) \to \mathrm{Alt}^{n-1}(E)$ definieren wir das *Integral über den Rand* ∂F von F durch

$$\int_{\partial F} \omega := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot \Big(\int_{F \circ \sigma^i} \omega - \int_{F \circ \sigma_i} \omega \Big).$$

Die Vorzeichenfestlegung sorgt für konsistente Orientierung bei aneinander stoßenden Randpflastern.

Beispiel. Ist F die „geographische" Parametrisierung der Sphäre $\mathbf{S}^2_R$ (vgl. Abschnitt 16.2), so gilt $\int_{\partial F} \omega = 0$ für jede stetige 1-Form $\omega\colon \mathbf{S}^2_R \to \mathrm{Alt}^1(\mathbf{R}^3)$. Ein vernünftige Theorie muß dieses Ergebnis liefern, schließlich hat eine Sphäre doch überhaupt keinen „anschaulichen" Rand.

16.13 Der Stokessche Integralsatz

Theorem (Der Stokessche Integralsatz)**.** Es seien E ein beliebige Banachraum, G eine offene Teilmenge von E, $\omega\colon G \to \mathrm{Alt}^{n-1}(E)$ eine C^1-Differentialform vom Grade $n-1$ mit $n \geq 1$ und $F\colon Q \to E$ ein n-dimensionales C^2-Pflaster mit $F(Q) \subseteq G$. Dann gilt

$$\int_F d\omega = \int_{\partial F} \omega.$$

Als Spezialfälle erhalten wie hieraus die beiden folgenden Sätze:

Korollar 1 (Der Integralsatz von Gauss)**.** Ist $F\colon Q \to \mathbf{R}^n$ ein n-dimensionales orientierungstreues C^2-Pflaster im $\mathbf{R}^n$ (vgl. Beispiel (b) aus Abschnitt 16.10), so gilt für jedes C^1-Vektorfeld $X\colon G \to \mathbf{R}^n$, das auf einer offenen Teilmenge G von $\mathbf{R}^n$ mit $G \supseteq F(Q)$ definiert ist, daß

$$\int_F \operatorname{div} X \, d\lambda^n = \int_{\partial F} \langle X, N_{\partial F} \rangle \, d\lambda^{n-1};$$

vgl. Abschnitt 16.3, 16.4 und 16.10. Der Fall $n = 2$ ist auch als *Satz von* Green bekannt.

Korollar 2 (Der klassische Satz von STOKES)**.** Ist $F\colon Q \to \mathbf{R}^3$ ein 2-dimensionales C^2-Pflaster im $\mathbf{R}^3$, so gilt für jedes C^1-Vektorfeld $X\colon G \to \mathbf{R}^3$, das auf einer offenen Teilmenge G von $\mathbf{R}^3$ mit $G \supseteq F(Q)$ definiert ist, daß

$$\int_F \langle \operatorname{rot} X, N_F\rangle \; d\lambda^2 = \int_{\partial F} \langle X, \cdot\rangle =: \int_{\partial F} X \cdot \overrightarrow{ds};$$

vgl. Abschnitt 16.3 und 16.6.

Wesentliche Hilfsmittel beim Beweis des Satzes von STOKES sind der Satz von FUBINI, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und folgende Proposition:

Proposition. Es seien $\tilde{G}$ eine offene Teilmenge eines weiteren Banachraumes $\tilde{E}$ und $F\colon \tilde{G} \to E$ eine C^{r+1}-Abbildung mit $F(\tilde{G}) \subseteq G$. Für jede C^r-Form $\omega\colon G \to \operatorname{Alt}^n(E)$ vom Grade n gilt dann die fundamentale Identität (vgl. Abschnitt 16.10):

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

Der Beweis dieser Formel ergibt sich durch elementare Rechnung.

Kommentar (Anschauliche Deutung von $\operatorname{div} X$ und $\operatorname{rot} X$)**.** Es sei $X : G \to \mathbf{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld, welches wir zum Beispiel als Geschwindigkeitsvektorfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit deuten können. Dann geben uns die Integralsätze von GAUSS und STOKES die Möglichkeit, die Divergenz und Rotation von X anschaulich zu deuten.

Es sei $p_0 \in G$ ein Punkt, $B_R(p_0) := \{p \in \mathbf{R}^3 \mid \|p - p_0\| \leq R\} \subseteq G$ ein Ball vom Radius $R \in \mathbf{R}_+$ um p_0, $S_R(p_0) := \partial B_R(p_0)$ sein Rand und F_R die Parametrisierung von $B_R(p_0)$ vermittels Kugelkoordinaten (r, θ, φ). Dann gilt aufgrund des Satzes von GAUSS, daß

$$\operatorname{div}_{p_0} X = \lim_{R\to 0} \frac{3}{4\pi R^3} \int_{\partial F_R} \langle X, N_{\partial F_R}\rangle \; d\lambda^2.$$

Das Integral gibt jeweils die in Richtung der äußeren Normalen durch die Fläche $S_R(p_0)$ pro Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsmenge an, also (aufgrund der Inkompressibilität der Flüssigkeit) die pro Zeiteinheit in $B_R(p_0)$ erzeugte bzw. vernichtete Flüssigkeitsmenge. In diesem Sinne gibt $\operatorname{div} X$ die Quellstärke von X an.

Zur Deutung von $\operatorname{rot}_{p_0} X$ sei (a, b, c) eine positiv orientierte Orthonormalbasis des $\mathbf{R}^3$. Wir interpretieren $\langle \operatorname{rot}_{p_0} X, a\rangle$, indem wir den STOKESschen Satz auf das kreisförmige Pflaster

$$F_R\colon [0, R] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3, (r, \varphi) \mapsto p_0 + r \cdot (\cos(\varphi) \cdot b + \sin(\varphi) \cdot c)$$

anwenden und einen Grenzübergang durchführen:

$$\langle \operatorname{rot}_{p_0} X, a\rangle = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R^2} \int_{\partial F_R} X \cdot \overrightarrow{ds}.$$

Das Integral erfaßt das Wirbeln der Flüssigkeit; daher kann $\operatorname{rot} X$ als diejenige Größe interpretiert werden, die das Rotieren der Flüssigkeit hervorruft.

Aufgabe (Eine Formel für den Flächeninhalt einer ebenen Figur)**.** Sei ein positiv orientiertes C^2-Pflaster $F\colon [0,1]\times[0,1]\to \mathbf{R}^2$ im $\mathbf{R}^2$ gegeben; sei weiter $\alpha\colon [0,4]\to\mathbf{R}^2$ seine „Randkurve", welche durch

$$\alpha(t) := \begin{cases} F(t,0) & \text{für } 0\le t\le 1,\\ F(1,t-1) & \text{für } 1\le t\le 2,\\ F(3-t,1) & \text{für } 2\le t\le 3,\\ F(0,4-t) & \text{für } 3\le t\le 4 \end{cases}$$

definiert ist. Man zeige:

$$\lambda^2(F) = \int_\alpha x\,dy.$$

Korollar 3. Ist $\omega\colon G\to \mathrm{Alt}^n(E)$ eine geschlossene C^1-Form vom Grade n, so gilt für jedes $(n+1)$-dimensionale C^2-Pflaster $F\colon Q\to G$, daß

$$\int_{\partial F}\omega = 0.$$

Warnung. Es ist wichtig, daß das ganze Pflaster (und nicht nur dessen Rand) in G liegt.

Korollar 4.

(a) Ist $X\colon G\to\mathbf{R}^n$ ein *quellenfreies* C^1-Wirbelfeld (d. h. $\operatorname{div} X = 0$), so gilt für jedes n-dimensionale, orientierungstreue (vgl. Beispiel (b) aus Abschnitt 16.10) C^2-Pflaster $F\colon Q\to G$, daß

$$\int_{\partial F}\langle X, N_{\partial F}\rangle\, d\lambda^{n-1} = 0.$$

(b) Ist $X\colon G\to\mathbf{R}^3$ ein *wirbelfreies* C^1-Vektorfeld (d. h. $\operatorname{rot} X = 0$), so gilt für jedes 2-dimensionale C^2-Pflaster $F\colon Q\to G$, daß

$$\int_{\partial F} X\cdot \overrightarrow{ds} = 0.$$

Korollar 5. Seien $F\colon Q\to G$ und $\tilde F\colon Q\to G$ zwei n-dimensionale C^2-Pflaster, wobei G eine offene Teilmenge eines Banachraumes E ist, und für jede C^1-Form $\eta\colon G\to\mathrm{Alt}^{n-1}(E)$ gelte $\int_{\partial F}\eta = \int_{\partial\tilde F}\eta$. Dann gilt für jede exakte C^0-Form $\omega\colon G\to\mathrm{Alt}^n(E)$, daß

$$\int_F\omega = \int_{\tilde F}\omega.$$

Ist in dieser Situation $n=2$, $E=\mathbf{R}^3$ und $X\colon G\to\mathbf{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, welches ein C^1-Vektorpotential Y besitzt (d. h. $X = \operatorname{rot} Y$), so gilt

$$\int_F \langle X, N_F\rangle\, d\lambda^2 = \int_{\tilde F}\langle X, N_{\tilde F}\rangle\, d\lambda^2.$$

Gilt insbesondere $\int_{\partial F} \eta = 0$ für jede C^1-Form $\eta\colon G \to \mathrm{Alt}^{n-1}(E)$ (das trifft beispielsweise zu, wenn F die geographische Parametrisierung von $\mathbf{S}^2$ oder eine Parametrisierung einer geschlossenen Kurve ist), so folgt

$$\int_F \omega = 0$$

für jede exakte C^0-Form $\omega\colon G \to \mathrm{Alt}^n(E)$, bzw. im Falle $n = 2$, $E = \mathbf{R}^3$ und $X : G \to \mathbf{R}^3$ die Formel

$$\int_F \langle X, N_F \rangle \, d\lambda^2 = 0,$$

wenn X ein stetig differenzierbares Vektorpotential besitzt.

Für die Anwendbarkeit dieses Korollars ist natürlich das POINCARÉsche Lemma von großer Bedeutung.

16.14 Der Laplace-Operator und die Greenschen Formeln

In diesem Abschnitt seien G eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, $F\colon Q \to G$ ein orientierungstreues, n-dimensionales C^2-Pflaster und $f,\, g \in C^2(G, \mathbf{R})$.

Definition. Wir setzen

$$\Delta f := -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Der Differentialoperator zweiter Ordnung $f \mapsto \Delta f$ heißt der *Laplace-Operator*.

Proposition. Definieren wir

$$\int_{\partial F} g \cdot \frac{\partial f}{\partial N_{\partial F}} \, d\lambda^{n-1} := \int_{\partial F} \langle g \cdot \operatorname{grad} f, N_{\partial F} \rangle \, d\lambda^{n-1},$$

wobei die rechte Seite nach Abschnitt 16.4 zu berechnen ist, so gelten die GREEN*schen Formeln*

$$\int_{\partial F} g \cdot \frac{\partial f}{\partial N_{\partial F}} \, d\lambda^{n-1} = \int_F (-g \cdot \Delta f + \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f \rangle) \, d\lambda^n,$$

und

$$\int_F (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) \, d\lambda^n = \int_{\partial F} (g \cdot \frac{\partial f}{\partial N_{\partial F}} - f \cdot \frac{\partial g}{\partial N_{\partial F}}) \, d\lambda^{n-1}.$$

Sind $f,\, g \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ und haben beide kompakten Träger, so folgt

$$\int_{\mathbf{R}^n} f \cdot \Delta g \, d\lambda^n = \int_{\mathbf{R}^n} g \cdot \Delta f \, d\lambda^n.$$

In diesem Sinne ist der Laplace-Operator selbstadjungiert.

16.15 Das Liouvillesche Theorem

Theorem. Es sei G eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, $X\colon G \to \mathbf{R}^n$ ein C^2-Vektorfeld, $\Phi\colon D \to G$ der maximale Fluß von X (vgl. Abschnitt 16.1) und $K \subseteq G$ eine kompakte Teilmenge. Dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, so daß

(a) $]-\varepsilon, \varepsilon[\times K \subseteq D$,

(b) die Funktion $f\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbf{R}, t \mapsto \lambda^n(\Phi_t(K))$ differenzierbar ist und

(c) $f'(0) = \int_K \operatorname{div} X \, d\lambda^n$.

Ist insbesondere $\operatorname{div} X = 0$, so gilt

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\colon \lambda^n(\Phi_t(K)) = \lambda^n(K).$$

Die Funktion f beschreibt die Evolution des Volumens von K unter dem Fluß Φ. Somit ist die Divergenz von X für die Volumenänderung verantwortlich.

In den Beweis des Theorems gehen der Transformationssatz, die differenzierbare Abhängigkeit eines Integrals von einem Parameter und das Differential der Determinanten ein. Ein wesentliches Zwischenergebnis ist die infinitesimale Version des Theorems von Liouville:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} ((p, t) \mapsto \det(J_p \Phi_t)) = \operatorname{div}_p X.$$