10. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

21. Dezember 2021*

57. m. Sei $B(\mathbf{R})$ die Menge aller beschränkten Funktionen auf $\mathbf{R}$ versehen mit der Supremumsnorm (vergleiche Aufgabe 31). Bekanntlich (Beispiel (d) aus 4.8) ist der Einheitsball $B_1(0)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $B(\mathbf{R})$. Ist $B_1(0)$ folgenkompakt?

58. s. Beweise: Die Funktion $\sqrt{}\colon [0,\infty[\to \mathbf{R}$ ist gleichmäßig stetig, genügt aber nicht einer Lipschitzbedingung (vergleiche Aufgabe 39 (a)); hingegen ist die Funktion x^2 stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Fazit. Somit ist die Implikationskette

$$f \text{ genügt einer Lipschitzbedingung} \implies f \text{ ist gleichmäßig stetig} \implies f \text{ ist stetig}$$

im allgemeinen nicht umkehrbar.

59. s. Bestimme alle Häufungspunkte der komplexen Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit

$$a_n \coloneqq i^n + 1/2^n.$$

(Dabei darfst Du $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ mit der Metrik des Produktraumes betrachten.)

60. Cesaro-Konvergenz reeller Zahlenfolgen Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Zahlenfolge und sei $(c_n)_{n\geq 1}$ die Folge der arithmetischen Mittel $c_n \coloneqq (\sum_{i=1}^n a_i)/n$. Wir nennen — nach E. Cesaro (1859–1906) — eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ C-konvergent, wenn die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ konvergiert. Ist im Falle der Konvergenz c der Limes

*Die bearbeiteten Übungsblätter sind bis zur Übung am 11. Januar 2022 zu bearbeiten.

der Folge $(c_n)_{n\geq 1}$, so nennen wir c den *Cesaro-Limes* von $(a_n)_{n\geq 1}$ und schreiben $\underset{n\to\infty}{\text{C-lim}}\, a_n = c$.

(a) **s. Der Permanenzsatz.** Beweise: Konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen ein $a \in \mathbf{R}$, so ist $(a_n)_{n\geq 1}$ auch C-konvergent, und es gilt $\underset{n\to\infty}{\text{C-lim}}\, a_n = a$.

(b) **m. Monotonie des Cesaro-Limes.** Beweise: Sind $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ C-konvergente reelle Zahlenfolgen und gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq 1$, so ist auch $\underset{n\to\infty}{\text{C-lim}}\, a_n \leq \underset{n\to\infty}{\text{C-lim}}\, b_n$.

(c) **m. Linearität des Cesaro-Limes.** Beweise: Sind $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ C-konvergente reelle Zahlenfolgen und a, $b \in \mathbf{R}$ mit $\underset{n\to\infty}{\text{C-lim}}\, a_n = a$ und $\underset{n\to\infty}{\text{C-lim}}\, b_n = b$, so gilt:

  (i) $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ ist C-konvergent, und es gilt $\underset{n\to\infty}{\text{C-lim}}(a_n + b_n) = a + b$,

  (ii) Ist $\alpha \in \mathbf{R}$, so ist $(\alpha \cdot a_n)_{n\geq 1}$ C-konvergent, es gilt $\underset{n\to\infty}{\text{C-lim}}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot a$.

(d) **s. Invarianz des Cesaro-Limes unter affinen Transformationen.** Beweise: Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine C-konvergente reelle Zahlenfolge, ist $a \in \mathbf{R}$ mit $\underset{n\to\infty}{\text{C-lim}}\, a_n = a$ und sind α, $\beta \in \mathbf{R}$, so ist $(\alpha \cdot a_n + \beta)_{n\geq 1}$ C-konvergent, und es gilt $\underset{n\to\infty}{\text{C-lim}}(\alpha \cdot a_n + \beta) = \alpha \cdot a + \beta$.

(e) **m.** Zeige: Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine C-konvergente reelle Zahlenfolge, so gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \underset{n\to\infty}{\text{C-lim}}\, a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(f) **m.** Gib eine C-konvergente reelle Zahlenfolge an, die nicht (im üblichen Sinne) konvergent ist.

(g) **m.** Gib eine beschränkte reelle Zahlenfolge an, die nicht C-konvergent ist.

61. Untersuche folgende reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(a) **m.** $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

(b) **s.** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

(Tip: Zeige zunächst $1/\sqrt{k+1} \leq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq 1/\sqrt{k}$.)

(c) **m.** $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$, wobei P/Q eine rationale Funktion sei (vergleiche Aufgabe 13).

62. m.

(a) Seien E ein metrischer Raum und $f\colon E \to E$ eine stetige Abbildung. Zeige: Wenn eine f-Banachfolge gegen einen Punkt $p \in E$ konvergiert, so ist p ein *Fixpunkt* von f, d. h. $f(p) = p$.

(b) Im Heron*schen Verfahren* zur Bestimmung von $\sqrt{a}$ für $a \in \mathbf{R}_+$ werden Banachfolgen bezüglich der Funktion $f = (x + a/x)/2|\mathbf{R}_+$ benutzt. Zeige, daß jede f-Banachfolge konvergiert, und zwar gegen $\sqrt{a}$.

(c) Versuche mittels eines Rechners unter Benutzung des ersten Aufgabenteils Fixpunkte für die Funktionen

$$\cos, \quad \exp(-x), \quad \text{und} \quad \sqrt{}$$

zu ermitteln und jeweils das *Einzugsgebiet* der Fixpunkte zu bestimmen, d. h. die Menge derjenigen Zahlen a_0, für welche die Banachfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ bezüglich der jeweiligen Funktion gerade gegen den Fixpunkt konvergiert. (Die Kosinus-Funktion betrachte dabei als Funktion des Bogenmaßes.) Prüfe Deine experimentellen Ergebnisse an den Graphen der verschiedenen Funktionen.

63. m. Der Cantorsche Durchschnittssatz. Es seien (E, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n\geq m}$ eine Folge nicht-leerer abgeschlossener Teilmengen von E, für welche gelte:

(a) $\forall n \geq m\colon A_{n+1} \subseteq A_n$ und

(b) die Folge $(\operatorname{diam}(A_n))_{n\geq m}$ der *Durchmesser*

$$\operatorname{diam}(A_n) \coloneqq \sup\{d(p, q) \mid p, q \in A_n\}$$

ist eine Nullfolge.

Zeige: Der Durchschnitt $\bigcap\limits_{n\geq m} A_n$ enthält genau einen Punkt, und zwar gilt: Jede Folge $(p_n)_{n\geq m}$ von Punkten $p_n \in A_n$ konvergiert gegen diesen einzigen Punkt $p^* \in \bigcap\limits_{n\geq m} A_n$.

64. Intervallschachtelungsprinzip. Als Spezialfall von Aufgabe 63. ergibt sich das Prinzip der Intervallschachtelung: Es sei $(I_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit den Eigenschaften:

(a) $\forall n \geq 0\colon I_{n+1} \subseteq I_n$.

(b) Die Folge $(b_n - a_n)_{n\geq 0}$ der Intervallängen ist eine Nullfolge.

Dann besteht der Durchschnitt $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ aus genau einem Element.

(a) **m. Nullstellenbestimmung mittels Intervallhalbierungsverfahren.** Seien a, $b \in \mathbf{R}$ und $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion, für die

$$f(a) \cdot f(b) \leq 0 \tag{1}$$

gilt. Damit (?) besitzt f mindestens eine Nullstelle in $[a,b]$, und eine solche wollen wir approximativ berechnen. Dazu setzen wir $I_0 \coloneqq [a,b]$ und $c_0 \coloneqq \frac{1}{2}(a+b)$. Dann (?) besitzt mindestens eines der beiden Intervalle $[a,c_0]$ oder $[c_0,b]$ die (1) entsprechende Eigenschaft. Wir bezeichnen dieses Intervall mit I_1 und fahren damit fort. Iterieren wir dieses Verfahren, so erhalten wir eine Folge $(I_n)_{n\geq 0}$ von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ und eine reelle Zahlenfolge $(c_n)_{n\geq 0}$, wobei wir $c_n \coloneqq \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ definieren.

(i) Zeige: Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gegen ein $c \in [a,b]$, und es gilt $f(c) = 0$.

(ii) Wie viele Iterationsschritte müssen höchstens durchgeführt werden, um c bis auf eine vorgegebene Genauigkeit ε zu berechnen?

(b) **s.** Schreibe ein (Scheme-)Programm zur Bestimmmung einer Nullstelle einer stetigen Funktion f in einem Intervall $[a,b]$, für das (1) gilt, nach dem Intervallhalbierungsverfahren.

(c) **s.** Bestimme mit Deinem Programm alle Nullstellen von

$$f(x) = x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 8x - 44$$

bis auf eine Genauigkeit $\varepsilon_2 \coloneqq 0{,}1$, wobei für den Wert an jeder approximativen Nullstelle c gelten soll: $|f(c)| < \varepsilon_1 \coloneqq 0{,}1$.

Wir wünschen allen Studentinnen und Studenten ein geruhsames und besinnliches Weihnachtsfest, sowie ein gesundes und erfolgreiches 2022.