11. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

11. Januar 2022*

65. m. Seien E und E' metrische Räume, und seien f, $g\colon E \to E'$ stetige Abbildungen. Zeige, daß die Menge $\{p \in E \mid f(p) = g(p)\}$ in E abgeschlossen ist.

66. Sei E ein metrischer Raum.

(a) m. Zeige, daß eine Teilmenge $A \in \mathfrak{P}(E)$ genau dann in E abgeschlossen ist, wenn gilt:

$$\forall p \in E \setminus A \, \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon U_\varepsilon(p) \cap A = \emptyset.$$

(Tip: Proposition aus 4.8.)

(b) s. Sei E' ein weiterer metrischer Raum, seien A und B abgeschlossene Teilmengen von E, sowie $f\colon A \to E'$ und $g\colon B \to E'$ stetige Abbildungen mit $f|(A \cap B) = g|(A \cap B)$. Zeige, daß genau eine Abbildung $h\colon A \cup B \to E'$ mit $h|A = f$ und $h|B = g$ existiert und daß diese Abbildung stetig ist. (Tip: Für $p \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ benutze Aufgabenteil (a).)

67. s.

(a) Sei $B\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine lineare Abbildung; bekanntlich wird diese bezüglich der kanonischen Basis eindeutig durch eine $(n \times n)$-Matrix $(b_{ik})_{i,k=1,\ldots,n}$ beschrieben. Sei weiter $M \coloneqq \max\{\sum_{k=1}^n |b_{ik}| \mid i = 1, \ldots, n\}$ die *Zeilensummennorm* dieser Matrix $(b_{ik})_{i,k}$. Ferner bezeichne $\|\cdot\|$ die Maximumsnorm des $\mathbf{R}^n$ (siehe Beispiel 2 aus Abschnitt 5.2). Zeige:

$$\forall v \in \mathbf{R}^n \colon \ \|Bv\| \leq M \cdot \|v\| \, .$$

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 18. Januar 2022 zu bearbeiten.

Bemerkung. Die Zahl M werden wir später als die *Operatornorm* der linearen Abbildung B bezüglich der Maximumsnorm des $\mathbf{R}^n$ erkennen.

(b) Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit n Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k = b_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

für n Unbekannte $v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{R}$ mit $a_{ik}, b_i \in \mathbf{R}$ für $i, k = 1, \ldots, n$. Ein solches LGS läßt sich bekanntlich immer in der Form

$$Av = b$$

schreiben, wobei $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ die durch $(a_{ik})_{i,k=1,\ldots,n}$ beschriebene lineare Abbildung ist, und $v = (v_1, \ldots, v_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$.
Zeige: Gilt $M < 1$ für die Operatornorm der linearen Abbildung

$$B := A - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n,$$

so besitzt das LGS (1) genau eine Lösung.
(Tip: Finde eine geeignete Abbildung $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, auf die Du den Banachschen Fixpunktsatz anwenden kannst.)

Interpretation. Für $A = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$ besitzt das LGS (1) natürlich genau eine Lösung, und obiges Resultat besagt nun, daß (1) auch dann noch genau eine Lösung besitzt, wenn sich A „nicht zu weit entfernt von der Identität befindet“.

68. s. Zeige: Für vier paarweise verschiedene komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 mit $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) z_1, z_2, z_3 und z_4 bilden die Ecken eines Rechtecks.

(b) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

(c) z_1, z_2, z_3 und z_4 sind die Nullstellen eines Polynoms $(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)$ mit $a, b \in \mathbf{C}$, $a^2 \neq b^2$, $|a| = |b|$.

(Tip: Im Beweis dürfen auch Winkelüberlegungen angestellt werden. Bekanntlich besitzt jede komplexe Zahl z die Darstellung $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ mit $\varphi \in [0, 2\pi[$.)

69. m. Zeige: In jedem normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum sind die ε-Umgebungen konvex. Dazu beachte:

Definition. Eine Teilmenge M eines $\mathbf{K}$-Vektorraumes E heißt *konvex*, wenn für je zwei Vektoren v, $w \in M$ auch deren *Verbindungsstrecke*

$$[v, w] := \{v + t \cdot (w - v) = (1 - t) \cdot v + t \cdot w \mid t \in [0, 1]\}$$

ganz in M liegt.

70. m. Zeige:

(a) Ist V ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum und ist U ein Untervektorraum von V, so ist die abgeschlossene Hülle $\overline{U}$ ebenfalls ein Untervektorraum von V, d. h. mit u, $v \in \overline{U}$ und $a \in \mathbf{K}$ sind auch $u + v \in \overline{U}$ und $a \cdot u \in \overline{U}$.

Bemerkung. In endlich-dimensionalen Vektorräumen gilt sogar, daß jeder Untervektorraum abgeschlossen ist.

(b) Ist V ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum und $A \subseteq V$ konvex, dann ist auch $\overline{A}$ konvex.