12. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

18. Januar 2022*

71. m. Seien E und F zwei normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume, und sei $A\colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Zeige, daß dann die folgenden drei Aussagen zueinander äquivalent sind:

(a) A ist in $0 \in E$ stetig.

(b) A ist gleichmäßig stetig.

(c) Es existiert eine Konstante $M \in [0, \infty[$, so daß

$$\forall v \in E\colon\ \|A(v)\| \leq M \cdot \|v\|\,. \tag{1}$$

Gilt (c), so ist $M \coloneqq \sup\{\|A(v)\| \mid \|v\| \leq 1\}$ die kleinste Konstante, für die (1) gültig ist. Insbesondere gilt (siehe Aufgabe 67), daß jede lineare Abbildung $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ bezüglich der Maximumsnorm stetig ist.

72. s. Seien E und E' normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume, und sei

$$L(E, E') \coloneqq \{A\colon E \to E' \mid A \text{ ist linear und stetig}\}$$

der Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen $E \to E'$. Dabei wird die Vektorraumstruktur wie in Beispiel 4 in 5.2 durch punktweise Addition bzw. Multiplikation mit Skalaren auf $\mathbf{K}$ erzeugt.

(a) Zeige, daß durch

$$\|A\| \coloneqq \sup\{\|A(v)\| \mid v \in E \wedge \|v\| \leq 1\}$$

eine Norm auf $L(E, E')$ definiert wird, die sogenannte *Operatornorm.*

(b) Zeige, daß die Abbildung

$$\Phi\colon L(E, E') \times E \to E', (A, v) \mapsto A(v)$$

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 25. Januar 2022 zu bearbeiten.

bilinear und stetig ist.

(c) Zeige, daß in Verallgemeinerung von Aufgabe 67 (b) gilt: Ist E ein *beliebiger* Banachraum und $A \in L(E, E)$ mit $\|A - \mathrm{id}_E\| < 1$, so ist die lineare Gleichung $Ax = b$ für jedes $b \in E$ eindeutig lösbar.

73. s. Es seien M eine Menge, E, E' metrische Räume, $(f_n)_{n \geq m}$ eine Folge von Abbildungen $f_n\colon M \to E$, $f\colon M \to E$ eine weitere Abbildung und $g\colon E \to E'$ eine *stetige* Abbildung. Zeige:

(a) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ punktweise gegen f, so konvergiert auch die Folge $(g \circ f_n)_{n\geq m}$ punktweise gegen $g \circ f$.

(b) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ gleichmäßig gegen f und ist g sogar gleichmäßig stetig, so konvergiert auch die Folge $(g \circ f_n)_{n\geq m}$ gleichmäßig gegen $g \circ f$.

(c) Ist E das Produkt metrischer Räume $E_1, \dots, E_N$, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ genau dann punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen f, wenn für jedes $k = 1, \dots, N$ die Folge $(\mathrm{pr}_k \circ f_n)_{n\geq m}$ punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen $\mathrm{pr}_k \circ f$ konvergiert.

74. (a) m. Untersuche die Funktionenfolge $(x^n | [0,1])_{n\geq 0}$ auf punktweise und auf gleichmäßige Konvergenz.

(b) s. Bestimme alle Punkte, in denen die Funktionenfolge

$$\left(\frac{x^n}{1 + x^{2n}}\right)_{n\geq 0}$$

konvergiert. Wie lautet die Grenzfunktion? Gib die Intervalle an, auf denen gleichmäßige Konvergenz vorliegt!

75. m. Zeige: Es gibt in $\mathbf{R}$ absolut konvergente Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$.