13. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

25. Januar 2022*

76. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz in **R**.

(a) **m.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

(b) **m.** $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2^k+1}\right)^k$

(c) **m.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt{\frac{k+1}{k^3}}$

(d) **s.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

(e) **s.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{(k+1)^k}$

(f) **s.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3k+1}$

77. **s.** Zeige:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{3^k}\right) = \frac{11}{4}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k(k+1)(k+2)} = \frac{5}{4}$

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am am 1. Februar 2022 zu bearbeiten.

78. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert bekanntlich gegen eine reelle Zahl $a \in \mathbf{R}$ (genauer: $a = -\ln 2$).

(a) Zeige:

(i) **m.** $-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + + - - \cdots = a.$

(ii) **s.** $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - + + - \cdots = \frac{a}{2}.$

(Ihr wißt schon, welche Umordnungen der Reihe wir damit meinen, oder?)

(b) **m.** Ordne die alternierende harmonische Reihe so um, daß die umgeordnete Reihe gegen ∞ konvergiert.

79. **m. Achilles und die Schildkröte.** Zenon von Elea (495–435 v. Chr.), Philosoph aus Elea, ließ Achilles, den schnellsten Läufer des Altertums (11 Sekunden auf 100 Meter), in Gedanken gegen eine Schildkröte zum einem Wettlauf antreten. Da Achilles fünfzigmal so schnell wie die Schildkröte lief, wurde dieser ein Vorsprung von 100 Metern zugestanden. Beide liefen gleichzeitig los. Trotz seiner Schnelligkeit konnte Achilles die Schildkröte merkwürdigerweise nicht erreichen: Denn als er 100 Meter zurückgelegt hatte, war auch die Schildkröte ein Stück weitergelaufen; bei Erreichen dieses Punktes war die Schildkröte schon wieder ein Stück voraus, ...

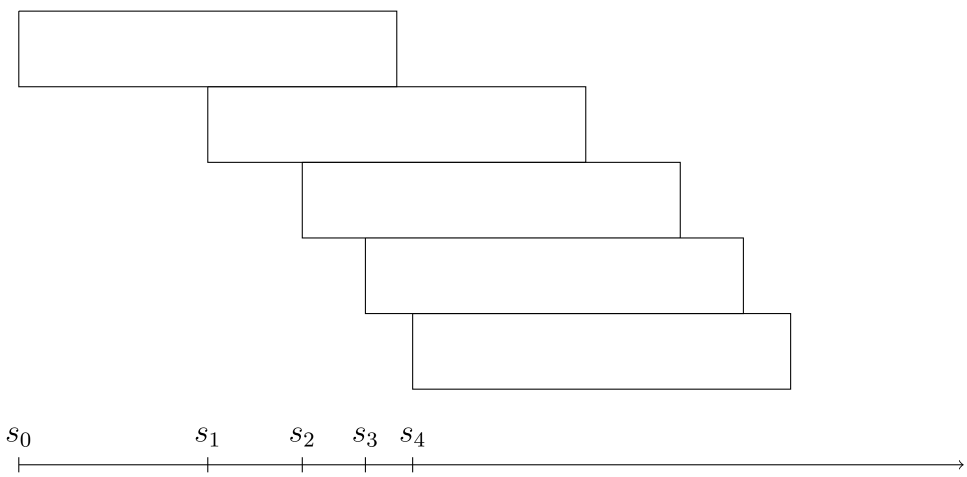
Löse dieses Paradoxon des Zenon von Elea durch Argumentation mit unendlichen Reihen auf und überprüfe das Resultat („Zeitpunkt des Erreichens“) durch die übliche physikalische Argumentation.

80. **s. Ein schiefer Turm.** Ein Architekt gibt bei Dir die Klärung des folgenden Problems in Auftrag: Durch Aufeinanderstapeln (gleich großer) Ziegelsteine soll (ohne Zuhilfenahme von Zement o. ä.) ein möglichst schiefer Turm konstruiert werden, und zwar soll jede „Etage“ nur aus einem Stein bestehen. (Da der Architekt im Auftrag eines finanzstarken Auftraggebers handelt, ist die Frage der benötigten Steine und der damit verbundenen Kosten kein Problem, über das Du Dir Gedanken machen mußt.) Löse das Problem des Architekten!

Zur Konstruktion sei Folgendes gesagt:

- Der Turm bricht nicht zusammen, wenn jeweils der gemeinsame Schwerpunkt aller oberhalb eines Steines S liegenden Steine über dem Stein S liegt.
- Aus der Physik wissen wir: Sind K_1 und K_2 zwei Körper vom Gewicht m_1 bzw. m_2, und sind die x-Koordinaten ihrer Schwerpunkte bezüglich eines gegebenen (kartesischen) Koordinatensystems durch s_1 und s_2 gegeben, so berechnet sich die x-Koordinate des Schwerpunktes von $K_1 \cup K_2$ nach der Formel $\dfrac{m_1 s_1 + m_2 s_2}{m_1 + m_2}$.

- Beginne die Konstruktion (in Gedanken) mit den beiden obersten Ziegelsteinen; berechne den Schwerpunkt des Körpers, der aus diesen beiden Steinen besteht und überlege, wie weit der vorletze Stein über den vorvorletzten herausragen kann …



81. s. Zeige: Die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ im normierten Vektorraum E konvergiert sicherlich nicht, wenn für die Folge der reellen Zahlen $a_n := \|v_n\|$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) Es existiert ein $n_0 \geq m$, so daß $\forall n \geq n_0\colon (a_n \neq 0 \wedge a_{n+1}/a_n \geq 1)$.

(b) Für unendlich viele $n \geq \max\{2, m\}$ gilt $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$.

82. m. Cauchysches Verdichtungslemma. Zeige: Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Folge nicht negativer reeller Zahlen, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann in $\mathbf{R}$, wenn die „verdichtete" Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ in $\mathbf{R}$ konvergiert.

83. m. Zeige für einen metrischen Raum E:

(a) E und $\emptyset$ sind offene Teilmengen von E.

(b) Für jede Familie $(G_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen G_i von E ist auch die Vereinigung $\bigcup_i G_i$ eine offene Teilmenge von E.

(c) Für je endlich viele offene Teilmengen $G_1, \ldots, G_n$ von E ist auch der Durchschnitt $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ eine offene Teilmenge von E.

(d) Für jede Teilmenge G von E gilt:

$$G \text{ ist offen in } E \iff E \setminus G \text{ ist abgeschlossen in } E.$$