14. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

1. Februar 2022*

84. Zeige:

(a) **m.** Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zahlen $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so konvergiert die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

gegen eine reelle Zahl $a \in [0, 1]$. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ nennen wir eine *Dezimaldarstellung* von a.

(b) **m.** Jede reelle Zahl $a \in [0, 1]$ besitzt eine Dezimaldarstellung $(a_n)_{n\geq 1}$. Für $a \neq 1$ kann sie mittels der *Gauß-Klammer* $\lfloor t \rfloor \coloneqq \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq t\}$ für $t \in \mathbf{R}$ rekursiv definiert werden:

$$a_1 \coloneqq \lfloor 10 \cdot a \rfloor \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbf{N}_1 \colon a_{n+1} \coloneqq \left\lfloor 10^{n+1} \cdot \left(a - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 10^{-k} \right) \right\rfloor .$$

(c) **s.** Jedes $a \in [0, 1[$ besitzt höchstens zwei Dezimaldarstellungen: Ist $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Dezimaldarstellung von a, die von der in (b) angegebenen abweicht, so existiert genau ein $m \in \mathbf{N}_1$, so daß

(i) $\forall n < m \colon a_n = b_n$,

(ii) $a_m = b_m + 1$,

(iii) $\forall n > m \colon \big(a_n = 0 \wedge b_n = 9\big)$.

Insbesondere ist die Dezimaldarstellung irrationaler Zahlen $a \in]0, 1[$ eindeutig.

(d) **s.** Besitzt $a \in [0, 1]$ eine *periodische* Dezimaldarstellung $(a_n)_{n\geq 1}$, d. h. gilt

$$\exists p \in \mathbf{N}_1 \, \forall n \in \mathbf{N}_1 \colon a_{n+p} = a_n,$$

so ist $a \in \mathbf{Q}$.

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am am 8. Februar 2022 zu bearbeiten.

85. m. Sei $z \in \mathbf{C}$. Zeige, daß die *Lambert-Reihe*

$$L(z) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1 - z^k}$$

für $|z| < 1$ konvergiert und für $|z| > 1$ divergiert.

86. s. Zeige, daß in Theorem 2 aus 5.13 die absolute Konvergenz mindestens einer der beiden Reihen nötig ist.

(Tip: $u_0 \coloneqq v_0 \coloneqq 0$ und $u_k \coloneqq v_k \coloneqq (-1)^k \cdot (1/\sqrt{k})$ für $k \geq 1$.)

87. m. Es seien E und E' metrische Räume, $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine nicht leere Teilmenge von E, $p_0 \in E$, $q \in E'$ und $f\colon M \to E'$ eine Abbildung. Zeige:

(a) Ist p_0 ein Häufungspunkt von M, so ist p_0 auch ein Häufungspunkt von jeder Teilmenge $N \in \mathfrak{P}(E)$ mit $N \supseteq M$.

(b) Es gibt metrische Räume F einer jeden Mächtigkeit, so daß jeder Punkt von F ein isolierter Punkt von F ist.

(c) Ist p_0 ein Häufungspunkt einer Teilmenge $A \in \mathfrak{P}(M)$ und ist $\lim_{p_0} f = q$, so gilt auch $\lim_{p_0}(f|A) = q$.

88. m. Sei $f\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$f(t,s) = \begin{cases} \frac{ts}{t^2+s^2} & \text{falls } (t,s) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (t,s) = (0,0). \end{cases}$$

Zeige: Für jedes $t \in \mathbf{R}$ ist die Funktion $f_t\colon s \mapsto f(t,s)$ stetig. Genauso ist für jedes $s \in \mathbf{R}$ die Funktion $f^s\colon t \mapsto f(t,s)$ stetig. Dennoch ist f nicht stetig im Punkt $(0,0)$. Mache Dir ein Bild von f.

89. s. Sei $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} t^n \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{für } t \neq 0, \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Untersuche, für welche $n \in \mathbf{N}_0$ die Funktion f in 0 differenzierbar ist.

90. **(a)** **s.** Seien a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$, I ein offenes Intervall von $\mathbf{R}$ mit $[a, b] \subseteq I$, E ein $\mathbf{K}$-Banachraum und $f\colon I \to E$ eine differenzierbare Funktion mit $f(a) = 0$. Zeige: Die Funktion $g := \|f\| \,|[a, b]$ ist ebenfalls in a differenzierbar, und es gilt $g'(a) = \|f'(a)\|$. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an f folgt sogar die Differenzierbarkeit von $\|f\|$ in a?

(b) **m.** Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{K})$ eine Teilmenge von $\mathbf{K}$, E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, sowie $f\colon D \to E$ und $g\colon D \to \mathbf{K}$ Abbildungen. Ferner sei f in $a \in D$ differenzierbar, und es gelte $f(a) = 0$. Zeige: Ist eine der Bedingungen

(i) g ist in a stetig,

(ii) $f'(a) = 0$ und g ist in einer Umgebung von a beschränkt

erfüllt, so ist auch $g \cdot f$ in a differenzierbar. Berechne in beiden Fällen $(g \cdot f)'(a)$.