15. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

8. Februar 2022*

91. m. Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{K})$ eine nicht leere offene Teilmenge von $\mathbf{K}$ und $f\colon D \to \mathbf{K}$ eine in $a \in D$ differenzierbare Funktion. Wir setzen voraus, daß a ein Fixpunkt von f ist, und definieren $q \coloneqq (1 + |f'(a)|)/2$. Zeige:

(a) Ist $f'(a) \neq 1$, so ist a ein *isolierter Fixpunkt*, d. h. a ist ein isolierter Punkt der Menge $\mathrm{Fix}(f)$ aller Fixpunkte von f. (Vergleiche die Definition (c) aus 6.2.)

(b) Ist $|f'(a)| < 1$, also $0 < q < 1$, so existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $U_\delta(a) \subseteq D$ und

$$\forall t \in \dot{U}_\delta(a)\colon\ |f(t) - a| < q \cdot |t - a|$$

(d. h. insbesondere $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\delta(a)$). Für jedes $t_0 \in U_\delta(a)$ konvergiert daher (?) die Banachfolge bezüglich f mit Startpunkt t_0 gegen a.

(Man nennt a deshalb auch einen *Attraktor* (oder *anziehenden* Fixpunkt) von f.

(c) Ist $|f'(a)| > 1$, also $1 < q$, so existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $U_\delta(a) \subseteq D$ und

$$\forall t \in \dot{U}_\delta(a)\colon\ |f(t) - a| > q \cdot |t - a|\,.$$

Existiert zu $t_0 \in \dot{U}_\delta(a)$ die Banachfolge $(t_n)_{n \geq 0}$ bezüglich f mit Startpunkt t_0, so verläßt diese daher (?) irgendwann $U_\delta(a)$.

(Man nennt a deshalb auch einen *Repeller* (oder *abstoßenden* Fixpunkt) von f.)

92. m. Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}$, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbf{R}^n$ eine Funktion. Ist f stetig auf D und differenzierbar auf $D \setminus \{a\}$ und gilt $\lim_a f' = v \in \mathbf{R}^n$, so ist f differenzierbar in a mit $f'(a) = v$.

(Tip: Behandle zunächst den Fall $n = 1$.)

*Die Übungsblätter sind bis zum 1. März 2022 zu bearbeiten und in den Analysisbriefkastem im Gebäude L1 zu werfen. Die mündlichen Aufgaben sind für die erste Analysis-II-Übungsstunde vorzubereiten.

93. s. Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathbf{R}$, $a \in D$, E ein $\mathbf{K}$-Banachraum und $f\colon D \to E$ eine Funktion. Zeige: Ist f in a differenzierbar und sind $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei Folgen in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und

$$\forall n \in \mathbf{N}_0\colon (a_n < b_n \wedge a_n \leq a \leq b_n),$$

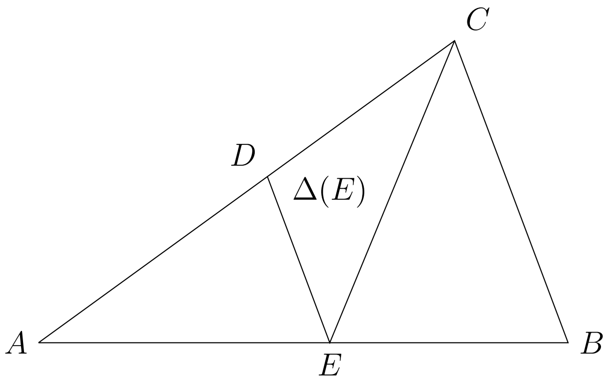
so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(a).$$

(Tip: Affine Approximation.)

94. m. Es sei ein beliebiges Dreieck mit den Eckpunkten A, B, $C \in \mathbf{R}^2$ und den Seitenlängen a, b, c gegeben. Für je zwei Punkte P, $Q \in \mathbf{R}^2$ sei mit $\overline{PQ}$ die Strecke $\{P + t(Q - P) \mid t \in [0, 1]\}$ bezeichnet.

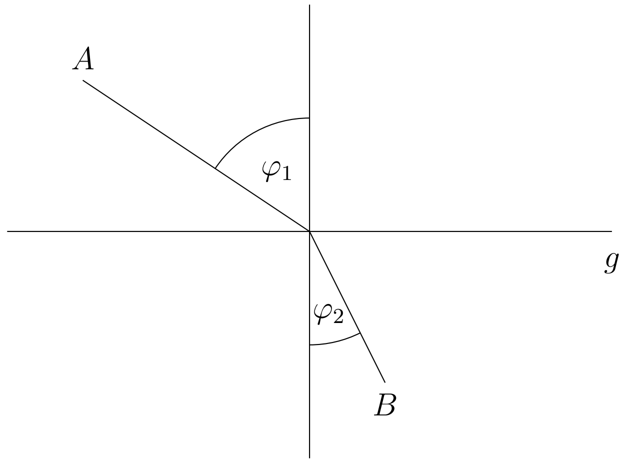
Für jeden Punkt E auf $\overline{AB}$ sei D der Schnittpunkt zwischen $\overline{AC}$ und einer Parallelen zu $\overline{BC}$ durch E. Mit $\Delta(E)$ bezeichnen wir das Dreieck mit den Eckpunkten C, D und E.



Bestimme nun den Punkt E so, daß die Fläche von $\Delta(E)$ maximal wird.

(Tipp: $E(t) = A + t \cdot (B - A)$. Benutze die Strahlensätze.)

95. s. Eine Tagesetappe bei der Rallye Paris–Dakar führt durch die Wüste von Oase A zu Oase B. Aufgrund der Geländebeschaffenheit können die Teilnehmer oberhalb einer Geraden g mit der Geschwindigkeit v_1 und unterhalb von g mit der Geschwindigkeit v_2 fahren: Zeige: Der Zeitaufwand der Strecke im folgenden Bild ist minimal, wenn $v_1 \cdot \sin(\varphi_2) = v_2 \cdot \sin(\varphi_1)$.



Nach Pierre de Fermat (1601–1665) ist folgendes Prinzip bekannt: „Ein Lichtstrahl, der unter vorgegebenen Nebenbedingungen von einem Punkt A zu einem Punkt B gelangen soll, schlägt immer den Weg ein, der die kürzeste Zeit erfordert.“

Frage an die Physikstudenten: Was hat Fermat mit Paris–Dakar zu tun?

96. m.

(a) Ein Unternehmer will ins Eintopfgeschäft einsteigen. Seine „Erbsensuppe Spezial“ soll in zylindrischen Blechdosen (von vorgegebener Blechstärke) mit dem Volumen V verkauft werden. Welche Maße müssen die Dosen haben, damit der Materialaufwand minimal wird?

(b) Hans Raser will sein neues Motorrad seiner Freundin Helga vorführen. Ihr Haus liegt im Abstand h von der geradlinig verlaufenden Landstraße mitten auf einer großen Wiese. Auf der Landstraße fährt er 100 km/h und auf der Wiese 40 km/h. Wo muß Hans von der Straße auf die Wiese abbiegen, um möglichst schnell zu Helga zu kommen?

97. s. Das Newtonsche Nullstellenverfahren. Seien I ein nicht leeres, offenes Intervall in $\mathbf{R}$, $a \in I$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung keine Nullstelle besitzt. Also ist f streng monoton (vgl. 6.10) und besitzt somit höchstens eine Nullstelle. Es sei $g := x - f/f'$. Zeige:

(a) Für jedes $a \in I$ ist $g(a)$ die Nullstelle der affinen Approximation

$$t \mapsto f(a) + f'(a) \cdot (t - a)$$

von f im Punkt a, deren Graph bekanntlich die Tangente an den Graphen von f im Punkte $(a, f(a))$ ist.

(b) Es ist a genau dann Nullstelle von f, wenn a ein Fixpunkt von g ist.

(c) Ist a eine Nullstelle von f und ist f' in a stetig, so ist g in a differenzierbar mit Ableitung $g'(a) = 0$, und somit (?) ist a ein anziehender Fixpunkt von g (vgl. Aufgabe 91.); insbesondere existiert also ein $r \in \mathbf{R}_+$, so daß für jedes $t_0 \in U_r(a)$ die „Newton-Folge“ $(t_n)_{n\geq 0}$ mit

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$$

gegen a konvergiert.

(d) Das Heronsche Verfahren zur Ermittlung von Quadratwurzeln kann als Newtonsches Nullstellenverfahren für eine geeignete Funktion betrachtet werden. Für welche?

(e) Ein Nachteil des Newtonschen Nullstellenverfahrens besteht darin, daß die Ableitung der zu untersuchenden Funktion bekannt sein muß. Dieser Mangel läßt sich dadurch beheben, daß die Ableitung $f'(t_n)$ durch den Differenzenquotienten $(f(t_n) - f(t_{n-1}))/(t_n - t_{n-1})$ ersetzt wird. In diesem Falle müssen natürlich zwei Startwerte t_0 und t_1 vorgegeben werden. Dadurch (?) gelangen wir zur rekursiven Definition

$$t_{n+1} = \frac{t_{n-1} \cdot f(t_n) - t_n \cdot f(t_{n-1})}{f(t_n) - f(t_{n-1})}$$

für $n \geq 1$. Das hierdurch beschriebene Nullstellenverfahren heißt das *Sekantenverfahren*, oder auch die Nullstellenbestimmung nach der *regula falsi*. Zeige, daß in Analogie zu (a) gilt: Das Folgeglied t_{n+1} wird durch den Schnittpunkt der x-Achse mit der Sekante durch die Punkte $(t_{n-1}, f(t_{n-1}))$ und $(t_n, f(t_n))$ festgelegt.

Mache Dir die Wirkungsweise des Newtonschen Nullstellenverfahrens und des Sekantenverfahrens an Skizzen klar.

(f) Prüfe das Sekantenverfahren an dem Polynom

$$f = x^3 + \frac{11}{2}\,x^2 - 8\,x - 44.$$

(g) Schreibe ein (Scheme-)Programm zur Berechnung einer Nullstelle einer Funktion mit Hilfe des Newtonschen Nullstellenverfahrens.

Die Klausur findet am 19. März 2022 in der Zeit von 8:30–11:00 Uhr im Sigma-Park.

Wir wünschen allen Studentinnen und Studenten viel Erfolg bei der Klausur!