1. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

29. April 2022*

98. m. Über Fehlerfortpflanzung.

(a) Seien D eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}$, $f\colon D \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion, $t_0 \in D$ und $\delta \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\delta(t_0) \subseteq D$. Man zeige: Existieren m, $M \in \mathbf{R}$ mit
$$\forall t \in U_\delta(t_0)\colon m \leq |f'(t)| \leq M,$$
so gilt für alle $h \in \mathbf{R}$ mit $|h| < \delta$, daß
$$m \cdot |h| \leq |f(t_0 + h) - f(t_0)| \leq M \cdot |h|\,.$$

(b) Man schätze den Fehler ε ab, wenn man bei der Berechnung von π^7 den Näherungswert $\pi \approx 3{,}14$ benutzt? Wie groß ist der auf diese Weise approximativ bestimmte Wert von π^7 und von welcher Größe ist der relative Fehler ε/π^7?

99. s. Zeige: Existiert für eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ in $[0, \infty[$, so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius der Potenzreihe.

100. Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) m. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} z^{2n}$,

(b) m. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$,

(c) m. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} (a^n + a^{-n}) z^n$, $a \in \mathbf{R}_+$,

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 6. Mai 2022 zu bearbeiten.

(d) **s.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}$, $a \in \mathbf{R}_+$,

(e) **s.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Big) z^n$,

(f) **s.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)^{2n-1}}{2^{2n}(2n)!} z^{2n}$.

(Tip: $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x/n)^n = \exp(x)$ darf benutzt werden.)

101. **m.** Beweise für alle $z \in \mathbf{C}$:

(a) $\exp(iz) = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$,

(b) $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$,

(c) $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz})/2$, $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$ (Eulersche Formeln),

(d) $\cosh(z) = \cos(iz)$, $\sinh(z) = -i \sin(iz)$,

(e) $\cosh(-z) = \cosh(z)$, $\sinh(-z) = -\sinh(z)$,

(f) $\cosh(z) = (e^z + e^{-z})/2$, $\sinh(z) = (e^z - e^{-z})/2$ (Eulersche Formeln),

die Aussagen dieser Aufgabe zeigen insbesondere, daß und wie die Funktionen cos, sin, cosh, und sinh durch die Exponentialfunktion ausgedrückt werden können.

102. **s. Beispiel einer auf ganz R stetigen, aber nirgends differenzierbare Funktion.** Es sei $f_0 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ diejenige periodische Funktion mit der Perioden 1, die auf dem Intervall $[-1/2, 1/2]$ mit der Betragsfunktion übereinstimmt. Damit definieren wir eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ stetiger Funktionen durch

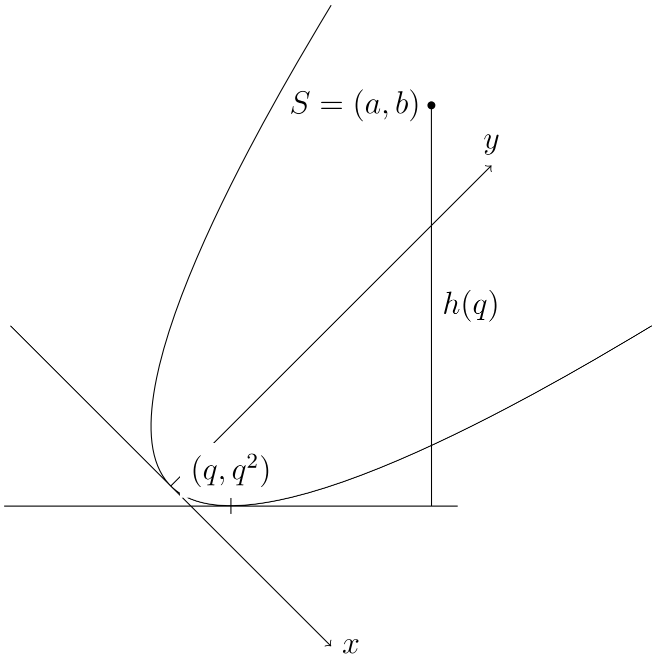
$$f_n(t) \coloneqq 2^{-n} \cdot f_0(2^n \cdot t).$$

Zeige: Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion, und diese Grenzfunktion ist stetig, aber nirgends differenzierbar.

(Tip: Um zu zeigen, daß f in $t_0 \in \mathbf{R}$ nicht differenzierbar ist, wähle zu jedem $n \in \mathbf{N}_0$ entweder $h_n \coloneqq 2^{-n-2}$ oder $h_n \coloneqq -2^{-n-2}$, und zwar so, daß f_n zwischen t_0 und $t_0 + h_n$ linear ist. Dann untersuche jeweils $(f_k(t_0 + h_n) - f_k(t_0))/h_n$.)

103. **m. Gleichgewichtslagen eines inhomogenen Parabelsegmentes.** Ein aus starkem Blech gearbeitetes Parabelsegment der Masse m werde mit der Randkante auf einer waagerechten Ebene aufgesetzt, so daß es sich dort (auf der Kante abrollend) frei bewegen kann. Wir lassen variable Dicke des Bleches zu, so daß wir über die Lage des Schwerpunktes S keine Angaben machen können (außer der, daß S ein Punkt des Segmentes ist). Es soll untersucht werden, wie die Zahl der stabilen Gleichgewichtslagen (siehe unten) des Parabelsegmentes von der Lage des Schwerpunktes abhängt.

Mathematisierung des Problems: Mit dem Parabelsegment verbinde man fest ein kartesisches Koordinatensystem und nehme an, daß in diesem die Parabel die Gleichung $y = x^2$ hat. Die möglichen Lagen (gemeint sind auch die Nicht-Gleichgewichtslagen) des Segmentes sind dann durch den jeweiligen Berührungspunkt (q, q^2) des Segmentes mit der Ebene, das heißt durch den Parameter q, charakterisiert. Der Schwerpunkt möge die Koordinaten (a, b) haben:



(a) Bestimme mit Methoden der Linearen Algebra in Abhängigkeit von q die Höhe $h(q)$ von S über der Ebene.

(b) Damit ist $V(q) := m \cdot g \cdot h(q)$ die potentielle Energie (wobei die Ebene das Nullniveau definiert) des vorliegenden mechanischen Systems (hierbei ist $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ die Erdbeschleunigung). Bekanntlich befindet sich dieses in einer *stabilen Gleichgewichtslage*, wenn V für den zugehörigen Parameter q ein strenges lokales Minimum hat.

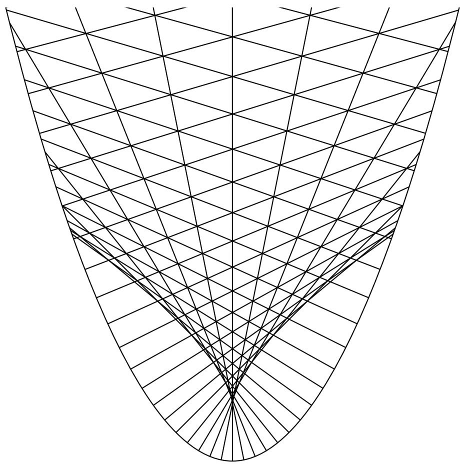
Beweise folgende Reihe von Äquivalenzen:

$$V'(q) = 0 \iff P_{(a,b)}(q) := 2 \cdot q^3 - (2b-1) \cdot q - a = 0$$

$\iff$ Der Schwerpunkt S liegt auf der Normalen der Parabel im Punkte (q, q^2).

(c) Berechne mit Hilfe der letzten Teilaufgabe die Positionen von S, für welche es nur eine stabile Gleichgewichtslage des Systems gibt. Insbesondere bestimme man die Trennlinie zu dem Bereich der Positionen von S, für welche es mehrere stabile Gleichgewichtslagen des Systems gibt (wieviele sind es?).

(Tip: Zunächst untersuche man die Gestalt des Graphen $P_{(a,b)}$ durch eine „klassische Kurvendiskussion" und ermittle dadurch die Anzahl der Nullstellen von $P_{(a,b)}$.)



104. s. Der abelsche Grenzwertsatz.

Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe mit einem Konvergenzradius $\rho \in \mathbf{R}_+$, die in einem Punkt w auf dem Rand des Konvergenzkreises (d. h. $|w| = \rho$) auch noch konvergiert. Zeige: Dann konvergiert diese Potenzreihe auf jeder der folgenkompakten Teilmengen

$$D_M := \{z \in \mathbf{C} \mid |w - z| \leq M \cdot (|w| - |z|)\}$$

mit $M \in [1, \infty[$ gleichmäßig. Insbesondere ist daher die Grenzfunktion auf jedem D_M, also erst recht auf $[0, w]$ stetig.

(Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß $\rho = 1$ und $w = 1$.)

Beweise dazu:

1. Schritt. Zeige die Aussage über die „Abelsche partielle Summation“: Seien $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbf{C}$ komplexe Zahlen und $A_m := \sum_{k=0}^{m} a_k$ für $m = 0, \ldots, n$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot (b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n.$$

2. Schritt. Wende die Abelsche partielle Summation auf $a_m, \ldots, a_n, z^m, \ldots, z^n$ $(n \geq m)$ an und benutze die Konvergenz der Reihe für $z = 1$ und die Definition von D_M, um zu zeigen, daß $(P_n)_{n \geq 0}$ mit $P_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k | D_M$ eine Cauchyfolge in $B(D_M, \mathbf{C})$ ist. (Warum ist die Behauptung damit bewiesen?)

105. s. Zeige, daß die Funktion $f\colon z \mapsto 1/(1-z)$ um jeden Punkt $z_0 \neq 1$ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Bestimme diese und ihren Konvergenzradius (und zwar durch Manipulation der bekannten Entwicklung um $z_0 = 0$).