2. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

6. Mai 2022*

106. m. Zeige, daß die in Abschnitt 7.7 eingeführte Funktionalgleichung der Exponentialfunktion tatsächlich auch von der „komplexen" Exponentialfunktion erfüllt wird, d. h.

$$\forall z, w \in \mathbf{C}\colon\ \exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Leite hieraus für die „komplexen" Funktionen cos und sin die bekannten Additionstheoreme her.

(Tip: Cauchy-Produkt.)

107. m. Beweise:

(a) Für jedes $a \in \mathbf{R}_+$ existiert genau eine *stetige* Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, welche der Funktionalgleichung aus Abschnitt 7.7 und der Anfangsbedingung $f(1) = a$ genügt, nämlich $f = a^x$.

(b) Es existieren weitere nicht stetige Lösungen der Funktionalgleichung aus Abschnitt 7.7 mit $f(1) = \exp(1)$.

(Tip: Es existiert eine (überabzählbare) Basis $B = (a_i)_{i \in I}$ des $\mathbf{Q}$-Vektorraumes $\mathbf{R}$ mit $1 \in B$ (wird mit dem Zornschen Lemma bewiesen und darf hier benutzt werden). Setzen wir $V \coloneqq \operatorname{span}(B \setminus \{1\})$, so wird durch

$$\forall r \in \mathbf{Q}\, \forall v \in V\colon\ f(r+v) \coloneqq \exp(r)$$

in eindeutiger Weise eine Funktion der verlangten Art definiert.)

108. (a) s. Zeige, daß die Funktion $\ln(1+x)$ innerhalb des Einheitskreises die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x)|\,]-1,1[= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} x^n$$

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 13. Mai 2022 zu bearbeiten.

besitzt und daß daher (?) die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ gegen $-\ln(2)$ konvergiert.

(b) **s.** Schreibe $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Big|\,]-1,1[$ als Potenzreihe.

(Tip: Betrachte die Ableitung der Funktion; Abelscher Grenzwertsatz; Logarithmengesetze.)

(c) **m.** Zeige, daß die Funktion arctan innerhalb des Einheitskreises die Reihenentwicklung

$$\arctan|\,]-1,1[\, = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$$

besitzt und daß daher (?) die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$ gegen $\pi/4$ konvergiert.

109. Sei $\alpha \in \mathbf{C}$. Bekanntlich sind die *Binomialkoeffizienten* $\binom{\alpha}{n}$ für $n \in \mathbf{N}_0$ dann rekursiv durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \qquad \text{und} \qquad \forall n \in \mathbf{N}_0\colon \binom{\alpha}{n+1} := \frac{\alpha - n}{n+1} \cdot \binom{\alpha}{n}$$

definiert.

(a) **s.** Zeige, daß die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$ den Konvergenzradius $\rho = 1$ für $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{N}_0$ hat. Bestimme den Konvergenzradius für $\alpha \in \mathbf{N}_0$.

(b) **s.** Zeige, daß $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}t^n = (1+t)^\alpha$ für alle $t \in\,]-\rho, \rho[$.

(Tip: Ist $f := \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ und $g := (1+x)^\alpha$, so gilt $(1+x)f' = \alpha f$ und $(1+x)g' = \alpha g$. Was ist $(f/g)'$?)

(c) **m.** Bestimme die ersten drei Glieder der Reihenentwicklung von $\sqrt{1+x}$ und $1/\sqrt{1+x}$.

110. Entwickle folgende Funktionen in eine Potenzreihe innerhalb des Einheitskreises:

(a) **s.** arcsin,

(b) **m.** $\frac{1}{(1-x)^m}$ für $m \in \mathbf{N}_0$.

(Tip: Binomialreihe.)

111. s. Wieviele Stellen hat 123456 in der Dualdarstellung?

112. s. Für $n \in \mathbf{N}_0$ bezeichne P_{2n} die Partialsumme $P_{2n} := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$ der Reihenentwicklung des Kosinus'. Zeichne auf Millimeterpapier die Graphen von cos, P_2, P_4 und P_6 über dem Intervall $[0, \pi]$. Berechne dabei die Funktionswerte der zu zeichnenden Polynome nach dem sog. *Horner-Schema*:

$$P_2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2,$$
$$P_4 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{12} \cdot x^2\right) \cdot x^2,$$
$$P_6 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{30} \cdot x^2\right) \cdot x^2\right) \cdot x^2.$$