3. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

13. Mai 2022*

113. **(a)** **m. Die Dirichletsche Reihe.** In Abschnitt 5.8 haben wir bereits die Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s \in \mathbf{N}_1$ betrachtet. Jetzt können wir sie für alle $s \in \mathbf{C}$ definieren. Für reelle s untersuche die Reihe auf Konvergenz, und zwar zeige, daß sie für $s > 1$ in $\mathbf{R}$ konvergiert und für $s \leq 1$ gegen ∞ konvergiert.

(Tip: Cauchysches Verdichtungslemma aus Abschnitt 5.8.)

(b) **s.** Für jedes $s \in \mathbf{R}$ seien

$$H_s \coloneqq \{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) \geq s\} \quad \text{und} \quad H_s^o \coloneqq \{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) > s\}.$$

Zeige, daß für jedes $z \in H \coloneqq H_1^o$ die Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ gegen eine Zahl $\zeta(z) \in \mathbf{C}$ konvergiert, daß diese Konvergenz auf jeder Teilmenge H_s mit $s > 1$ gleichmäßig ist und daß daher die Funktion $\zeta\colon H \to \mathbf{C}$ stetig ist. Diese Funktion (oder genauer ihre maximale analytische Funktion) heißt *Riemannsche Zeta-Funktion*.

(Tip: Man beachte den ersten Aufgabenteil und das Theorem aus Abschnitt 7.1.)

114. **s.** Beweise, daß 0 ein anziehender Fixpunkt der Funktion $f \coloneqq x \cdot (1-x)|[0,1]$ ist; genauer, daß für jedes $t \in [0,1]$ die f-Banachfolge mit Startpunkt t gegen 0 konvergiert.

(Tip: Zeige, daß jede f-Banachfolge mit einem Startwert $t_0 > 0$ monoton fallend ist; sie besitzt daher einen Grenzwert, welcher nach Aufgabe (a) aus 4.15 dann der Fixpunkt 0 ist.)

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 20. Mai 2022 zu bearbeiten.

115. m. Seien $n \in \mathbf{Z}$ und $z,\ w \in \mathbf{C}^*$. Zeige

(a) $n \cdot \arg(z) \in \operatorname{Arg}(z^n)$ und

(b) $\arg(z) - \arg(w) \in \operatorname{Arg}(z/w)$. Gilt $\arg(z) - \arg(w) = \arg(z/w)$ uneingeschränkt?

(c) Bestimme die Argumente von $(1 - i\sqrt{3})^{27}$, $(7 + i)/(4 - 3i)$, $1/(3 - i)^2$.

116. m. Über die Exponentialfunktion.

(a) Sei $s \in \mathbf{R}$. Skizziere $s + i\mathbf{R}$ und $\mathbf{R} + is$ in einem Bild, sowie $\exp(s + i\mathbf{R})$ und $\exp(\mathbf{R} + is)$ in einem zweiten.

(b) Zeige, daß die Funktion $f\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}, z \mapsto \exp(1/z)$ für jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ auf $\dot{U}_\varepsilon(0)$ alle Werte auf $\mathbf{C}^*$ annimmt.

117. m. Komplexe Wurzeln. Für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ und jedes $z \in \mathbf{C}$ bezeichne $W^n(z)$ die Menge aller komplexen n-ten Wurzeln von z, d. h.:

$$W^n(z) := \{w \in \mathbf{C} \mid w^n = z\}.$$

Zeige:

(a) $W^n(0) = \{0\}$ und $W^n(z) = \{ \sqrt[n]{|z|} \cdot \exp(i\frac{\arg(z)+2\pi k}{n}) \mid k = 0, \dots, n-1\}$ für alle $z \in \mathbf{C}^*$.

(b) Auf der geschlitzten Ebene $E_- \cup \{0\}$ (vgl. Theorem aus Abschnitt 7.19) existiert genau eine stetige Funktion $f_n\colon E_- \cup \{0\} \to \mathbf{C}$, so daß gilt:

$$f_n(1) = 1 \quad \text{und} \quad \forall z \in E_- \cup \{0\}\colon f_n(z) \in W^n(z).$$

Diese Funktion heißt der *Hauptzweig* der komplexen n-ten Wurzelfunktion.

(c) $\forall z \in \mathbf{C}\colon (w \in W^2(z) \implies W^2(z) = \{w, -w\})$.

118. **(a)** **s.** Sei $P := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ eine komplexe Polynomfunktion mit reellen Koeffizienten $a_0,\ \dots,\ a_n \in \mathbf{R}$. Zeige: Ist z_0 eine Nullstelle von P, so ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von P.

(b) **m.** Bestimme alle Lösungen der Gleichungen $z^5 - 1 = 0$, $z^7 - i = 0$, $(1 + i) \cdot z^2 + 1 - i = 0$. Skizziere die Lösungsmengen.

119. s. Beweise:

(a) Für den Hauptzweig f_n der n-ten Wurzel gilt

$$\forall z \in E_-\colon f_n(z) = z^{1/n}.$$

(b) Sei $\nu \in \mathbf{C}$. Dann existiert eine Konstante $C \in \mathbf{C}$, so daß für jedes $z_0 \in \mathbf{R}_-$ gilt

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \Im(z) \geq 0}} z^\nu = C \cdot \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \Im(z) < 0}} z^\nu.$$

In Worten ausgedrückt: Die Funktion z^ν macht einen (multiplikativen) Sprung um C an der negativen reellen Achse. Für welche ν ist $C = 1$?

(c) An welchen Stellen ist z^ν stetig?

(d) Sind ν und $\mu \in \mathbf{C}$, so gilt generell $z^{\nu+\mu} = z^\nu \cdot z^\mu$, im allgemeinen aber nicht $(z^\nu)^\mu = z^{\nu\mu}$.

120. s. Beweise:

(a) Mit den beiden kanonischen Koordinatenfunktionen $x, y\colon \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ (vgl. Abschnitt 5.1) gilt:

$$\begin{aligned} \cos &= \cos(x) \cdot \cosh(y) - i \sin(x) \cdot \sinh(y), \\ \sin &= \sin(x) \cdot \cosh(y) + i \cos(x) \cdot \sinh(y). \end{aligned}$$

Daher (?) sind die Verschwindungsmengen der komplexen Kosinus- und Sinusfunktion durch

$$V(\cos) := \{z \in \mathbf{C} \mid \cos(z) = 0\} = \{\pi/2 + k \cdot \pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

und

$$V(\sin) := \{z \in \mathbf{C} \mid \sin(z) = 0\} = \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

gegeben.

Die analogen Verschwindungsmengen des komplexen Kosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus sind damit durch

$$V(\cosh) := \{z \in \mathbf{C} \mid \cosh(z) = 0\} = iV(\cos)$$

und

$$V(\sinh) := \{z \in \mathbf{C} \mid \sinh(z) = 0\} = iV(\sin)$$

verbunden.

(b) Die komplexe *hyperbolische Tangensfunktion*

$$\tanh := \frac{\sinh}{\cosh}$$

ist auf $\mathbf{C} \setminus iV(\cos)$ definiert und holomorph; die komplexe *hyperbolische Kotangensfunktion*

$$\coth := \frac{\cosh}{\sinh}$$

ist auf $\mathbf{C} \setminus iV(\sin)$ definiert und holomorph. Die Ableitungen dieser Funktionen sind

$$\begin{aligned} \tanh' &= \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2, \\ \coth' &= -\frac{1}{\sinh^2} = 1 - \coth^2 . \end{aligned}$$

Die Funktionen tanh und coth sind ungerade, d. h. $\tanh(-z) = -\tanh(z)$ und $\coth(-z) = -\coth(z)$.

(c) Nun zu den Einschränkungen $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\tanh(x)$ und $\coth(x)$ der komplexen Hyperbelfunktionen auf die reelle Achse $\mathbf{R}$: $\sinh(x)\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist streng monoton wachsend mit $\sinh(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$; $\cosh|[0,\infty[\colon\ [0,\infty[\to \mathbf{R}$ ist streng monoton wachsend mit $\cosh([0,\infty[) = [1,\infty[$; $\tanh(x)$ ist streng monoton wachsend mit $\tanh(\mathbf{R}) =]-1,1[$; und $\coth|\mathbf{R}_+\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ ist streng monoton fallend mit $\coth(\mathbf{R}_+) =]1,\infty[$. Daher (?) besitzen diese Funktionen Umkehrfunktionen, die sogenannten Areafunktionen:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}\colon& \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \\ \operatorname{arcosh}\colon& [1,\infty[\to \mathbf{R}, \\ \operatorname{artanh}\colon&]-1,1[\to \mathbf{R} \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{arcoth}\colon\ ]1,\infty[\to \mathbf{R}.$$

(d) Die Funktionen arsinh, artanh und arcoth sind differenzierbar; arcosh ist stetig und auf $]1,\infty[$ differenzierbar. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \\ \operatorname{arcosh}' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\Big|\,]1,\infty[\,, \\ \operatorname{artanh}' &= \frac{1}{1-x^2}\Big|\,]-1,1[\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{arcoth}' = \frac{1}{1-x^2}\Big|\,]1,\infty[\,.$$

(e) Die Areafunktionen hängen folgendermaßen mit der Logarithmusfunktion zusammen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh} &= \ln\Big(x + \sqrt{x^2+1}\Big), \\
\operatorname{arcosh} &= \ln\Big(x + \sqrt{x^2-1}\Big), \\
\operatorname{artanh} &= \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{arcoth} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\Bigg|\,]1,\infty[\,.$$