4. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

20. Mai 2022*

121. s. Konstruktion der Vervollständigung eines metrischen Raumes. Sei (E, d) ein metrischer Raum. Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion *der* Vervollständigung von (E, d). Dazu definieren wir in dem Raum $F(E, \mathbf{R})$ aller Abbildungen $f \colon E \to \mathbf{R}$ die Teilmenge

$$H \coloneqq \{f \in F(E, \mathbf{R}) \mid \forall p, q \in E \colon f(p) - f(q) \leq d(p, q) \leq f(p) + f(q)\}.$$

(a) Zeige, daß für jedes $a \in E$ die Abbildung

$$f_a \colon E \to \mathbf{R}, p \mapsto d(a, p)$$

ein Element von H ist. Damit können wir also die Abbildung

$$j \colon E \to H, p \mapsto f_p$$

definieren.

(b) Zeige weiter, daß

$$f(p) - f(q) \leq g(p) + g(q) \quad \text{und} \quad |f(p) - g(p)| \leq f(q) + g(q)$$

für alle f, $g \in H$ und p, $q \in E$, und folgere damit, daß durch

$$D(f, g) \coloneqq \sup\{|f(p) - g(p)| \mid p \in E\}$$

eine Metrik auf H definiert wird.

(c) Zeige: $\forall f \in H \, \forall a \in E \colon D(f_a, f) = f(a)$.

(d) Folgere hieraus, daß $j \colon (E, d) \to (H, D)$ eine abstandstreue, insbesondere injektive Abbildung ist.

(e) Beweise, daß (H, D) ein vollständiger metrischer Raum ist.

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 27. Mai 2022 zu bearbeiten.

Definieren wir $\hat{E} := \overline{j(E)}$ als die abgeschlossene Hülle von $j(E)$ in (H, D) und $\hat{d} := D|\hat{E}\times\hat{E}$, so ist $(\hat{E}, \hat{d})$ folglich (?) auch ein vollständiger metrischer Raum.

(f) Es ist $j(E)$ eine dichte Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes $(\hat{E}, \hat{d})$. Letzterer wird daher die *Vervollständigung* von (E, d) genannt.

122. m. Sei E ein $\mathbf{K}$-Banachraum. Zeige

$$\forall \varphi \in T([a, b], \mathbf{K})\, \forall \psi \in T([a, b], E) \colon \varphi \cdot \psi \in T([a, b], E).$$

123. m. Zeige: Seien E_1, …, E_n Banachräume über $\mathbf{K}$, und sei $E := \prod_k E_k$ der Produktbanachraum (vgl. Beispiel 2 aus Abschnitt 5.2). Dann ist eine Funktion

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \colon [a, b] \to E$$

genau dann eine Regelfunktion, wenn $f_k \in R([a, b], E_k)$ für alle $k = 1, \ldots, n$. In diesem Falle gilt

$$\int_a^b f\, dx = \left(\int_a^b f_1\, dx, \ldots, \int_a^b f_n\, dx \right).$$

Leite hieraus her, wie sich das Integral einer Funktion $f = U + iV \in R([a, b], \mathbf{C})$ durch Integration der reellwertigen Funktionen U, $V \in R([a, b], \mathbf{R})$ berechnet.

124. s. Produkte von Regelfunktionen. Es seien E, E_1 und E_2 Banachräume über $\mathbf{K}$ und $B \colon E_1 \times E_2 \to E$ eine stetige bilineare Abbildung, und zwar gelte

$$\forall u \in E_1, v \in E_2 \colon \|B(u, v)\| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\|$$

(vgl. Abschnitt 5.4). Weiterhin sei A eine nicht leere Menge. Dann gilt:

(a) Sind $f \in B(A, E_1)$ und $g \in B(A, E_2)$, so ist

$$\tilde{B}(f, g) \colon A \to E, p \mapsto B(f(p), g(p))$$

eine beschränkte Funktion mit

$$\left\| \tilde{B}(f, g) \right\|_\infty \leq M \cdot \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty .$$

Daher (?) ist

$$\tilde{B} \colon B(A, E_1) \times B(A, E_2) \to B(A, E), (f, g) \mapsto \tilde{B}(f, g)$$

eine stetige bilineare Abbildung.

(b) Sind $f \in R([a, b], E_1)$ und $g \in R([a, b], E_2)$, so auch $\tilde{B}(f, g) \in R([a, b], E)$. (Tip: Überlege zuerst, daß $\tilde{B}(T([a, b], E_1) \times T([a, b], E_2)) \subseteq T([a, b], E)$.)

125. **s.** Jede monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ ist eine Regelfunktion.

(Tip: Ist f monoton wachsend, so zerlege das Intervall $[f(a), f(b)]$ in Teilintervalle, die höchstens die Länge ε haben, und definiere mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung von $[a,b]$ eine derartige Treppenfunktion φ, so daß $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ gilt.)

126. **m.** Seien E und F zwei $\mathbf{K}$-Banachräume, $f \in R([a,b], E)$ eine Regelfunktion, $D \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge von E mit $f([a,b]) \subseteq D$ und $g\colon D \to F$ eine Funktion, die auf $f([a,b])$ gleichmäßig stetig ist. Dann ist auch $g \circ f$ eine Regelfunktion.