

2. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

26. Oktober 2021*

7. s. Sind A und B zwei Aussagen, so ist

$$A \implies B \quad \text{äquivalent zu} \quad \neg B \implies \neg A.$$

(Tip: Stelle für beide Aussagen die Wahrheitstabellen auf; vergleiche dazu den Beweis des Theorems in Abschnitt 0.3 der Vorlesung.)

8. m. Sei $m \in \mathbf{Z}$. Sei $A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, \dots$ eine Folge von Aussagen. Zeige folgende Modifikationen der vollständigen Induktion:

(a) **Voraussetzung:** Es gelte

(i) A_m ist wahr,

(ii) Ist $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq m$ und ist A_n wahr, so ist auch A_{n+1} wahr.

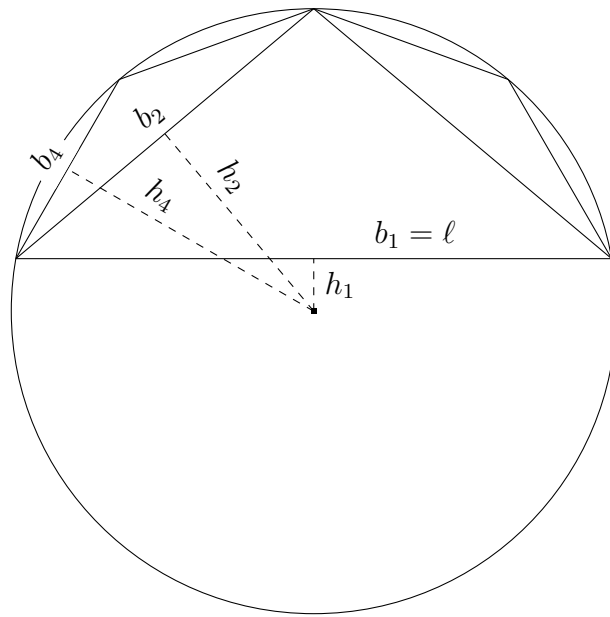
Behauptung: A_n ist wahr für $n \in \mathbf{Z}$ mit $n \geq m$.

(b) **Voraussetzung:** Es gelte: Ist $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq m$ und gilt A_k für $m \leq k < n$, so gilt A_n .

Behauptung: A_n ist wahr für $n \in \mathbf{Z}$ mit $n \geq m$.

9. s. **Berechnung der Bogenlänge des Einheitskreises über einer Sehne (Teil 1).** Es sei s eine Sehne der Länge ℓ des Einheitskreises. Wir wollen die Länge des Bogens B über der Sehne s nach einem von Archimedes von Syrakus vorgeschlagenem Verfahren bestimmen. Dabei wird B durch Sehnenzüge Σ_n (mit $n = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$) gleichlanger Sehnen angenähert. Die Länge einer Sehne von Σ_n werde mit b_n bezeichnet. Dabei ergibt sich b_{2n} aus b_n gemäß der folgenden Abbildung:

*Die Übungsaufgaben sind bis zur Übung am 2. November 2021 zu bearbeiten.



Eine Annäherung an die Länge des Bogens B liefert dann die Folge $(B_{2^k})_{k \in \mathbf{N}_0}$ mit $B_{2^k} = 2^k \cdot b_{2^k}$.

- (a) Entwickle ein Verfahren zur rekursiven Berechnung von b_{2^k} und damit von B_{2^k} .
- (b) Teste Dein Verfahren mit einem (Taschen-)Rechner mit dem Eingabewert $\ell = 2$.
- (c) Schreibe für das Verfahren ein (Scheme-)Programm.

(Tip: Für betragslich sehr kleines ε tritt numerisch in einem Ausdruck der Form $1 - \sqrt{1 - \varepsilon}$ *Auslöschung* ein, also Verlust an Genauigkeit durch Subtraktion fast gleich großer Gleitkommazahlen. In diesem Falle gelingt die Vermeidung der Auslöschung durch eine einfache Termumformung:
 $1 - \sqrt{1 - \varepsilon} = \frac{(1 - \sqrt{1 - \varepsilon}) \cdot (1 + \sqrt{1 - \varepsilon})}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}$.)

10. s. Binomialkoeffizienten. Für $a \in \mathbf{R}$ definieren wir die Folge der *Binomialkoeffizienten* $\binom{a}{n}$ für $n \in \mathbf{N}_0$ rekursiv durch

$$\binom{a}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{a}{n+1} := \frac{a-n}{n+1} \cdot \binom{a}{n}.$$

Seien im folgenden $a \in \mathbf{R}$ und $m, n \in \mathbf{N}_0$. Zeige:

(a) $\binom{a}{n} + \binom{a}{n+1} = \binom{a+1}{n+1}$.

