5. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

29. Mai 2022*

127. m. Zeige: Ist $f \in C([a,b],E)$ und $\int_a^b \|f\|\,dx = \int_a^b \|f(t)\|\,dt = 0$, so ist $f \equiv 0$.

(Tip: Offenbar (?) genügt es, für eine nicht negative Funktion $f \in C([a,b],\mathbf{R})$ zu zeigen: $\int\limits_a^b f\,dx = 0 \implies f \equiv 0$. Dazu mache die Annahme $f(t_0) > c > 0$.)

128. s. Zeige: Die Funktion

$$R([a,b],\mathbf{R}) \times R([a,b],\mathbf{R}) \to \mathbf{R}, (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle := \int_a^b fg\,dx$$

ist symmetrisch, bilinear und *positiv semidefinit*, d. h.

$$\forall f \in R([a,b],\mathbf{R})\colon \langle f,f\rangle \geq 0.$$

Der letzten Ungleichung wegen können wir

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

definieren. Es gilt die *Cauchy–Schwarzsche-Ungleichung*:

$$\forall f,g \in R([a,b],\mathbf{R})\colon\ |\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2\,.$$

(Tip: Werte $0 \leq (\|f-\lambda g\|_2)^2$ für $\lambda = \langle f,g\rangle \cdot t$ für $t \in \mathbf{R}$ aus.)

Daher (?) gelten die Norm-Axiome (N0), (N2) und (N3). Schränken wir $\langle\cdot,\cdot\rangle$ beziehungsweise $\|\cdot\|_2$ auf den $\mathbf{R}$-Vektorraum $C([a,b],\mathbf{R})$ der stetigen Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ ein, so erhalten wir ein Skalarprodukt bzw. eine Norm.

129. s. Zeige: Im Gegensatz zu $(C([-1,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist der normierte Vektorraum $(C([-1,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_2)$ kein Banachraum.

(Tip: Betrachte die Funktionenfolge $f_n\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$ mit $f_n|[-1,-1/n] \equiv -1$, $f_n|[1/n,1] \equiv 1$ und $f_n(t) = nt$ für $t \in\,]-1/n, 1/n[$.)

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 03. Juni 2022 zu bearbeiten.

130. s. Zeige: Für jede Funktion $f \in R(I, E)$ und jeden Parameter $a \in I$ ist die Funktion

$$\int_a^x f\,dx \colon I \to E, t \mapsto \int_a^t f\,dx$$

stetig.

131. m. Es seien E_1 und E_2 Banachräume über $\mathbf{K}$, $B\colon E_1 \times E_2 \to E$ eine stetige bilineare Abbildung, $\varphi \in T([a, b], E_2)$ und $(t_k)_{k=0}^n$ eine φ angepaßte Zerlegung von $[a, b]$. Zeige, daß dann für jedes $f \in R([a, b], E_1)$ gilt:

$$\int_a^b B(f(t), \varphi(t))\,dt = \sum_{k=1}^n B\Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k} f\,dx, \varphi\big(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\big)\Big).$$

132. m. Seien I, $J \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ Intervalle, φ, $\psi\colon I \to \mathbf{R}$ differenzierbare Funktionen mit $\varphi(I)$, $\psi(I) \subseteq J$ und $f\colon J \to E$ eine stetige Funktion. Zeige: Dann ist

$$g\colon I \to E, t \mapsto \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f\,dx$$

eine differenzierbare Funktion. Wie lautet ihre Ableitung?

133. m. Integration der Umkehrfunktion.

(a) Zeige: Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ eine injektive, stetig differenzierbare Funktion. Dann ist $J := f([a, b])$ ein abgeschlossenes Intervall von $\mathbf{R}$, auf J ist die Umkehrfunktion $\check{f}$ definiert, und es gilt

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \check{f}\,dx = x \cdot f\Big|_a^b - \int_a^b f\,dx.$$

(b) Berechne $\int\limits_0^1 \arcsin\,dx$.

134. Integration rationaler Funktionen. Seien P und $Q \not\equiv 0$ reelle Polynomfunktionen. Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra (vgl. Abschnitt 5.4) können wir Q als Produkt seiner *irreduziblen* Faktoren wie folgt darstellen:

$$Q = \gamma \cdot \prod_i (x - a_i)^{n_i} \cdot \prod_j (x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^{m_j},$$

wobei γ, a_i, α_j, $\beta_j \in \mathbf{R}$, $\alpha_j^2 - 4\beta_j < 0$ und n_i, $m_j \in \mathbf{N}_1$. Infolgedessen läßt sich die rationale Funktion P/Q als Summe einer Polynomfunktion (die im Falle $\deg P < \deg Q$ identisch verschwindet) und rationaler Funktionen folgender Typen

$$\frac{A}{(x - a_i)^n} \quad \text{und} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^m},$$

wobei $1 \leq n \leq n_i$ und $1 \leq m \leq m_j$ und $A, B, C \in \mathbf{R}$, darstellen. Diese Darstellung von P/Q als Summe solcher „einfachen Brüche“ heißt *Partialbruchzerlegung*. Die Koeffizienten A, B und C erhalten wir durch formalen Ansatz und Koeffizientenvergleich.

Für die Funktionen des Typs $A/(x-a)^n$ sind Stammfunktionen wohlbekannt.

Für die Funktionen des Typs $(Bx+C)/(x^2+\alpha x+\beta)^m$ erhalten wir Stammfunktionen mittels der folgenden zu beweisenden Aussagen: Definieren wir rekursiv

$$F_1 \coloneqq \arctan$$

und

$$F_{n+1} \coloneqq \frac{1}{2n}\Big((2n-1)\cdot F_n + \frac{x}{(1+x^2)^n}\Big)$$

für alle $n \in \mathbf{N}_1$, so gilt:

(a) **m.** Für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ ist F_n eine Stammfunktion von $1/(1+x^2)^n$.

(b) **m.** Ist $x^2+\alpha x+\beta$ ein über $\mathbf{R}$ irreduzibles Polynom (d. h. hat dieses Polynom keine reelle Nullstelle), so ist

$$\gamma \coloneqq \frac{1}{2}\sqrt{4\beta-\alpha^2} \in \mathbf{R}_+,$$

und für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ ist

$$\gamma^{1-2n}\cdot F_n\Big(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\gamma}\Big)$$

eine Stammfunktion von $1/(x^2+\alpha x+\beta)^n$.

(c) **m.** Für den Fall $m=1$ ist $\ln|x^2+\alpha x+\beta|$ und für den Fall $m>1$ ist $-1/((m-1)\cdot(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1})$ eine Stammfunktion der Funktion $(2x+\alpha)/(x^2+\alpha x+\beta)^m$.

(d) **s.** Eine Stammfunktion von $(Bx+C)/(x^2+\alpha x+\beta)^m$ läßt sich durch geeignete Linearkombinationen der Funktionen aus (b) und (c) erhalten.

(e) Nachdem wir prinzipiell in der Lage sind, für jede (reelle) rationale Funktion eine Stammfunktion zu ermitteln, können wir jetzt auch weitere Stammfunktionen berechnen:

(i) **m.** Ist R eine rationale Funktion (einer Variablen), $\alpha \in \mathbf{C}^*$ und F eine Stammfunktion der rationalen Funktion $u \mapsto \alpha^{-1}\cdot R(u)/u$, so ist $F(e^{\alpha x})$ eine Stammfunktion von $R(e^{\alpha x})$.

(ii) **s.** Ist R eine rationale Funktion zweier Variablen und F eine Stammfunktion der rationalen Funktion

$$\frac{2}{1+x^2}\cdot R\Big(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\Big),$$

so ist $F(\tan(x/2))$ eine Stammfunktion von $R(\cos, \sin)$ auf $]-\pi, \pi[$. (Tip: Zeige, daß mit der *Universalsubstitution* $u := \tan(x/2)$ gilt: $\cos |]-\pi, \pi[= (1-u^2)/(1+u^2)$, $\sin |]-\pi, \pi[= 2u/(1+u^2)$ und $u' = (1+u^2)/2$, woraus sich die Behauptung ergibt.)

(f) Bestimme die Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

(i) m. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + x - 2}{x^3 - 1}$,

(ii) m. $\dfrac{1}{(x^2 + 2x + 2)^2}$,

(iii) s. $\dfrac{1}{\sin + \cos}$.

135. m. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ die *charakteristische* Funktion von $\mathbf{Q} \cap [a,b]$, d. h:

$$\forall t \in [a,b]\colon f(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in \mathbf{Q} \text{ und} \\ 0, & \text{falls } t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Ist $f \in R([a,b], \mathbf{R})$?.