6. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

03. Juni 2022*

136. **m.** Seien a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$. Zeige, daß für jedes reelle Polynom P mit $\deg P \leq 2$ gilt:

$$\int_a^b P\,dx = \left(P(a) + 4 \cdot P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right) \cdot \frac{b-a}{6}.$$

(Tip: $P = \alpha \cdot (x-c)^2 + \beta \cdot (x-c) + \gamma$ mit $c = (a+b)/2$ und α, β, $\gamma \in \mathbf{R}$.)

137. **(a)** **m.** Bestimme Stammfunktionen von

$$x \cdot \sqrt{1-x}, \quad \cos(\sqrt{x}) \quad \text{und} \quad \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}.$$

(b) **s.** Berechne die Integrale

$$\int_1^2 x \cdot e^{\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \sin \cdot e^x\,dx.$$

138. **s.** Seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall, $a \in I$, E ein $\mathbf{K}$-Banachraum und $f\colon I \to E$ eine stetige Funktion, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar ist. Dann gilt:

(a) Existieren ein $v \in E$ und ein $L \in [0, \infty[$, so daß

$$\forall t \in I \setminus \{a\}\colon\ \|f'(t) - v\| \leq L$$

gilt, so ist

$$\forall t \in I\colon\ \|f(t) - f(a) - (t-a) \cdot v\| \leq L \cdot |t-a|\,.$$

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 10. Juni 2022 zu bearbeiten.

(b) Konvergiert für $t \to a$ die Ableitung $f'(t)$ gegen einen Vektor $v \in E$, so ist f auch in a differenzierbar, und es gilt $f'(a) = v$.

(c) Sei $b \in I$ mit $a < b$, sei f auf ganz I differenzierbar und sei die Ableitung f' in allen $s \in [a, b]$ stetig. Dann gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall (t, s) \in I \times [a, b] \colon \\ \left(0 < |t - s| \le \delta \implies \left\| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f'(s) \right\| \le \varepsilon \right).$$

Diese Eigenschaft wird als *gleichmäßige Differenzierbarkeit* von f in $[a, b]$ bezeichnet.

(Tip: $\|f'(t) - f'(s)\| \le \varepsilon$?)

139. **m.** Seien α_0, $\alpha_1 \in \mathbf{R}$ mit $\alpha_0 < \alpha_1 \le \alpha_0 + 2\pi$, $r \colon [\alpha_0, \alpha_1] \to \mathbf{R}_+$ eine stetige Funktion und γ die Kurve

$$\gamma \colon [\alpha_0, \alpha_1] \to \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2, \alpha \mapsto r(\alpha) \cdot e^{i\alpha}.$$

Es soll der Flächeninhalt F der durch γ und die Verbindungsstrecken vom Ursprung zum Anfangs- bzw. Endpunkt von γ begrenzten Fläche berechnet werden. Hierzu approximiere man F durch Kreissektoren. Man begründe, daß man auf diese Weise

$$F = \frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} r^2(\alpha) \, d\alpha$$

erhält.

(Tip: Ein Segment eines Kreises vom Radius R, welches einen Winkel φ (im Bogenmaß gemessen) einschließt, hat den Flächeninhalt $\varphi/2 \cdot R^2$.)

140. **s.** Seien a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$ und $\rho \colon [a, b] \to \mathbf{R}_+$ eine stetige Funktion. Durch Rotation der Kurve $(\rho(x), 0, x)$ um die z-Achse erhalten wir eine Fläche, die den Rotationskörper

$$K := \{(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi, t) \mid t \in [a, b], 0 \le r \le \rho(t), \varphi \in [0, 2\pi[\}$$

begrenzt. Durch Ausschöpfung des Rotationskörpers durch zylindrische Scheiben senkrecht zur z-Achse leite man eine Formel zur Berechnung des Volumens von K her.

Mit Hilfe dieser Formel berechne man das Volumen $V(R)$ einer Kugel mit Radius R zu $\frac{4\pi}{3} \cdot R^3$. Man begründe auch, daß die Oberfläche dieser Kugel durch $V'(R) = 4\pi \cdot R^2$ gegeben ist.

141. m. Für alle α, $\beta \in \mathbf{C}$ und $n \in \mathbf{N}_0$ beweise die Formel

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \cdot \binom{\beta}{n-k}$$

(vgl. Abschnitt 7.12), indem Du für $k \in \mathbf{N}_0$ und $f_\gamma := (1+x)^\gamma \colon\,]-1,\infty[\, \to \mathbf{C}$ mit $\gamma \in \{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$ die Formel

$$f_\gamma^{(k)} = k! \binom{\gamma}{k} \cdot (1+x)^{\gamma-k}$$

beweist und in das Theorem 1 aus Abschnitt 9.1 einsetzt.

142. m. Die abgeschlossene konvexe Hülle. Sei $A \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge eines Banachraumes E. Zeige:

(a) Ist A konvex, sind $n \in \mathbf{N}_1$, $p_1, \ldots, p_n \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ mit $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, so gilt für die Linearkombination $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k p_k \in A$.

(b) Ist A eine beliebige Teilmenge von E und

$$\mathfrak{C}(A) := \{C \in \mathfrak{P}(E) \mid A \subseteq C, C \text{ ist konvex}\},$$

so ist

$$C(A) := \bigcap \mathfrak{C}(A) \in \mathfrak{C}(A).$$

Die Menge $C(A)$ heißt die *konvexe Hülle* von A; offenbar ist sie die kleinste konvexe Teilmenge von E, in der A enthalten ist (daher ihr Name). Deren abgeschlossene Hülle heißt die *abgeschlossene konvexe Hülle* von A; sie ist abgeschlossen und konvex, da die abgeschlossene Hülle von konvexen Mengen wieder konvex ist (vgl. Aufgabe 70 (b)).

143. s. Eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Sind $f \in R([a,b], E)$ und $g \in R([a,b], \mathbf{R})$ und gilt $g \geq 0$ und $\int\limits_a^b g\,dx > 0$, so ist

$$S(f,g) := \frac{\int_a^b gf\,dx}{\int_a^b g\,dx}$$

ein Punkt der abgeschlossenen konvexen Hülle C von $f([a,b])$.

Bemerkung. Beschreibt f eine Kurve in E und g die Dichte einer Massenverteilung auf dieser Kurve, so ist $S(f,g)$ der Schwerpunkt dieser materiellen Kurve.

(Tip: 1. Schritt: Für $f = \varphi \in T([a,b], E)$ ist $S(\varphi, g) \in C(\varphi([a,b]))$; beachte Aufgabe 131 und 142. 2. Schritt: Für $f \in R([a,b], E)$ beachte das Lemma aus 8.3.)