7. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

10. Juni 2022*

144. Konvexe Funktionen. Seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine Funktion.

(a) **m.** Zeige: Für die Konvexität von f gelten die folgenden Charakterisierungen:

(i) Ohne besondere Voraussetzungen an f gilt:

$$f \text{ konvex} \iff \forall t, u, s \in I\colon \Big(t < u < s \implies \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \leq \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \leq \frac{f(s) - f(u)}{s - u}\Big).$$

(ii) Ist f differenzierbar, so gilt zudem:

$$\begin{aligned} f \text{ konvex} &\iff f' \text{ ist monoton wachsend} \\ &\iff \forall t, s \in I\colon f(s) \geq f(t) + f'(t) \cdot (s - t). \end{aligned}$$

(Mit anderen Worten: Der Graph von f liegt oberhalb jeder seiner Tangenten.)

(iii) Ist f sogar zweimal differenzierbar, gilt:

$$f \text{ konvex} \iff f'' \geq 0.$$

(Damit ist der Graph von f relativ zur kanonischen Durchlaufrichtung nirgends nach rechts gekrümmt.)

(b) **s.** Zeige: Ist f konvex und $a \in I^o :=]\inf I, \sup I[$, so gilt:

(i) Die Funktion $(f - f(a))/(x - a)$ ist auf $I \cap]-\infty, a[$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Folglich existiert die *linksseitige Ableitung*

$$f'(a-) := \lim_{\substack{t \to a \\ t < a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 17. Juni 2022 zu bearbeiten.

Entsprechend beweise man die Existenz der *rechtsseitigen Ableitung*

$$f'(a+) := \lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}.$$

(Tip: Benutze (a)(i).)

(ii) Daher (?) ist f auf I^o stetig.

(iii) Es ist $f'(a-) \le f'(a+)$, und in Verallgemeinerung der Abschätzung aus (a)(ii) gilt ohne jegliche Differenzierbarkeitsvoraussetzung

$$\forall c \in [f'(a-), f'(a+)]\ \forall t \in I\colon\ f(t) \ge f(a) + c\cdot(t-a).$$

145. m. Die Funktion $|x|^\alpha\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$. Zeige:

(a) Definieren wir für $\alpha \in \mathbf{R}_+$ den Funktionswert $x^\alpha(0) := 0$, so haben wir die in Abschnitt 7.9 definierte Funktion $x^\alpha\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ zu einer *stetigen*, streng monoton wachsenden Funktion $x^\alpha\colon\ [0,\infty[\ \to \mathbf{R}$ fortgesetzt. Damit ist natürlich (?) auch

$$|x|^\alpha\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto x^\alpha(|t|)$$

eine stetige Funktion.

(b) Für $\alpha > 1$ ist $|x|^\alpha$ auf ganz $\mathbf{R}$ stetig differenzierbar mit der Ableitung $(|x|^\alpha)'(0) = 0$.

(c) Für $\alpha \ge 1$ ist $|x|^\alpha$ eine konvexe Funktion.

146. s. Die Jensensche Ungleichung. Seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine konvexe Funktion. Sei $I^o :=]\inf I, \sup I[$. Zeige:

(a) Sind $t_1, \ldots, t_n \in I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ und gilt $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k = 1$, so ist

$$t^* := \sum_{k=1}^n \lambda_k t_k \in I \quad \text{und} \quad f(t^*) \le \sum_{k=1}^n \lambda_k f(t_k).$$

(Tip: Aufgabe 142.)

(b) Sind φ, $g\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ Regelfunktionen, m, $M \in I^o$ und gelten

$$m \le \varphi \le M, \quad g \ge 0 \quad \text{und} \quad G := \int_a^b g\,dx > 0,$$

so gilt in Verallgemeinerung des ersten Aufgabenteils

$$t^* := G^{-1} \cdot \int_a^b \varphi g \, dx \in I, \quad f \circ \varphi \in R([a,b], \mathbf{R}),$$
$$\text{und} \quad f(t^*) \le G^{-1} \cdot \int_a^b (f \circ \varphi) \cdot g \, dx.$$

(Die letzte Ungleichung heißt *Jensensche Ungleichung*.)

(Tip: Aufgabe 143, Aufgabe 126, Aufgabe 131.)

(c) Seien E ein $\mathbf{K}$-Banachraum und $g \in R([a,b], \mathbf{R})$ eine Regelfunktion mit $g \ge 0$ und $G := \int_a^b g \, dx > 0$. Hiermit definieren wir für jedes $p \in \mathbf{R}_+$ die Funktion

$$N_p \colon R([a,b], E) \to \mathbf{R}, f \mapsto \left(G^{-1} \cdot \int_a^b \|f\|^p \cdot g \, dx \right)^{1/p}.$$

Die Zahl $N_p(f)$ ist *ein* normiertes Maß dafür, wie stark sich die Funktion f von der Nullfunktion unterscheidet, und zwar bezüglich der *Dichtefunktion* g. Die Normierung ist so getroffen, daß $N_p(1) = 1$. Die Funktion N_p taucht im Zusammenhang mit der sogenannten p-Norm, einem funktionalanalytischem Begriff, auf. Man zeige nun:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+ \colon (\alpha \le \beta \implies N_\alpha \le N_\beta).$$

(Tip: $|x|^{\beta/\alpha}$ ist konvex.)

147. m. Sei

$$g \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t} + t - 2 & \text{für } t \le 1 \text{ und} \\ 0 & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

Zeige, daß g stetig differenzierbar ist, und daß g nicht zweimal in 1 differenzierbar ist.

148. s. Zeige: Sei $f \colon \left]-r, r\right[\to E$ mit $r \in \mathbf{R}_+$ eine differenzierbare, gerade Funktion, die in 0 noch ein zweites Mal differenzierbar ist. Dann ist die Funktion $g \colon \left[0, r^2\right[\to E, t \mapsto f(\sqrt{t})$ differenzierbar mit der Ableitung $g'(0) = f''(0)/2$. Die Ableitung g' ist in 0 stetig, und es gilt (natürlich) $f = g(x^2)$.

149. m. Zeige: Es sei $f \colon I \to \mathbf{R}$ eine $(n+m)$-mal stetig differenzierbare Funktion mit n, $m \in \mathbf{N}_0$ und $n \ge 2$, die an einer Stelle $a \in I$ eine n-fache Nullstelle besitzt und deren n-te Ableitung an der Stelle a positiv ist. Auch wenn die n-te Wurzel in 0 nicht differenzierbar ist, so existiert doch in einer Umgebung $U_\varepsilon(a) \cap I$ eine mindestens $(m+1)$-mal differenzierbare Funktion g mit $f | U_\varepsilon(a) \cap I = g^n$.

150. **s.** Es seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall, $I^o :=]\inf I, \sup I[$, $a \in I^o$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Wir sagen dann, daß $(a, f(a))$ ein *Wendepunkt* von f ist, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq I$ gibt, so daß entweder

$$f|\,]a-\varepsilon, a[\text{ konvex} \quad \text{und} \quad f|\,]a, a+\varepsilon[\text{ konkav}$$

oder

$$f|\,]a-\varepsilon, a[\text{ konkav} \quad \text{und} \quad f|\,]a, a+\varepsilon[\text{ konvex}$$

ist.

Zeige: Ist f auf I eine $2n$-mal differenzierbare Funktion, die in a sogar $(2n+1)$-mal differenzierbar ist, und gilt

$$f^{(2)}(a) = f^{(3)}(a) = \cdots = f^{(2n)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(2n+1)}(a) \neq 0,$$

so ist $(a, f(a))$ ein Wendepunkt von f.

(Tip: Taylorformel für f''.)

151. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß die Funktion

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t}) & \text{für } t \in \mathbf{R}_+, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist. Dazu führe die folgenden Schritte durch:

(a) **m.** Für $n \in \mathbf{N}_0$ sei

$$f_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} t^{-n} \cdot \exp(-\frac{1}{t}) & \text{für } t \in \mathbf{R}_+, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar ist $f_0 = f$. Nun zeige man der Reihe nach für alle $n \in \mathbf{N}_0$:

(i) f_n ist in einer Umgebung von 0 beschränkt.

(ii) f_n ist in 0 stetig.

(iii) f_n ist in 0 differenzierbar und $f_n'(0) = 0$.

(b) **s.** Für alle $n \in \mathbf{N}_1$ ist die Funktion f eine n-mal differenzierbare Funktion, und es existiert eine Polynomfunktion P_n vom Grade $n-1$ mit

$$f^{(n)} = P_n \cdot f_{2n}.$$

Daher (?) stellt die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt 0 die Funktion f in keiner noch so kleinen Umgebung von 0 dar.