# 8. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

17. Juni 2022*

**152.** **m.** Bestimme die Taylorreihe von cos in $t_0 \in \mathbf{R}$, und leite daraus das Additionstheorem für cos her.

**153.** **s. Strecken sind Kürzeste.** Für jede Kurve $\alpha\colon [a,b] \to E$ gilt

$$L(\alpha) \geq \|\alpha(b) - \alpha(a)\| = d(\alpha(a), \alpha(b)).$$

Daher (?) ist die Strecke zwischen $\alpha(a)$ und $\alpha(b)$ eine kürzeste Kurve zwischen den beiden Punkten.

(Tip: Nach dem funktionalanalytischen Satz von Hahn–Banach existiert eine stetige Linearform $\lambda\colon E \to \mathbf{R}$ mit

$$\lambda(\alpha(b) - \alpha(a)) = \|\alpha(b) - \alpha(a)\| \quad \text{und} \quad \forall v \in E\colon\ |\lambda(v)| \leq \|v\|.$$

Damit (?) folgt, daß

$$\|\alpha(b) - \alpha(a)\| = \int_a^b (\lambda \circ \alpha)'\, dx \leq L(\alpha).$$

Beweise zusätzlich die Existenz der Linearform $\lambda$ in dem speziellen Fall $E = \mathbf{R}^n$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, ohne den Satz von Hahn–Banach zu bemühen.)

**154.** **m. Invarianz der Weglänge gegenüber Parametertransformationen.** Sei $\alpha\colon [a,b] \to E$ ein Weg und $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine *stetige Parametertransformation*, das ist eine stetige, monoton wachsende Funktion $\varphi$ mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$. Dann ist $L(\alpha) = L(\alpha \circ \varphi)$; insbesondere gilt, daß $\alpha$ genau dann rektifizierbar ist, wenn $\alpha \circ \varphi$ rektifizierbar ist.

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 24. Juni 2022 zu bearbeiten.

**155.** **m.** Sei $f\colon I \to \mathbf{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\alpha := (x, f)\colon I \to \mathbf{R}^2$ die kanonische Parametrisierung des Graphen von $f$. Zeige, daß

$$T_\alpha = e^{i\theta} \quad \text{mit} \quad \theta = \arctan \circ f'$$

ist und daß die Krümmung von $\alpha$ durch

$$\kappa = f'' / \sqrt{1 + (f')^2}^3$$

berechnet wird. Bestätige in diesem Fall, daß die Definition von Wendepunkten in Abschnitt 9.7 mit der Definition in Abschnitt 9.4 übereinstimmt.

**156.** Seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und $\alpha\colon I \to E$ eine Kurve in einen Banachraum $E$. Mit $s$ bezeichnen wir die Bogenlängenfunktion von $\alpha$ und mit $ds$ das Differential der Bogenlänge.

Sei $f\colon [a, b] \to F$ eine Funktion in einen weiteren Banachraum $F$. Zeige:

**(a)** **m.** Ist $f$ eine Treppenfunktion mit angepaßter Zerlegung $(t_k)_{k=0,\dots,n}$ von $[a, b]$ (vgl. Abschnitt 8.2), so ist

$$\int_a^b f\, ds = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot L(\alpha|[t_{k-1}, t_k]) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (s(t_k) - s(t_{k-1}))$$

mit beliebigen $\xi_k \in\, ]t_{k-1}, t_k[$.

**(b)** **s. Approximation von $\int\limits_a^b f\, ds$ durch verallgemeinerte Riemannsche Summen.** Ist $f$ eine stetige Funktion, so existiert zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß für jede Zerlegung $(t_k)_{k=0,\dots,n}$ von $[a, b]$ mit $t_k - t_{k-1} \le \delta$ und jede Folge $(\xi_k)_{k=1,\dots,n}$ von „Zwischenpunkten“ mit $\xi_k \in\, ]t_{k-1}, t_k[$ gilt, daß

$$\left\| \int_a^b f(t)\, ds - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (s(t_k) - s(t_{k-1})) \right\| < \varepsilon.$$

**157.** **(a)** **s.** Seien $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon I \to \mathbf{R}^2$ eine Kurve mit $\gamma(I) \subseteq \mathbf{S}^1$, $a \in I$, und $\theta_0 \in \mathbf{R}$, so daß $\gamma(a) = e^{i\theta_0}$, etwa $\theta_0 = \arg(\gamma(a))$, vgl. Abschnitt 7.19. Dann gilt $\gamma = e^{i\theta}$ mit der stetig differenzierbaren Funktion

$$\theta := \theta_0 + \int_a^x (\gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1')\, dx.$$

(Tip: Mit dem kanonischen Skalarprodukt des $\mathbf{R}^2$ berechne die Ableitung $\langle \gamma, e^{i\theta} \rangle'$ und wende an geeigneter Stelle die Cauchy–Schwarzsche Un*gleichung* an.)

**(b)** **m.** Zeige, daß jede Kurve $\alpha\colon I \to \mathbf{C}$ mit $0 \notin \alpha(I)$ eine Polarkoordinatendarstellung besitzt; vgl. Beispiel (c) aus Abschnitt 9.6.

**158. m.** Berechne die Absolutkrümmung der *Archimedischen Spirale*

$$\alpha\colon\ [0,\infty[\ \to \mathbf{C}, t \mapsto t \cdot e^{it}.$$

**159.** **(a)** Skizziere die folgenden Kurven und untersuche sie auf Differenzierbarkeit und Regularität:

- **(i)** **m.** *Neilsche Parabel*: $\alpha\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3)$,
- **(ii)** **s.** *Kardioide*: $\beta\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}, t \mapsto (1+\cos(t)) \cdot e^{it}$.

**(b)** **m.** Seien $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$. Bestimme die Länge des Bogens der Parabel $y = x^2$ zwischen $(a, a^2)$ und $(b, b^2)$.

**(c)** **s.** Eine Kreisscheibe vom Radius $r$ in $\mathbf{R}^2$ rolle gleichförmig die $x$-Achse entlang. Die durch einen Punkt $p$ auf dem Rand der Kreisscheibe beschriebene Kurve $\alpha\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ heißt *Zykloide*.

- **(i)** Berechne $\alpha$ für den Fall $\alpha(0) = (0,0)$.
- **(ii)** Berechne die Bogenlänge der Zykloide, die einer vollständigen Rotation der Kreisscheibe entspricht.