9. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

24. Juni 2022*

160. Berechne folgende Grenzwerte:

(a) **m.** $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (10^t - 5^t)$,

(b) **m.** $\lim\limits_{t \to 0+} \arctan\left(\frac{\cot(t)}{\ln(t)}\right)$,

(c) **m.** $\lim\limits_{\infty}(\exp(x + \exp(-x)) - \exp(x))$,

(d) **s.** $\lim\limits_{t \to 0}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t \cdot \sin(t)}\right)$,

(e) **s.** $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ mit $t \in \mathbf{R}$.

161. **m.** Zeige:

(a) Ist $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$, so gilt: ∞ (bzw. $-\infty$) ist genau dann Häufungspunkt von M, wenn M nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt ist.

(b) Ist E ein metrischer Raum, $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine beliebige Teilmenge und ist $p_0 \in E$ ein Häufungspunkt von M, so gilt für jede Funktion $f\colon M \to \mathbf{R}$, daß

$$\lim_{p_0} f = \infty \iff \forall c \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall p \in \dot{U}_\delta(p_0) \cap M\colon f(p) > c.$$

Formuliere eine entsprechende Aussage für $\lim_{p_0} f = -\infty$.

162. Die Voraussetzungen seien wie im Korollar aus Abschnitt 10.3. Insbesondere seien die allgemeinen Voraussetzungen dieses Abschnitts erfüllt. Zeige:

(a) **m.** Ist $f\colon M \to E$ eine Funktion mit $\lim\limits_{p_0} f = 0$ und $g \in B(M, E')$, so gilt auch $\lim\limits_{p_0} B(f, g) = 0$.

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 01. Juli 2022 zu bearbeiten.

Im weiteren seien Funktionen f, g, $h\colon M \to \mathbf{R}$ gegeben.

(b) **m.** Gilt $\lim\limits_{p_0} f = \infty$ und $g \geq a \in \mathbf{R}_+$, so folgt

$$\lim_{p_0} \frac{1}{f} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{p_0}(fg) = \infty.$$

(c) **m.** Gilt $f \leq g$ und konvergieren f und g für $p \to p_0$ gegen A bzw. $B \in \widehat{\mathbf{R}}$, so gilt auch $A \leq B$.

(d) **s. Sandwich-Theorem** Gilt $f \leq g \leq h$ und konvergieren f und h für $p \to p_0$ gegen denselben Grenzwert $A \in \widehat{\mathbf{R}}$, so konvergiert auch die „eingeklemmte" Funktion g für $p \to p_0$ gegen A.

163. **s.** Sei $\alpha\colon [a,b] \to \mathbf{C}$ eine reguläre Kurve. Zeige: Es existiert ein $c \in \mathbf{R}$ und ein $t_0 \in [a,b]$ mit $\alpha(b) - \alpha(a) = c \cdot \alpha'(t_0)$.

(Tip: Erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung.)

164. **m.** Es seien $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $Q = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$ zwei reelle Polynomfunktionen mit $a_n > 0$ und $b_m > 0$. Bestimme den Limes der rationalen Funktion P/Q für $t \to \infty$.

165. **m. Das Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen** Ist $m \in \mathbf{Z}$ und $f\colon\ [m, \infty[\to \mathbf{R}_+$ eine monoton fallende Funktion, so konvergiert $\int\limits_m^\infty f\,dx$ genau dann in $\mathbf{R}$, wenn $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f(n)$ in $\mathbf{R}$ konvergiert.

166. Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(a) **m.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$,

(b) **m.** $\displaystyle\int_1^\infty \ln \cdot x^{-\alpha}\,dx$ mit $\alpha \in \mathbf{R}_+$,

(c) **s.** $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin}{x}\right|\,dx$ (Tip: Harmonische Reihe),

(d) **s.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos}{\sqrt{x}}\,dx$ (nur auf Konvergenz zu untersuchen).

167. **m.** In Beispiel 3 in Abschnitt 5.8 haben wir $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ bewiesen, indem wir das Wachstum der Folge der Partialsummen grob abgeschätzt haben. Hier soll nun gezeigt werden, daß das Wachstum demjenigen des natürlichen Logarithmus' entspricht. Dazu definiere

$$\gamma_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

und beweise mit ähnlichen Methoden wie in Aufgabe 165., daß γ_n eine monoton fallende Folge positiver Zahlen ist mit Grenzwert $\gamma \in]0,1[$, die sog. Euler–Mascheronische Konstante. Sie hat den Wert

$$\gamma = 0{,}57721566490\ldots.$$