10. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

01. Juli 2022*

168. **s.** Es sei E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, J ein nicht entartetes Intervall von $\mathbf{R}$, B eine nicht leere offene Teilmenge von E, $D \coloneqq J \times B$ und $f\colon D \to E$ eine stetige Funktion.

(a) Es seien $a \in \mathbf{R}$, $b \in E$ und $A\colon E \to E$ eine stetige lineare Abbildung; für die Funktion f möge folgende *Invarianzbedingung* erfüllt sein:

$$\forall (t, v) \in D\colon (t + a, Av + b) \in D \wedge f(t + a, Av + b) = A(f(t, v)).$$

Zeige: Ist $y\colon I \to E$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, so ist auch

$$\tilde{y}\colon a + I \to E, t \mapsto A(y(t - a)) + b$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung.

(b) Unter einer *autonomen* oder *zeitunabhängigen* Differentialgleichung verstehen wir eine Differentialgleichung $y' = g(y)$ mit $g\colon B \to E$. Um diese Differentialgleichung unter den allgemeinen Typ einzuordnen, definieren wir $J = \mathbf{R}$ und $f(t, v) = g(v)$. Zeige:
Ist $y\colon I \to E$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(y)$, so ist für jedes $a \in \mathbf{R}$ die Funktion $y_a \coloneqq y(x - a)$ ebenfalls eine Lösung dieser Differentialgleichung. Gilt zudem $-v \in B$ und $g(-v) = g(v)$ für alle $v \in B$, so ist ebenfalls $\tilde{y} \coloneqq -y(-x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung.

169. Bestimme die maximalen Lösungen $y\colon I \to \mathbf{R}$ der folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) **m.** $y' = x \cdot y^2$ mit $y(0) = 2$,

(b) **m.** $y' = 1 + y^2$ mit $y(\xi) = \eta$ und

(c) **s.** $y' = \exp(x - y)$ mit $y(\xi) = \eta$.

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 08. Juli 2022 zu bearbeiten.

170. s.

(a) Bestimme alle Lösungen $y\colon I \to \mathbf{R}$ der Anfangswertaufgabe

$$y' = \sqrt{|y|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0.$$

(b) Es sei $a \in \mathbf{R}_+$. Zeige, daß die Anfangswertaufgabe

$$y' = a + \sqrt{|y|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \tag{$*$}$$

genau eine Lösung $y_a\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ besitzt, daß diese eine ungerade Funktion ist und daß

$$\forall t \geq 0\colon y_a(t) \geq \frac{t^2}{4}$$

gilt.

171. s. Wir betrachten die Elemente des Banachraumes $B(\mathbf{N}_1, \mathbf{R})$ der beschränkten Funktionen $\mathbf{N}_1 \to \mathbf{R}$ (vgl. Abschnitt 5.2) im Sinne von Abschnitt 0.7 auch als Folgen $a = (a_n)_{n\geq 1}$. Offenbar ist für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ die Abbildung $\mathrm{pr}_n\colon B(\mathbf{N}_1, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}, a \mapsto a_n$ eine stetige Linearform. Zeige:

(a) Es ist

$$\tilde{f}\colon B(\mathbf{N}_1, \mathbf{R}) \to B(\mathbf{N}_1, \mathbf{R}), (a_n)_{n\geq 1} \mapsto \left(\sqrt{|a_n|} + \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$$

eine stetige Funktion. (Tip: $\sqrt{\ }$ ist gleichmäßig stetig.)

(b) Die Menge c_0 der Nullfolgen $(a_n)_{n\geq 1}$ in $B(\mathbf{N}_1, E)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $B(\mathbf{N}_1, \mathbf{R})$, also ein $\mathbf{R}$-Banachraum, und es gilt $\tilde{f}(c_0) \subseteq c_0$. Daher können wir die stetige Funktion $f := \tilde{f}|c_0\colon c_0 \to c_0$ definieren.

(c) Die Anfangswertaufgabe $y' = f(y)$ mit $y(0) = 0$ besitzt *keine* Lösung. (Tip: Wäre $y\colon I \to c_0$ eine Lösung, so wäre für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ die Funktion $y_n := \mathrm{pr}_n \circ y$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe ($*$), also wäre (?) für alle $t > 0$ $y_n(t) \geq t^2/4$.)

(d) Die Anfangswertaufgabe $y' = \tilde{f}(y)$ mit $y(0) = 0$ besitzt jedoch eine Lösung $y\colon \mathbf{R} \to B(\mathbf{N}_1, \mathbf{R})$.

172. m. Wir betrachten die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$y' = -\sin(x)y + \sin(x).$$

(a) Bestimme die Gesamtheit aller Lösungen dieser Differentialgleichung.

(b) Bestimme die maximale Lösung dieser Differentialgleichung für die Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

173. m. Bernoullische Differentialgleichung.

(a) Seien $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ und g, $h\colon I \to \mathbf{R}$ zwei Funktionen. Zeige: $y\colon I \to \mathbf{R}_+$ ist genau dann eine Lösung der *Bernoullischen Differentialgleichung*

$$y' = gy + hy^\alpha,$$

wenn $z := y^{1-\alpha}\colon I \to \mathbf{R}_+$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$z' = (1-\alpha)gz + (1-\alpha)h$$

ist.

(b) Bestimme die maximale Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \frac{1}{x}y - x^2y^{-2} \quad \text{mit} \quad y(1) = 1.$$

174. m. Bestimme die Gesamtheit aller Lösungen $(y_1, y_2)\colon I \to \mathbf{R}^2$ für $I =]1, \infty[$ bzw. $I = \mathbf{R}_+$ der folgenden linearen Differentialgleichungssysteme:

(a) $y_1' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(x)} \cdot y_1$, $y_2' = y_1 + \dfrac{1}{x} \cdot y_1$.
(Tip: Erst y_1, dann y_2.)

(b) $y_1' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + x\right) \cdot y_1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - x\right) \cdot y_2$, $y_2' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - x\right) \cdot y_1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + x\right) \cdot y_2$.
(Tip: Du erhältst ein äquivalentes System durch die Variablensubstitution $z_1 = y_1 + y_2$ und $z_2 = y_1 - y_2$.)