11. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

8. Juli 2022*

175. m. Riccatische Differentialgleichung. Es seien g, h, $k\colon I \to \mathbf{R}$ Funktionen.

(a) Sei $u\colon I \to \mathbf{R}$ eine Lösung der *Riccatischen* Differentialgleichung

$$u' = g(x) \cdot u + h(x) \cdot u^2 + k(x). \qquad (*)$$

(Für $k = 0$ liegt also eine Bernoullische Differentialgleichung vor.)
Ferner sei $J \subseteq I$ ein nicht entartetes Intervall von $\mathbf{R}$. Zeige: Es ist $y\colon J \to \mathbf{R}$ genau dann eine Lösung der Riccatigleichung $(*)$, wenn $v := y - u|J$ eine Lösung der Bernoulligleichung

$$v' = (g(x) + 2h(x)u(x)) \cdot v + h(x) \cdot v^2$$

ist.

(b) Bestimme alle Funktionen $y\colon I \to \mathbf{R}$, für welche gilt:

$$xy' + 2x^2(y - 2x)^2 + y - 4x = 0 \quad \text{und} \quad y(-1) = -1.$$

(Tip: Zunächst auf $\mathbf{R}_-$ mit Ricattigleichung; versuche $u = ax + b$.)

176. m. Legendresche Polynome.

Für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ heißt das durch die *Formel von Rodriguez* definierte Polynom

$$P_n := \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$$

das *Legendresche Polynom vom Grade n*.

(a) Berechne und skizziere $P_0, \ldots, P_4$.

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 15. Juli 2022 zu bearbeiten.

(b) Zeige, daß P_n eine Lösung der *Legendreschen* Differentialgleichung

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

ist.

(c) Zeige, daß P_n in $]-1, 1[$ genau n paarweise verschiedene Nullstellen hat und daß für $n \geq 1$ zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von P_n genau eine Nullstelle von P_{n-1} liegt.

(Tip: Definiere $Q_n := (x^2 - 1)^n$, zeige $(x^2 - 1)Q_n' - 2nxQ_n = 0$ und berechne die k-te Ableitung. Aus $k = n + 1$ folgt (b). Leite aus $k = n$ die Rekursionsformel $P_{n+1} = xP_n + \frac{x^2-1}{n+1}P_n'$ her und beweise nun (c) mit vollständiger Induktion.)

177. s. Bestimme eine Lösung $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ der Anfangswertaufgabe

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot y \quad \text{mit} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Tip: Bestimme eine Matrix C, so daß CAC^{-1} Dreiecksgestalt hat. Die transformierte Differentialgleichung $z' = (CAC^{-1})z$ ist leicht zu lösen, oder? Wie hängen ihre Lösungen mit der Lösung des gegebenen Anfangswertproblems zusammen?)

178. m. Spezielle Normen auf $\mathrm{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$ Seien n, $m \in \mathbf{N}_0$, $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$ und (a_{ik}) diejenige $(m \times n)$-Matrix, welche A bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbf{K}^n$ und $\mathbf{K}^m$ beschreibt. Auf dem $\mathbf{K}^n$ bzw. $\mathbf{K}^m$ betrachten wir die Normen

$$\|v\|_1 := \sum |v_k| \quad \text{und} \quad \|v\|_\infty := \max\{|v_k|\}.$$

Mit $\|A\|_1$ bzw. $\|A\|_\infty$ bezeichnen wir die in (a) im Theorem aus Abschnitt 11.7 auf $\mathrm{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$ eingeführten Normen, und zwar jeweils bezüglich der korrespondierenden Normen des $\mathbf{K}^n$ bzw. $\mathbf{K}^m$. Zeige: Hierfür gilt dann:

$$\|A\|_1 = \max\left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| \;\middle|\; k = 1, \ldots, n \right\}$$

und

$$\|A\|_\infty = \max\left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \;\middle|\; i = 1, \ldots, m \right\}.$$

(Deswegen heißt $\|A\|_1$ auch die *Spaltensummen-* und $\|A\|_\infty$ die *Zeilensummennorm* von A.)

179. s. Es seien $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_n \in \mathbf{K}$ und Konvergenzradius $\rho > 0$ und $A \in \mathrm{L}(E, E)$ ein Operator mit $\|A\| < \rho$.

(a) Ist $\Phi\colon \mathrm{L}(E, E) \to F$ eine stetige lineare Abbildung in einen weiteren Banachraum F, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \Phi(A^n)$$

in F gegen $\Phi(f(A))$. Insbesondere konvergieren daher (?) für jeden Vektor $v \in E$ und für jeden Operator $C \in \mathrm{L}(E, E)$ die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (A^n(v)), \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (C \circ A^n) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (A^n \circ C)$$

gegen $f(A)(v)$ bzw. $C \circ f(A)$ bzw. $f(A) \circ C$.

(b) Ist $C \in \mathrm{L}(E, E)$ ein Operator, der mit A kommutiert, d. h. $A \circ C = C \circ A$, so gilt auch $C \circ f(A) = f(A) \circ C$.

(c) Ist $C \in \mathrm{GL}(E)$ (vgl. Abschnitt 11.9), und gilt auch $\|C \circ A \circ C^{-1}\| < \rho$, so ist

$$f(C \circ A \circ C^{-1}) = C \circ f(A) \circ C^{-1}.$$

180. s. Sei $A \in \mathrm{L}(E, E)$ mit $\|A\| < \infty$. Zeige

$$\exp(A) = \lim_{n \to \infty} \left(1_E + \frac{A}{n}\right)^n.$$

(Tip: Zeige dazu $\left\| \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k - \left(1_E + \frac{A}{n}\right)^n \right\| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \|A\|^k - \left(1 + \frac{\|A\|}{n}\right)^n$; dabei schreibe $\left(1_E + \frac{A}{n}\right)^n$ als explizites Polynom von A.)

181. s. Sei E ein Banachraum. Zeige: Ist $\dim E < \infty$, so ist $\mathrm{GL}(E)$ eine *dichte* Teilmenge von $\mathrm{L}(E, E) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(E, E)$ (vgl. Definition 2 aus Abschnitt 4.8).

(Tip: Verwende das charakteristische Polynom von $A \in \mathrm{L}(E, E)$.)

182. Über $\exp\colon \mathrm{L}(E, E) \to \mathrm{GL}(E)$ Zeige:

(a) **s.** $\forall A, B \in \mathrm{L}(E, E)\colon (A \circ B = B \circ A \implies \exp(A+B) = \exp(A) \circ \exp(B))$. (Tip: $\frac{d}{dt}(\gamma_A(t) \circ \gamma_B(t)) =$?.)

(b) **s.** Für jedes $A \in \mathrm{L}(E, E)$ ist γ_A (vgl. Theorem 2 aus Abschnitt 11.11) ein Gruppenhomomorphismus, d. h.

$$\forall t, s \in \mathbf{R}\colon \gamma_A(t + s) = \gamma_A(t) \circ \gamma_A(s).$$

Wir nennen γ_A daher auch eine Einparameter-Untergruppe von $\mathrm{GL}(E)$ und A ihren Erzeuger. (Diese Aussage ist in der Theorie der Liegruppen von fundamentaler Bedeutung.)

(c) **m.** Es sei $\beta\colon E \times E \to F$ eine stetige bilineare Abbildung in einen anderen $\mathbf{K}$-Banachraum F. Dann ist

$$G(E,\beta) := \{A \in \mathrm{GL}(E) \mid \forall v, w \in E\colon \beta(Av, Aw) = \beta(v,w)\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(E)$, d. h. $\forall A, B \in G(E,\beta)\colon A \circ B^{-1} \in G(E,\beta)$ und $G(E,\beta) \neq \emptyset$. (Auf diese Weise entstehen z. B. die orthogonale Gruppe oder die Lorentzgruppe, indem für β geeignete Bilinearformen gewählt werden.)

Zeige weiter: Für jedes $A \in \mathrm{L}(E,E)$ gilt folgende Äquivalenz:

$$\Big(\forall v, w \in E\colon \beta(Av, w) + \beta(v, Aw) = 0\Big) \iff \gamma_A(\mathbf{R}) \subset G(E,\beta).$$

(Tip: $\frac{d}{dt}\beta(\gamma_A(t)v, \gamma_A(t)w) = ?$.)

183. **m.** Zu jeder stetigen Funktion $A\colon J \to \mathrm{L}(E,E)$ werde $Y(s,t) \in \mathrm{GL}(E)$ wie in Teil (a) des Theorems aus Abschnitt 11.12 definiert. Dann gilt

$$\forall r, s, t \in J\colon Y(s,t) \circ Y(r,s) = Y(r,t) \wedge Y(s,t)^{-1} = Y(t,s).$$

184. **m.** Berechne $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

185. **m. Stetigkeit multilinearer Abbildungen.** Seien $E_1, \ldots, E_n$ endlich-dimensionale $\mathbf{K}$-Vektorräume und F irgendein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum. Zeige: Jede n-lineare Abbildung

$$\varphi\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$$

ist bezüglich jeder Wahl von Normen auf den E_k stetig.

(Tip: Für jedes $k = 1, \ldots, n$ wähle man eine Basis $(b_{k1}, \ldots, b_{km_k})$ von E_k und bezeichne mit $(\lambda_{k1}, \ldots, \lambda_{km_k})$ die dazu duale Basis von $E_k^* := \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(E_k, \mathbf{K})$, d. h. $\lambda_{ki}\colon E_k \to \mathbf{K}$ ist die Linearform, die durch

$$\forall j \in \{1, \ldots, m_k\}\colon \lambda_{ki}(b_{kj}) = \delta_{ij}$$

charakterisiert ist. Dann gilt (?)

$$\forall v = (v_1, \ldots, v_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n\colon \qquad \varphi(v) = \sum \lambda_{1i_1}(v_1) \cdots \lambda_{ni_n}(v_n) \cdot \varphi(b_{1i_1}, \ldots, b_{ni_n}),$$

wobei in der Summe der Index i_k jeweils die Zahlen $1, \ldots, m_k$ durchläuft.)