12. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

15. Juli 2022*

186. Jede **K**-wertige $(n \times n)$-Matrix A beschreibt bekanntliche eine lineare Abbildung $A \in \mathrm{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^n)$ durch $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$.

(a) **m.** Bestimme γ_A jeweils für Matrizen der Form:

(i) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$,

(ii) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

(iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

(b) **m.** Seien V ein abgeschlossener Untervektorraum des Banachraumes E und $B \in \mathrm{L}(E, E)$ eine stetige lineare Abbildung, unter der V *invariant* ist, d. h. $B(V) \subseteq V$. Sei $B^V \in L(V, V)$ die von B auf V induzierte stetige lineare Abbildung. Zeige, daß dann V auch invariant unter $\exp(B)$ ist und daß gilt

$$\exp(B)|V = (V \hookrightarrow E) \circ \exp(B^V).$$

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 22. Juli 2022 zu bearbeiten.

Im Falle $E = \mathbf{K}^n$ gilt also (?)

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \exp(A_m) \end{pmatrix},$$

wenn

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix},$$

eine Block-Diagonalmatrix ist.

(c) **s.** Löse die folgenden Anfangswertaufgaben:

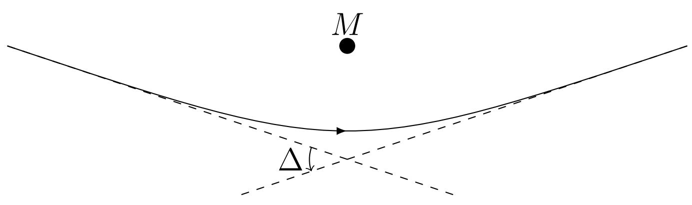
(i) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot y,\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$

(ii) $y' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot y,\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix};$

(iii) $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot y,\ y(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$

(Tip: Führe geschickte Transformationen an der Matrix durch, und beachte, daß $C \cdot \exp(A) \cdot C^{-1} = \exp(C \cdot A \cdot C^{-1})$ gilt, sowie Teil (a).)

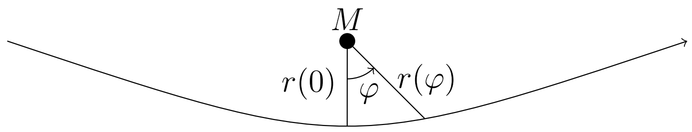
187. Aufgrund seiner Allgemeinen Relativitätstheorie behauptete Albert Einstein die Ablenkung von Licht durch große Massen. Durch Beobachtungen während der Sonnenfinsternis am 29.5.1919 wurde der exakte Winkel Δ der Lichtablenkung bestätigt, was wesentlich zur Anerkennung der Allgemeinen Relativitätstheorie beitrug.



Einstein ging davon aus, daß in der Nähe einer großen Masse anstatt der euklidischen Geometrie (oder korrekter: der Minkowskischen Geometrie) die sogenannte Schwarzschild-Geometrie zugrundezulegen ist. Danach bewegt sich ein nahe an der Masse M vorbeifliegendes ruhemasseloses Teilchen, etwa ein Photon, in einer Ebene, und zwar gemäß der Differentialgleichung

$$y'' + y = 3My^2,$$

wobei y die Funktion $\varphi \mapsto 1/r(\varphi)$ und $(r(\varphi), \varphi)$ die Bahnbeschreibung mit Hilfe von Polarkoordinaten ist.



Wir legen die Richtung $\varphi = 0$ so fest, daß $r(0)$ der minimale Abstand des Photons vom Massenschwerpunkt ist, also $y'(0) = 0$. Im Falle der Beobachtungen vom 29.5.1919 ist $r(0)$ der Sonnenradius und M die Sonnenmasse in geeigneten natürlichen Einheiten. Wenn wir $r(0) = 1$ (also $y(0) = 1$) normieren, so ist $3M = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$ zu setzen. Beachte: Im Falle $M = 0$ wäre $y \equiv \cos$, was einer geradlinigen Bewegung entspricht (?).

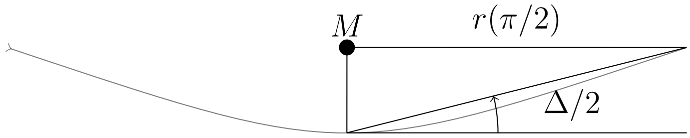
(a) **s.** Bestimme y approximativ nach Einsteins Methode: Da M sehr klein ist, ist y ungefähr cos. Daher bestimmte er eine approximative Lösung y_E, indem er die modifizierte Anfangswertaufgabe

$$y'' + y = 3M\cos^2(x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

exakt löste.

(b) **s.** Bestimme $y(\pi/2)$ numerisch mit Hilfe des Runge–Kutta-Verfahrens (siehe Abschnitt 11.5); 50 Einzelschritte sollten dabei genügen.

(c) **m.** Da die Ablenkung Δ des Lichtes durch die Sonnenmasse äußerst gering ist und nur in Sonnennähe stattfindet, machen wir nur einen vernachlässigbaren Fehler, wenn wir Δ gemäß der folgenden Skizze bestimmen:



Wie groß ist Δ ungefähr (Angabe in Winkelsekunden; $1'' = 1^\circ/3600$), wenn die Werte von oben zugrundegelegt werden?

(Der 1919 von Crommelin und Davidson gemessene Wert für die Ablenkung Δ war 1,98$''$ $\pm\, 0,18''$. Durch Messungen an Radiosternen wurde 1976 von Formalant und Sramek ein verbesserter Wert für Δ von 1,777$''$ $\pm$ 0,03$''$ bestimmt.)

188. s. Bewegung in einem Zentralkraftfeld. Es seien E ein $\mathbf{R}$-Banachraum, B eine offene Teilmenge von E, und $g\colon B \to \mathbf{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion, d. h.:

$$\forall v \in B\, \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+\, \exists L \in \mathbf{R}_+\, \forall v_1, v_2 \in B \cap U_\varepsilon(v)\colon\ |g(v_1) - g(v_2)| \le L \cdot \|v_1 - v_2\|\,.$$

Physiker mögen dann die Funktion

$$f\colon B \to E, v \mapsto g(v) \cdot v$$

als ein „Zentralkraftfeld“ mit Zentrum 0 interpretieren. Es seien nun $y\colon I \to E$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' = f(y)$, $\xi \in I$, und U der Untervektorraum von E, der von den Vektoren $y(\xi)$ und $y'(\xi)$ aufgespannt wird. Zeige:

(a) Es ist $y(I) \subseteq U$; sind $y(\xi)$ und $y'(\xi)$ also linear unabhängig, so beschreibt y eine *ebene Bewegung*. (Warum kommt diese Aufgabe erst jetzt?)

(b) Im Falle $\dim U = 2$ sei $\omega\colon U \times U \to \mathbf{R}$ eine *Volumenform* von U, d. h. eine alternierende Bilinearform (also $\omega(u,v) = -\omega(v,u)$ für alle u, $v \in U$ und damit $\omega(u,u) = 0$) mit $\omega \neq 0$. Dann ist die Funktion $I \to \mathbf{R}, t \mapsto \omega(y(t), y'(t))$ konstant. Für Physiker ist hierin der „Drehimpuls-Erhaltungssatz“ enthalten, der nach Integration in das *zweite Keplersche Gesetz* übergeht.

189. m. Topologische Teilräume. Sei E ein topologischer Raum und M eine nicht leere Teilmenge von E. Dann ist $\mathfrak{T}_M := \{G \cap M \mid G \in \mathfrak{T}(E)\}$ eine topologische Struktur von M, die sog. von E oder von $\mathfrak{T}(E)$ auf M induzierte *Teilraumtopologie.* $(M, \mathfrak{T}_M)$ heißt auch *topologischer Teilraum* von E.

Ist d eine Metrik auf E und $d_M := d|(M \times M)$ (vgl. Abschnitt 3.7), so ist $\mathfrak{T}(M, d_M)$ die von $\mathfrak{T}(E, d)$ auf M induzierte Teilraumtopologie.

190. s. Produkte topologischer Räume.

(a) Sei $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume und

$$E := \prod_{i \in I} E_i := \{p = (p_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I\colon p_i \in E_i\}$$

ihr Produkt. Mit $\mathrm{pr}_i\colon E \to E_i, (p_i)_{i\in I} \mapsto p_i$, $i \in I$, bezeichnen wir die kanonischen Projektionsabbildungen.

Dann nennen wir eine Teilmenge $G \subseteq E$ von E *offen*, wenn

$$\forall p \in G\, \exists i_1, \ldots, i_n \in I \exists U_1 \in \mathfrak{U}^o(p_{i_1}, E_{i_1}), \ldots, U_n \in \mathfrak{U}^o(p_{i_n}, E_{i_n})\colon \\ \mathrm{pr}_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}_{i_n}^{-1}(U_n) \subseteq G.$$

Das System $\mathfrak{T}(E)$ der so definierten offenen Mengen von E ist eine topologische Struktur von E. Ist $G \in \mathfrak{T}(E_i)$, so ist $\mathrm{pr}_i^{-1}(G) \in \mathfrak{T}(E)$.

(b) Sind (E_1, d_1), …, (E_n, d_n) metrische Räume, so stimmt die topologische Struktur $\mathfrak{T}(E, d)$ des in Abschnitt 3.3 definierten metrischen Produktraumes (E, d) mit der in (a) definierten topologischen Struktur $\mathfrak{T}(E)$ des Produktes der topologischen Räume $(E_i, \mathfrak{T}(E_i, d_i))_{i\in I}$ überein.

191. s. Eine exotische topologische Struktur auf R. Sei

$$\mathfrak{T} := \{\emptyset, \mathbf{R}\} \cup \{]a, \infty[\mid a \in \mathbf{R}\}.$$

Zeige:

(a) Es ist $\mathfrak{T}$ eine topologische Struktur auf $\mathbf{R}$.

(b) Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert genau dann in $(\mathbf{R}, \mathfrak{T})$, wenn sie nach unten beschränkt ist. Gib im Falle der Konvergenz alle Grenzwerte an.

(c) Es ist $(\mathbf{R}, \mathfrak{T})$ kein Hausdorff-Raum.

192. m. Seien E ein topologischer Raum und M, $N \subseteq E$ Teilmengen. Beweise, daß $(M \cap N)^o = M^o \cap N^o$. Gilt auch $(M \cup N)^o = M^o \cup N^o$?