13. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

22. Juli 2022*

193. s. Die Riemannsche Zahlenkugel. Ähnlich wie in Abschnitt 10.1 die Zahlengerade $\mathbf{R}$ zu $\widehat{\mathbf{R}}$ erweitert wurde, wird hier die komplexe Ebene $\mathbf{C}$ durch Hinzunahme *eines* Elementes ∞ zu $\widehat{\mathbf{C}} \coloneqq \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ erweitert. Weiterhin definieren wir für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, daß

$$U_\varepsilon(\infty) \coloneqq \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1/\varepsilon\} \cup \{\infty\}.$$

In dem wir mutatis mutandis die Definition aus Abschnitt 6.1 für offene Mengen benutzen, erhalten wir auf $\widehat{\mathbf{C}}$ eine topologische Struktur $\mathfrak{T}(\widehat{\mathbf{C}})$. Der dadurch definierte topologische Raum heißt die *Riemannsche Zahlenkugel*, vgl. (c).

(a) Die von $\mathfrak{T}(\widehat{\mathbf{C}})$ auf $\mathbf{C}$ induzierte Teilraumtopologie stimmt mit der kanonischen topologischen Struktur von $\mathbf{C}$ überein.

(b) Die Abbildung

$$j \colon \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}, z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbf{C}^*, \\ \infty & \text{für } z = 0 \text{ und} \\ 0 & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

ist ein Homöomorphismus.

(c) Die *stereographische Projektion* $f \colon \mathbf{S}^2 \to \widehat{\mathbf{C}}$ von der zwei-dimensionalen *Sphäre*

$$\mathbf{S}^2 \coloneqq \{p \in \mathbf{R}^3 \mid x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2 = 1\}$$

auf $\widehat{\mathbf{C}}$, die den „Nordpol“ $N \coloneqq (0,0,1)$ auf ∞ abbildet und die im übrigen durch

$$f|(\mathbf{S}^2 \setminus \{N\}) \equiv \frac{1}{1-z} \cdot (x + i \cdot y)|(\mathbf{S}^2 \setminus \{N\})$$

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 29. Juli 2022 zu bearbeiten.

beschrieben ist, ist ein Homöomorphismus. Man fertige eine Skizze an, aus der ersichtlich ist, daß diese Abbildung die Punkte der $\mathbf{S}^2$ vom Projektionszentrum N auf die Äquatorialebene projiziert.

(Tip: Untersuchungen in der Nähe von $z = \infty \in \widehat{\mathbf{C}}$ kann man mit Hilfe der Abbildung j aus (b) auf Untersuchungen in der Nähe von $z = 0$ zurückführen.)

(d) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix mit komplexwertigen Einträgen mit $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Dann existiert genau ein Homöomorphismus $f_A\colon \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$, der die *gebrochen-lineare Abbildung* (oder auch *Möbius-Transformation*)

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

fortsetzt.

(Tip: Man beachte den Tip zu (c) und mache eine Fallunterscheidung, je nachdem, ob $c = 0$ oder $c \neq 0$. In letzterem Falle kann man f_A als Komposition $f_B \circ j \circ f_C$ schreiben, wobei f_B und f_C vom Typ $(c, d) = (0, 1)$ sind.)

194. Seien E ein topologischer Raum und M, $N \subseteq E$ Teilmengen. Zeige:

(a) **m.** $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

(b) **s.** Der Rand ∂M ist eine abgeschlossene Teilmenge von E; für ihn gilt weiterhin

$$\partial M = \{p \in E \mid \forall U \in \mathfrak{U}^o(p)\colon M \cap U \neq \emptyset \wedge (E \setminus M) \cap U \neq \emptyset\}.$$

(c) **s.** Sind M und N jeweils offen und dicht in E, so ist auch $M \cap N$ eine offene und dichte Teilmenge von E.

195. **s.** Es seien E ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum, $v \in E$ und $r \in \mathbf{R}_+$. Dann gilt:

$$\overline{U_r(v)} = B_r(v) := \{u \in E \mid \|u - v\| \leq r\}$$

und

$$B_r(v)^o = U_r(v).$$

(Tip: Auf Strahlen arbeiten!)

Gelten diese Aussagen auch in beliebigen metrischen Räumen?

196. m. Es seien A und B zwei abgeschlossene Teilmengen eines topologischen Raumes E, und $f\colon A \to E'$ und $g\colon B \to E'$ zwei stetige Abbildungen in einen topologischen Raum E', und es gelte $f|(A \cap B) = g|(A \cap B)$. Dann existiert genau eine Abbildung $h\colon A \cup B \to E'$ mit $h|A = f$ und $h|B = g$, und diese ist stetig.

(Diese Aussage über das Aneinanderheften stetiger Abbildungen verallgemeinert offenbar die entsprechende Aussage aus der Aufgabe 2 von Abschnitt 3.7.)

197. s. Zeige, daß die Abbildung

$$\frac{x}{1-x^2}|]-1,1[\colon]-1,1[\to \mathbf{R}$$

ein Homöomorphismus ist.

198. s. Es sei E ein metrischer Raum, in dem der Satz von Heine–Borel gelte, d. h. jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von E sei kompakt. Zeige, daß E notwendigerweise vollständig ist.