14. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

1. August 2022*

199. s. Seien r, $s \in \mathbf{R}_+$. Zeige, daß der Kreis K_r in $\mathbf{R}^2$ um 0 mit Radius r und das Quadrat Q_s in $\mathbf{R}^2$ mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge $2s$ zueinander homöomorph sind.

200. s. Zeige:

(a) Jedes Intervall $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}) \setminus \{\emptyset\}$ ist zusammenhängend. (Tip: Ist $M \subseteq I$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raumes I, so ist die Funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ mit $f|M \equiv 1$ und $f|(I \setminus M) \equiv 0$ stetig. Also ...?)

(b) Ist $f\colon E \to E'$ eine stetige Abbildung und M eine zusammenhängende bzw. wegweise zusammenhängende Teilmenge von E, so ist $f(M)$ eine zusammenhängende bzw. wegweise zusammenhängende Teilmenge von E'.

(c) Jede wegweise zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes ist auch zusammenhängend. (Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch.)

(d) Es sei g eine Gerade im $\mathbf{R}^2$. Zeige, daß es keinen Homöomorphismus von $\mathbf{R}^2$ auf $\mathbf{R}^2 \setminus g$ gibt.

201. s. Identitätssatz für reell analytische Funktionen. Es seien J ein offenes Intervall von $\mathbf{R}$, $t_0 \in J$ und f, $g\colon J \to \mathbf{R}$ zwei reell analytische Funktion (vgl. Abschnitt 9.5). Existiert eine Folge $(t_n)_{n \geq 1}$ von Punkten in $J \setminus \{t_0\}$, die gegen t_0 konvergiert und gilt $f(t_n) = g(t_n)$ für alle $n \geq 1$, so ist $f \equiv g$.

(Tip: Zeige, daß der offene Kern der Menge $\{t \in J \mid f(t) = g(t)\}$ in J auch abgeschlossen ist; beachte den Identitätssatz für Potenzreihen.)

202. s. Zeige:

(a) Ist K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes E, so gilt:

$$\forall U \in \mathfrak{U}^o(K, E)\, \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon U_\varepsilon(K) \subseteq U.$$

*Die Übungsblätter sind bis 12 Uhr am 29. August 2022 bei Eurem Tutor per Mail abzugeben.

(Tip: Betrachte $\operatorname{dist}(\cdot, E \setminus U)$.)

(b) **Tubenlemma.** Es seien E und E' topologische Räume, $q \in E$ ein beliebiger Punkt, $K \subseteq E'$ eine kompakte Teilmenge und $G \in \mathfrak{U}^o(\{q\} \times K, E \times E')$ (vgl. Aufgabe 190). Dann gilt: Es gibt eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(q, E)$, so daß sogar die „Tube“ $U \times K$ Teilmenge von G ist.

203. **s.** Zeige:

(a) Es gibt *keinen* Homöomorphismus
$$f\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1].$$
(Tip: Man untersuche $I \setminus \{1/2\}$ und $([0,1] \times [0,1]) \setminus \{f(1/2)\}$ auf wegweisen Zusammenhang.)

(b) Es gibt keine injektiven Peano-Wege, d. h. keine bijektiven stetigen Abbildungen
$$\alpha\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1].$$

204. **s.** Es seien E ein beliebiger topologischer Raum, $\alpha\colon [a,b] \to E$ ein Weg in E mit $-\infty < a < b < \infty$ und $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung der Spur $\alpha([a,b])$ des Weges α. Dann existiert eine äquidistante Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots t_n = b$ des Intervalls $[a,b]$, so daß jedes Teilstück $\alpha|[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$, des Weges jeweils ganz in einer Teilmengen V_i verläuft.

(Tip: Verwende das Theorem aus Abschnitt 12.4.)

205. **s.** Die Räume $\widehat{\mathbf{R}}$ und $\widehat{\mathbf{C}}$ sind kompakt (vgl. Beispiel (c) aus Abschnitt 12.2 und Aufgabe 192).

(Tip: Unter Verwendung von Aufgabe 192 kannst Du für $\widehat{\mathbf{C}}$ einen ganz kurzen Beweis geben.)

206. **s. Der Hilbertsche Folgenraum ℓ^2.** Es sei $V := \{a\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{K}\}$ der Vektorraum der $\mathbf{K}$-wertigen Funktionen auf $\mathbf{N}_0$ (also der $\mathbf{K}$-wertigen Folgen),
$$N\colon V \to \widehat{\mathbf{R}}, a \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} |a(k)|^2$$
und
$$\ell^2 := \{a \in V \mid N(a) < \infty\}.$$
Zeige:

(a) Für a, $b \in \ell^2$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{a(k)} \cdot b(k)$ in $\mathbf{K}$. Daher können wir
$$\langle a, b\rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a(k)} \cdot b(k)$$

definieren. Es gilt

$$\forall a, b \in \ell^2 \colon \; |\langle a, b \rangle|^2 \leq N(a) \cdot N(b).$$

(Tip: $\sum_{k=0}^{n-1} \overline{a(k)} \cdot b(k) = \langle (a(0), \ldots, a(n-1)), (b(0), \ldots, b(n-1)) \rangle_{\mathbf{K}^n}$.)

(b) ℓ^2 ist ein Untervektorraum von V und $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein $\mathbf{K}$-Prähilbertraum. (Tip: $N(a+b) = ?$.)

(c) $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist vollständig und somit ein $\mathbf{K}$-Hilbertraum. (Tip: Ist $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge in $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so ist für jedes $k \in \mathbf{N}_0$ die Folge $(a_n(k))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{K}$. — Definieren wir $N_j(a) := \sum_{k=0}^{j} |a(k)|^2$ für $a \in \ell^2$, so gilt $N_j(a_n - a_m) \leq N(a_n - a_m)$. — Es könnte hilfreich sein, sich den Beweis des Theorems 2 aus Abschnitt 5.6 anzuschauen.)