3. Übung zur Analysis I

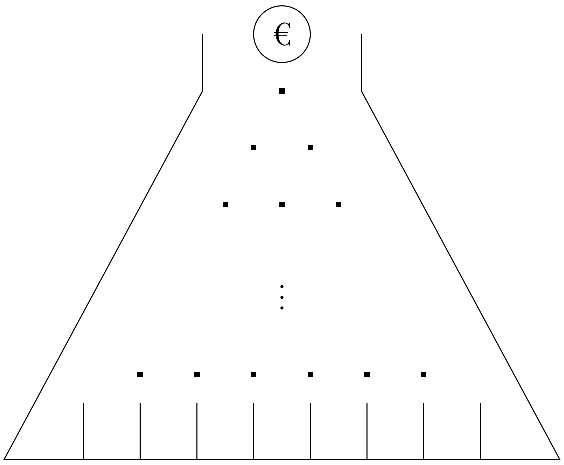
Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

2. November 2021*

11. **(a)** **m.** Beweise: Für a, $b \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}_0$ gilt die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(b) **s.** In das abgebildete *Galtonsche Nagelbrett* mit n Reihen von Nägeln werden oben 2^n Münzen eingeworfen, die über die Nägel schließlich in eines der $n+1$ unten angebrachten Löcher fallen:

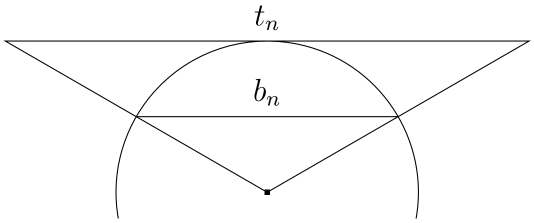


Dabei sei der Durchmesser der Münzen gleich dem horizontalen Nagelabstand. Ferner soll eine Münze von einem Nagel stets mit derselben Wahrscheinlichkeit nach links und nach rechts fallen. Welches ist die wahrscheinlichste Verteilung der Münzen auf die Fächer?

12. **(a)** **s. Berechnung der Bogenlänge des Einheitskreises über einer Sehne (Teil 2).** Analog zu Aufgabe 9 läßt sich der Bogen B über eine Sehne s der Länge ℓ durch Tangentenzüge τ_n ($n = 1, 2, 4, 8, \ldots$) mit

*Die Übungsaufgaben sind bis zur Übung am 9. November 2021 zu bearbeiten.

jeweils gleich langen Seiten der Länge t_n annähern. Dabei ergibt sich t_n gemäß folgendem Bild aus b_n:



Berechne (zum Beispiel unter Benutzung von h_n aus dem Bild zu Aufgabe 9) t_n in Abhängigkeit von b_n und zeige, daß für $T_{2^n} = 2^n \cdot t_{2^n}$ mit $n \in \mathbf{N}_0$ gilt:

$$B_{2^n} \leq B_{2^{n+1}} \leq T_{2^{n+1}} \leq T_{2^n}.$$

(b) **m.** Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Funktion arcsin und dem Problem der Bogenberechnung am Einheitskreis? Mache eine Skizze.

(c) **s.** Schreibe ein (Scheme-)Programm unter Ausnutzung der Erkenntnis aus (b) zur Berechung von arcsin für $x \in \left]-1, 1\right[$.

13. Es seien n, $m \in \mathbf{N}_0$ natürliche Zahlen, $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen mit $a_n = b_m = 1$ und P und Q die „Polynomfunktionen“

$$P\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \quad \text{bzw.} \quad Q\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot t^k.$$

Dann gilt:

(a) **s.** Es gibt eine Zahl $R \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $t \in \mathbf{R}$ mit $|t| \geq R$ gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot |t|^n \leq |P(t)| \leq 2 \cdot |t|^n.$$

(Tipp: Du brauchst nur (?) $|t| \geq 1$ zu betrachten. Ist $M := \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$, so kannst (?) Du $R := \max\{1, 2M\}$ wählen.)

(b) **m.** Zu der „gebrochen-rationalen“ Funktion $f := P/Q$ gibt es eine Zahl $R \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $t \in \mathbf{R}$ mit $|t| \geq R$ gilt:

$$\frac{1}{4} \cdot |t|^{n-m} \leq |f(t)| \leq 4 \cdot |t|^{n-m}.$$

Was kannst Du hieraus für das Wachstum der Funktion f für betraglich große t schließen?

14. **m.** Es seien a, b, $c \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen. Bestimme die Intervalle, auf denen Funktion

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto at^2 + bt + c$$

positiv ist.

(Tip: Betrachte zunächst den Fall $a = 1$. Was ist mit dem Fall $a = 0$?)

15. **s.** Berechne eine Formel für $\sum_{k=1}^{n} k^2$, das heißt eine Funktion $f\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$, so daß für alle $n \in \mathbf{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = f(n), \tag{1}$$

und zwar auf folgende Weise: In dem Ansatz $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$ bestimme zunächst die Koeffizienten a, b, c und d, so daß (1) für „kleine“ n gilt. Anschließend prüfe das Ergebnis durch vollständige Induktion.

Hinter drei Personen A, B und C stecken die Götter der Wahrheit, der Lüge und des Zufalls. Der Gott der Wahrheit antwortet stets mit der Wahrheit, der Gott der Lüge dagegen kennt nur die Lüge und der Gott des Zufalls antwortet beliebig entweder mit der Wahrheit oder mit einer Lüge. Deine Aufgabe ist es, die Identitäten von A, B und C aufzudecken, indem du lediglich drei Ja/Nein-Fragen stellst. Jede Frage kann aber nur einem Gott gestellt werden. Zudem verstehen die Götter zwar Deutsch, sie werden deine Frage jedoch in ihrer eigenen Sprache beantworten, d. h. mit DA und BAL. Du weißt dabei nicht, welche Antwort Ja und welche Nein bedeutet. (Raymond Smullyan und John McCarthy)