15. Übung zur Analysis II

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

1. August 2022*

207. **m.** Seien E ein topologischer Raum und K ein quasikompakter Raum sowie $f\colon E \times K \to \mathbf{R}$ eine stetige Abbildung. Zeige, daß dann die Abbildung

$$g\colon E \to \widehat{\mathbf{R}}, p \mapsto \sup\{f(p,q) \mid q \in K\}$$

stetig ist.

208. **m.** Beweise den Rieszschen Darstellungssatz für endlich-dimensionale Hilberträume ohne Verwendung des Theorems aus Abschnitt 12.10.

(Tip: ist $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Orthonormalbasis des fraglichen Hilbertraumes, so betrachte $u \coloneqq \sum_i \overline{\lambda(a_i)} \cdot a_i$.)

209. **m.** Es seien H und H' jeweils $\mathbf{K}$-Hilberträume, $n \coloneqq \dim H < \infty$, und es sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Orthonormalbasis von H. Zeige, daß auf dem $\mathbf{K}$-Vektorraum $L(H, H')$ (vgl. Abschnitt 11.7) durch

$$\langle A, B\rangle \coloneqq \sum_i \langle Aa_i, Ba_i\rangle$$

ein Skalarprodukt definiert wird, daß dieses von der speziellen Wahl der Orthonormalbasis $(a_1, \ldots, a_n)$ unabhängig ist, und daß gilt

$$\forall A \in L(H, H')\, \forall v \in H\colon \|Av\|^2 \le \langle A, A\rangle \cdot \|v\|^2.$$

Schließlich ist die durch $\sqrt{\langle A, A\rangle}$ definierte Norm äquivalent zur Operatornorm $\|\cdot\|$ (vgl. Abschnitt 11.7), und es wird $L(H, H')$ mit dieser Norm zu einem Hilbertraum.

*Die Aufgaben dienen der Vorbereitung auf die Prüfungen und sind für die erste Übungsstunde der Analysis III vorzubereiten.

210. m. Es sei H ein $\mathbf{K}$-Hilbertraum und $f \in C^0([a,b],H)$. Gilt

$$\left\| \int_a^b f\,dx \right\| = \int_a^b \|f\|\ dx,$$

so existiert eine Funktion $\varphi \in C^0([a,b],\mathbf{K})$, so daß

$$f = \varphi \cdot v \quad \text{mit} \quad v := \int_a^b f\,dx$$

gilt.

(Tip: $\left\langle v, \int\limits_a^b f\,dx \right\rangle$.)

211. m. Höhenfunktionen. Seien H ein Hilbertraum, $p_0, u \in H$, und h die *Höhenfunktion*

$$h\colon H \to \mathbf{R}, p \mapsto \langle p - p_0, u\rangle\,.$$

Zeige, daß h differenzierbar ist, und daß

$$\forall a \in H\,\forall v \in H\colon D_a h(v) = \langle v, u\rangle$$

gilt.

(Offenbar ist die Gleichung $h(p) = 0$ die *Hessesche Normalform* der Gleichung der Hyperebene E durch p_0, die senkrecht zu u ist, und $|h(p)|$ ist der Abstand von p zu E.)

212. m. Sei die Funktion

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (t,s) \mapsto (t \cdot \exp(s), \sin(t+s))$$

gegeben. Begründe ausführlich, warum f differenzierbar ist, und berechne $D_{(1,\ln 2)} f(2,1)$.

213. m. Aus partieller Differenzierbarkeit folgt nicht Differenzierbarkeit. In welchen Punkten $p \in \mathbf{R}^2$ ist die Funktion

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (t,s) \mapsto \begin{cases} \frac{t^2 s}{t^2+s^2} & \text{für } (t,s) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (t,s) = (0,0) \end{cases}$$

stetig, partiell differenzierbar, bzw. differenzierbar? Existieren für alle $v \in \mathbf{R}^2$ die Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial v}(0)$?

(Tip: Theorem aus Abschnitt 13.2. Benutze $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbf{R}^2$.)

214. m. Über anziehende und abstoßende Fixpunkte. Es sei $G \subseteq E$ eine offene Teilmenge eines Banachraumes und $f\colon G \to E$ eine in $a \in G$ differenzierbare Abbildung mit Fixpunkt a. Die Norm von E induziert gemäß Abschnitt 11.7 bekanntlich eine Norm auf $\mathrm{L}(E, E)$. Damit ist $\|D_a f\|$ definiert. Zeige:

(a) Ist
$$\|D_a f\| < 1, \tag{1}$$
so ist a ein Attraktor von f.

(b) Existiert hingegen ein $M > 1$, so daß
$$\forall v \in E\colon\ \|D_a f(v)\| \geq M \cdot \|v\|\,, \tag{2}$$
so ist a ein abstoßender Fixpunkt von f. (Beachte, daß (2) nicht aus $\|D_a f\| \geq M$ folgt; warum eigentlich nicht?)

(c) Ist a ein nicht isolierter Fixpunkt (vgl. Definition (c) aus Abschnitt 6.2), so gilt weder Voraussetzung (1) noch (2). Im Falle $\dim E < \infty$ ist dann außerdem $\lambda = 1$ ein Eigenwert des Endomorphismus $D_a f\colon E \to E$.