Vorbereitung auf die Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

13. März 2023

In den folgenden Aufgaben sind in serifenloser Schrift Verweise auf Abschnitte des Skriptes zur Analysis angegeben, wo die jeweiligen benötigten Begriffe eingeführt werden. Dies dient zum Einen der Wiederholung für diejenigen, welche die Analysis II bei Prof. Dr. Nieper-Wißkirchen gehört haben, zum Anderen dem leichteren Einstieg in die Analysis III für Neueinsteiger. Das Skript sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sich unter `https://ana.mathe.sexy/`.

1. Sei M eine Teilmenge eines metrischen Raumes E (3.1), $\overline{M}$ ihre abgeschlossene Hülle (4.8, 12.7) in E, E' ein vollständiger (4.14) metrischer Raum und $f : M \to E'$ eine gleichmäßig stetige (4.12) Abbildung. Zeige:

- **(a)** Es existiert genau eine gleichmäßig stetige Abbildung $F : \overline{M} \to E'$, welche f fortsetzt, also $F|M = f$ erfüllt.
(Tipp: Zeige zunächst Eindeutigkeit um dich für den Existenzbeweis inspirieren zu lassen. Für die gleichmäßige Stetigkeit, nutze die Stetigkeit der Distanzfunktion aus.)
- **(b)** Die Aussage aus (a) ist im Allgemeinen falsch, wenn ...
  - **(i)** ... E' nicht vollständig ist.
  - **(ii)** ... f nicht *gleichmäßig* stetig ist.

2. Für $v = (v_i) \in \mathbf{R}^n$ sei $\|v\|_\infty \coloneqq \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}$. Zeige:

- **(a)** Die so definierte Abbildung $\|\cdot\|_\infty : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ist eine Norm (5.2), welche den $\mathbf{R}^n$ zu einem Banachraum (5.3) macht.
- **(b)** Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist die k-te Koordinatenfunktion $x_k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, (v_i) \mapsto v_k$ stetig (3.2, 12.4).
- **(c)** Sei E ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : E \to \mathbf{R}^n$ ist genau dann stetig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, wenn für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Abbildung $f_k \coloneqq x_k \circ f : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ stetig ist.
- **(d)** Jede reellwertige Matrix $(a_{ij}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ mit m Zeilen und n Spalten definiert eine stetige lineare Abbildung $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ durch die durch

Matrixmultiplikation gegebene Zuordnung

$$(v_j) \longmapsto (a_{ij}) \cdot (v_j) = \Big(\sum_j a_{ij} v_j \Big)_i.$$

(Tipp: Verwende Aufgabe 3.)

(e) Sei E ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum der Dimension n. Jede Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von E definiert einen Homöomorphismus (12.4) $\mathbf{R}^n \to E$ durch die Zuordnung

$$(v_i) \longmapsto \sum_i v_i \cdot b_i$$

(Tipp: Verwende Aufgabe 3. und Proposition 12.9.3.)

(f) Jede lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen ist stetig.

3. Sei $A : E \to F$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen.

(a) Es ist A genau dann stetig, wenn eine Zahl $M \in [0, \infty[$ existiert, sodass

$$\forall v \in E : \|Av\| \leq M \cdot \|v\|\,.$$

In diesem Fall ist $\|A\| \coloneqq \sup\{\|Av\| \mid \|v\| \leq 1\}$ die kleinste Zahl M, welche dies erfüllt.

(b) Die Abbildung $A \mapsto \|A\|$ definiert eine Norm auf dem Vektorraum $L(E, F)$ (11.7) der stetigen linearen Abbildungen $E \to F$, die sogenannte Operatornorm.

(c) Es ist $L(E, F)$ ein Banachraum, falls F ein Banachraum ist.
(Tipp: Es ist $\|\cdot\|$ bereits eine Norm auf $L(E, F)$, es genügt daher Vollständigkeit zu zeigen, dass also jede Cauchyfolge in $L(E, F)$ konvergiert.)

(d) Sei $E = \mathbf{R}^n$, $F = \mathbf{R}^m$, sodass A durch eine Matrix $(a_{ij}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ dargestellt wird. Sind E und F mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen, so ist die Operatornorm von A durch die Zeilensummennorm gegeben:

$$\|A\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \;\middle|\; i = 1, \ldots, m \right\}$$

4. Sei G eine offene Teilmenge (6.1, 12.2, 12.3) des $\mathbf{R}^n$, $a \in G$ und $f : G \to \mathbf{R}^m$ eine Funktion. Zeige:

(a) Ist $n = 1$, so ist f genau dann in a differenzierbar (6.4), wenn ein $m \in \mathbf{R}^m$ existiert, sodass

$$\lim_{p \to a} \frac{f(p) - f(a) - m \cdot (p - a)}{p - a} = 0.$$

(b) Sei $n \in \mathbf{N}$ beliebig und f auf ganz G für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ partiell nach x_k differenzierbar (13.1), sodass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ in a stetig sind. Dann gilt für die Jacobische Matrix $J_a(f)$ (13.1) von f im Punkt a:

$$\lim_{p \to a} \frac{f(p) - f(a) - J_a(f) \cdot (p - a)}{\|p - a\|} = 0$$

(Tipp: Ohne Einschränkung kann man $m = 1$ annehmen. Wende dann den Mittelwertsatz (6.9) auf Hilfsfunktionen der Form $f(a + \sum_{i=1}^{j-1} v_i e_i + x \cdot v_j e_j) : [0,1] \to \mathbf{R}$ an, wobei $v := p - a$.)

5. Sei G eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, $a \in G$ und $f : G \to \mathbf{R}^m$ eine Abbildung für die in a alle partiellen Ableitungen nach den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ von $\mathbf{R}^n$ existieren. Sei weiter G' eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^m$, sodass $f(G) \subseteq G'$, und $g : G' \to \mathbf{R}^l$ eine Abbildung für die in $f(a)$ alle partiellen Ableitungen nach den Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ von $\mathbf{R}^m$ existieren.

$$G \xrightarrow{f} G' \xrightarrow{g} \mathbf{R}^l$$

(a) Zeige die Kettenregel für die Jacobische Matrix der Komposition von g und f:

$$J_a(g \circ f) = J_{f(a)}(g) \cdot J_a(f)$$

(Tipp: Verwende Beispiel 13.2.(d).)

(b) Berechne die Jacobi-Matrix der Polarkoordinatentransformation (7.19)

$$\Phi : \mathbf{R}_+ \times]0, 2\pi[\to \mathbf{R}^2, (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

und ihre Inverse.

(c) Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$F : \{p \in \mathbf{R}^2 \mid x(p) \neq 0\} \to \mathbf{R}^2, p \mapsto \left(\ln\left(\sqrt{x(p)^2 + y(p)^2}\right), \arctan\left(\frac{y(p)}{x(p)}\right)\right),$$

wobei $x, y : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ die kanonischen Koordinatenfunktionen des $\mathbf{R}^2$ bezeichnen. (Tipp: 7.16.)