1. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

20. Oktober 2022 *

215. s. (5 Punkte) Seien E und F zwei Banachräume. Zeige: Ist $f\colon E \to F$ stetig und auf $E \setminus \{0\}$ differenzierbar, so ist f genau dann positiv homogen vom Grad r, wenn f für $p \neq 0$ die folgende *Eulersche Differentialgleichung*

$$D_p f(p) = r \cdot f(p)$$

erfüllt. Beachte, daß es sich hierbei um eine *partielle* Differentialgleichung handelt.

(Tip: $y(t) \coloneqq f(t \cdot p)$.)

216. m. Winkeltreue holomorpher Funktionen. Es sei $f\colon G \to \mathbf{C}$ eine Funktion, die auf einer offenen Teilmenge G von $\mathbf{C}$ definiert ist. Zeige:

(a) Die Funktion f ist genau dann holomorph, wenn f als Abbildung von $G \subseteq \mathbf{R}^2$ in den $\mathbf{R}^2$ im Sinne des Kapitels 13 differenzierbar ist und wenn in jedem Punkt $z \in G$ das Differential $D_z f$ eine $\mathbf{C}$-lineare Abbildung ist. Im Falle der Holomorphie gilt

$$\forall z \in G\, \forall w \in \mathbf{C}\colon D_z f(w) = f'(z) \cdot w.$$

(Tip: Abschnitt 6.5.)

(b) Ist $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, so stellt die $\mathbf{C}$-lineare Abbildung $A\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto a \cdot z$ eine *Drehstreckung* dar, d. h. es gibt ein $r \in \mathbf{R}_+$ und einen Winkel $\varphi \in \mathbf{R}$, so daß $\forall z \in \mathbf{C}\colon Az = rR_\varphi(z)$; vgl. Abschnitt 7.14.

(c) Wir sagen, daß sich zwei in 0 differenzierbare Wege α, $\beta\colon [0,1] \to G$ zum Zeitpunkt 0 unter einem Winkel φ schneiden, wenn $z_0 \coloneqq \alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha'(0) \neq 0$, $\beta'(0) \neq 0$ und $\measuredangle(\alpha'(0), \beta'(0)) = \varphi$ gelten; vgl. Abschnitt 12.10.

*Zu bearbeiten bis zur Übung am 27. Oktober 2022. Von den 25 zu erreichenden Punkten werden maximal 20 Punkte angerechnet.

In dieser Situation zeige: Ist f holomorph und $f'(z_0) \neq 0$, so schneiden sich auch die Bildwege $f \circ \alpha$ und $f \circ \beta$ zum Zeitpunkt 0 unter dem Winkel φ. Diese Eigenschaft wird als die *Winkeltreue* holomorpher Abbildungen bezeichnet.

217. m. Sei G eine offene Teilmenge des Banachraumes E. Es seien $b_1, \ldots, b_m$ irgendwelche Vektoren des Banachraumes F, $f_1, \ldots, f_m \colon G \to \mathbf{R}$ Funktionen und $f := \sum_k f_k \cdot b_k$. Zeige:

(a) Sind $f_1, \ldots, f_m$ in $a \in G$ differenzierbar, so ist auch f in a differenzierbar, und zwar gilt:

$$\forall v \in E \colon D_a f(v) = \sum_k D_a f_k(v) \cdot b_k.$$

(b) Ist $(b_1, \ldots, b_m)$ sogar eine Basis von F und ist f in a differenzierbar, so sind auch alle Funktionen f_k in a differenzierbar.

218. s. (5 Punkte) Aus Differenzierbarkeit folgt nicht stetige partielle Differenzierbarkeit.

Zeige, daß die Abbildung

$$f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (s,t) \mapsto \begin{cases} (s^2+t^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}\right) & \text{falls } (s,t) \neq 0, \\ 0 & \text{falls } (s,t) = (0,0) \end{cases}$$

differenzierbar, die partiellen Ableitungen von f aber unstetig in 0 sind.

219. m. Seien E ein Banachraum und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten a_n und Konvergenzradius $\rho > 0$. Zeige, daß die Abbildung (vgl. Abschnitt 11.8)

$$f \colon U_\rho^{\mathrm{L}(E,E)}(0) \to \mathrm{L}(E,E), X \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

in $0 \in \mathrm{L}(E,E)$ differenzierbar ist, und berechne $D_0 f$.

(Tip: Es ist nicht schwer, die „lineare Approximation“ von f an der Stelle $X = 0$ zu raten.)

220. Wir benutzen die Notationen aus Abschnitt 13.6.

(a) m. Zeige, daß jedes Polynom $P \colon E \to F$ differenzierbar ist und daß im Falle eines homogenen Polynoms n-ten Grades der Form $P = \varphi \circ \Delta_n$ gilt:

$$\forall p \in E \, \forall v \in E \colon D_p P(v) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(p, \ldots, p, \underbrace{v}_{k}, p, \ldots, p).$$

Wird φ als symmetrisch vorausgesetzt, so vereinfacht sich die Formel zu

$$\forall p \in E\, \forall v \in E\colon\ D_p P(v) = n \cdot \varphi(p, \ldots, p, v).$$

(b) **m.** Zeige, dass die *quadratischen Formen*, d h. die homogenen Polynome $P\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ vom Grad 2 gerade die Funktionen sind, die sich mittels einer symmetrischen $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ik})$ durch

$$P(v) = v^\top A v = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} v_i v_k, \quad \text{also} \quad P = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

beschreiben lassen, wobei in dem Ausdruck $v^\top A v$ der Vektor v als ein Spaltenvektor und $v^\top$ als sein Transponiertes betrachtet wird.

(c) **s. (5 Punkte)** Wie lautet das Differential $D_A P$ des Polynoms

$$P\colon \mathrm{L}(E, E) \to \mathrm{L}(E, E), A \mapsto A^3 = A \circ A \circ A?$$

221. **(10 Punkte)** Wir benutzen wieder die Notationen aus Abschnitt 13.6. Die Formeln (1)–(3) sind die dortigen. Zeige:

(a) **m.** Für jedes $r \in \{0, \ldots, n\}$ ist die Koeffizientenfunktion $s_r\colon \operatorname{End}(E) \to \mathbf{R}$ des charakteristischen Polynoms ein homogenes Polynom vom Grad r, also insbesondere differenzierbar.

(Tip: (3).)

(b) **m.** Definieren wir die *Adjunkte*

$$\hat{A} := \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \cdot s_{n-1-r}(A) \cdot A^r \in \operatorname{End}(E)$$

für alle $A \in \operatorname{End}(E)$, so gilt

$$A \circ \hat{A} = \det(A) \cdot 1_E.$$

(Tip: Satz von Cayley–Hamilton.)

In der Matrizenrechnung entspricht $\hat{A}$ der *Kofaktormatrix*.

(c) **m.** Es gilt

$$\forall A \in \operatorname{End}(E)\, \forall X \in \operatorname{End}(E)\colon\ d_A \det(X) = \operatorname{tr}(\hat{A} \circ X) = \operatorname{tr}(X \circ \hat{A}),$$

also insbesondere (?)

$$d_{1_E} \det = \operatorname{tr}.$$

(Tip: Benutze (2), setze zunächst $A \in \mathrm{GL}(E)$ voraus und beachte dabei (1).)

(d) **s.** Es seien $A\colon J \to \mathrm{End}(E)$ eine stetige Funktion und $Y : J \to \mathrm{End}(E)$ eine Lösung der Endomorphismen-wertigen Differentialgleichung

$$Y' = A(x) \circ Y$$

(vgl. Abschnitt 11.11). Zeige: Dann ist die Funktion $y := \det \circ Y : J \to \mathbf{R}$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' = \mathrm{tr}(A(x))y.$$

Beweise mit diesem Ergebnis erneut (Natürlich gilt dieser Beweis dann nur für $\dim E < \infty$.): Existiert ein $\xi \in J$, so daß $Y(\xi) \in \mathrm{GL}(E)$ ist, so ist $Y(J) \subseteq \mathrm{GL}(E)$.

(e) **s.** Mit Hilfe von (d) beweise

$$\forall A \in \mathrm{End}(E)\colon\ \det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A)).$$