2. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

27. Oktober 2022 *

222. s. (5 Punkte) Sei $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion, die in Polarkoordinaten beschrieben werden kann, d. h. es existiert $g\colon [0, \infty[\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, eine differenzierbare Funktion, so daß

$$\forall (r, \varphi) \in [0, \infty[\times \mathbf{R}\colon f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) = g(r, \varphi).$$

Zeige: Dann gilt für jedes $a \coloneqq (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))$ mit $(r, \varphi) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, daß sich $\operatorname{grad}_a f$ aus dem Vektor $(\frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi), \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi))$ durch Drehung um den Winkel φ in mathematisch positiver Richtung erhalten läßt.

223. m. Es seien E, E_1, E_2 und F Banachräume, G eine offene Teilmenge von E, $f\colon G \to E_1$ eine in $a \in G$ stetige , sowie $g\colon G \to E_2$ eine in a differenzierbare Funktion mit $g(a) = 0$ und $B\colon E_1 \times E_2 \to F$ eine stetige bilineare Abbildung. Zeige, dass auch $B(f, g)\colon G \to F$ in a differenzierbar ist, und $D_a B(f, g)(v) = B(f(a), D_a g(v))$ für alle $v \in E$ gilt.

224. s. (5 Punkte) Seien G eine offene Teilmenge von E und $f\colon G \to E$ eine C^1-Funktion. Ferner gelte

$$\forall p \in G\colon D_p f \in \mathrm{GL}(E).$$

Das Newtonsche Nullstellenverfahren für Funktionen $J \to \mathbf{R}$ legt nahe, die Funktion

$$g\colon G \to E, p \mapsto p - (D_p f)^{-1}(f(p))$$

einzuführen und zu versuchen, von einer geschätzten Nullstelle $p_0 \in G$ ausgehend die Banachfolge $(p_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ zu g zu bestimmen und zu prüfen, ob sie konvergiert.

Beweise nun: Jede Nullstelle $\xi \in G$ von f ist ein anziehender Fixpunkt der Abbildung g, und jeder Fixpunkt von g ist eine Nullstelle von f.

*Zu bearbeiten bis zur Übung am 03. November 2022. Von den 20 zu erreichenden Punkten werden maximal 15 Punkte angerechnet.

Also: Starten wir bei der Konstruktion einer Banachfolge bezüglich g in einem Punkt p_0, der hinreichend nahe bei einer Nullstelle ξ liegt, so ist die Banachfolge wohldefiniert und konvergiert gegen ξ.

(Tip: Aufgabe 214 und 223.)

225. s. (5 Punkte) Zeige: Die Inversenbildung

$$\operatorname{Inv}\colon \operatorname{GL}(E) \to \operatorname{L}(E, E)$$

ist eine C^∞-Abbildung.

(Tip: Stelle das Differential $D\operatorname{Inv}$ mit Hilfe eines geeigneten homogenen Polynoms $P\colon \operatorname{L}(E,E) \to \operatorname{L}(\operatorname{L}(E,E), \operatorname{L}(E,E))$ zweiten Grades dar.)

226. m. Der Banachraum $C^r(I, E)$. Seien $I \subseteq \mathbf{R}$ ein abgeschlossenes Interval und E ein Banachraum. Mit $C^r(I, E)$ bezeichnen wir den Vektorraum der r-mal stetigen differenzierbaren Funktionen $I \to E$, wobei $r \in \mathbf{N}_0$ ist; vgl. Abschnitt 9.1. Zeige, daß dieser dann durch die Setzung

$$\|f\|_{(r)} := \max_{i=0,\ldots,r} \left\|f^{(i)}\right\|_\infty$$

zu einem Banachraum wird.

(Tip: Beachte den Spezialfall des 2. Vererbungssatzes (Abschnitt 13.11); tatsächlich darf dort I ein beliebiges (nicht-entartetes) Intervall sein. In unserem Falle, wo $I = [a, b]$ ist, ist wegen der Kompaktheit von I lokal gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen $(f_n\colon I \to E)_{n\geq m}$ zur gleichmäßigen Konvergenz äquivalent.)

227. s. (5 Punkte) Es sei $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ ein Produkt reeller Banachräume, F ein weiterer reeller Banachraum, $G \subseteq E$ eine offene Teilmenge und $f\colon G \to F$ eine in $a = (a_1, \ldots, a_n) \in G$ differenzierbare Funktion. Zeige: Die Abbildung

$$g_k\colon \operatorname{pr}_k(G) \to F, p \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, p, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

ist in a_k differenzierbar; definieren wir die *partiellen Differentiale* von f in a durch

$$\frac{\partial f}{\partial p_k}(a) := D_{a_k} g_k,$$

so erhalten wir mit der abkürzenden Schreibweise

$$\frac{\partial f}{\partial p_k}(a) \cdot w := D_{a_k} g_k(w)$$

die Formel

$$\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in E \colon D_a f(v) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_k}(a) \cdot v_k.$$

(Tip: $g_k = f \circ i_k$ mit $i_k \colon E_k \to E, p \mapsto (a_1, \dots, a_{k-1}, p, a_{k+1}, \dots, a_n)$.)