3. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

03. November 2022 *

228. Es sei $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ ein Produkt reeller Banachräume, F ein weiterer reeller Banachraum, $G \subseteq E$ eine offene Teilmenge, $a \in G$ und $f\colon G \to F$ eine auf ganz G differenzierbare Abbildung in einen Banachraum F, die in a sogar zweimal differenzierbar ist. Zeige:

(a) **m.** Für jedes $k = 1, \ldots, n$ ist die Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial p_k}\colon G \to \mathrm{L}(E_k; F)$$

in a partiell nach p_i differenzierbar.
Wir definieren damit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k}(a) \coloneqq \Phi_{1,1}\Big(\frac{\partial}{\partial p_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial p_k}\Big)(a)\Big) \in \mathrm{L}(E_i, E_k; F).$$

(Tip: Nach Aufgabe 227 ist $\frac{\partial f}{\partial p_k}(a) = D_a f \circ \mathrm{in}_k$, wobei in_k die stetige lineare (?) Abbildung $E_k \to E, v_k \mapsto (0, \ldots, 0, v_k, 0, \ldots, 0)$ bezeichnet.)

(b) **m.** Für $v_k \in E_k$ ist

$$g\colon G \to F, p \mapsto \frac{\partial f}{\partial p_k}(p) \cdot v_k$$

in a partiell nach p_i differenzierbar, und zwar mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k}(a)(v_i, v_k) = \frac{\partial g}{\partial p_i}(a) \cdot v_i.$$

*Zu bearbeiten bis zur Übung am 10. November 2022. Von den 20 zu erreichenden Punkten werden maximal 15 Punkte angerechnet.

(Tip: Betrachte die stetige lineare (?) Abbildung $\mathrm{ev}_{v_k}: L(E_k, F) \to F, A \mapsto Av_k$ für festes $v_k \in E_k$.)

(c) **s. (5 Punkte)** Es gilt folgende Verallgemeinerung des Schwarzschen Vertauschungssatzes:

$$\forall i, k = 1, \ldots, n \, \forall v_i \in E_i \, \forall v_k \in E_k \colon \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k}(a)(v_i, v_k) = \frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial p_i}(a)(v_k, v_i).$$

229. **m.** Zeige: Ist $P\colon E \to F$ ein Polynom vom Grade höchstens n, so ist auch die Funktion $Q\colon E \to F, p \mapsto P(p-a)$ ein Polynom vom Grade höchstens n.

(Tip: Wieso kannst Du Dich auf die Untersuchung eines *homogenen* Polynoms P beschränken?)

230. **m.** Es seien n, $m \in \mathbf{N}_0$ natürliche Zahlen mit $n \leq m$ und P_0, P_1, $\ldots$, P_n, Q_0, Q_1, $\ldots$, $Q_m\colon E \to F$ homogene Polynome; dabei haben P_k und Q_k jeweils den Grad k. Zeige: Es gilt folgende Verallgemeinerung des Satzes vom Koeffizientenvergleich:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{m} Q_k \implies \Bigl(\forall k = 0, \ldots, n\colon P_k = Q_k \wedge Q_{n+1} = \cdots = Q_m = 0\Bigr).$$

231. **s. (5 Punkte)** Bestimme das Taylorpolynom 2. Ordnung von $f \coloneqq x^y\colon \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ in $a = (1, 0)$.

232. **s. (5 Punkte)** Verwende das „Rezept“ aus Abschnitt 13.16 um ein Integralrestglied für die Taylorformel im Mehrdimensionalen aus dem eindimensionalen Fall (siehe (c) im Theorem aus Abschnitt 9.3) herzuleiten.

233. Bestimme sämtliche kritische Punkte, lokale Minima, lokale Maxima und Sattelpunkte der folgenden Abbildungen $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:

(a) **m.** $f(x, y) \coloneqq x^3 + 6xy + y^3$,

(b) **s. (5 Punkte)** $f(x, y) \coloneqq \dfrac{\sin(x) - 2}{1 + y^2}$.

234. **m.** Eine Warenhauskette plant die Errichtung eines Warenlagers, von dem aus ihre Warenhäuser in n etwa gleich großen Städten an den Orten A_1, A_2, $\ldots$, A_n beliefert werden sollen. Um die Transportkosten möglichst gering zu halten, soll das Lager an einer Stelle L gebaut werden, für die die Abstandssumme $r(L) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \|A_k - L\|$ minimal ist. Zeige:

(a) Dieses Optimierungsproblem besitzt (mindestens) eine Lösung.

(b) Aus der allgemeinen Theorie leite unter der Voraussetzung $L \notin \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine notwendige Bedingung für die Lage von L her. (Tip: $\operatorname{grad}_L r$.)

(c) Arbeite für $n \in \{2, 3, 4\}$ die Lösung explizit aus.

(Tip: Was bedeutet es geometrisch, wenn die Summe von n Einheitsvektoren verschwindet? Im Falle $n = 3$ unterscheide die Fälle, daß alle Winkel des Dreiecks $\Delta(A_1, A_2, A_3)$ kleiner als $120°$ sind, bzw. einer der Winkel größer oder gleich $120°$. Im ersten Falle reicht es, wenn die Lösung durch verschieben eines Sterns wie im Logo einer berühmten schwäbischen Automarke gefunden wird.)