4. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

10. November – 17. November 2022 *

235. Eine fundamentale Optimierungsaufgabe. Es seien H ein Hilbertraum, V ein abgeschlossener Untervektorraum von H und $b \in H$. Es soll folgende Optimierungsaufgabe behandelt werden:

> Bestimme $v_0 \in V$ so, daß v_0 zu b einen möglichst kleinen Abstand hat; es ist also dasjenige $v_0 \in V$ gesucht, so daß die Funktion
>
> $$V \to \mathbf{R}, v \mapsto \|v - b\|$$
>
> in v_0 minimal ist.

Zur analytischen Behandlung ist es einfacher, das Quadrat der fraglichen Funktion, also

$$f\colon V \to \mathbf{R}, v \mapsto \|v - b\|^2 = \langle v - b, v - b\rangle$$

zu minimieren.

(a) **m.** Zeige, daß in der oben beschriebenen Situation für ein jedes vorgegebene $v_0 \in V$ die folgenden Aussagen (a)(i)–(a)(iv) zueinander paarweise äquivalent sind:

(i) Es ist v_0 ein kritischer Punkt von f.

(ii) Der „Verbindungsvektor" $b - v_0$ steht senkrecht auf dem Unterraum V.

(iii) Es ist v_0 derjenige Vektor aus V, der im Sinne des Rieszschen Darstellungssatzes aus Abschnitt 12.10 die Linearform

$$\lambda\colon V \to \mathbf{R}, v \mapsto \langle v, b\rangle$$

beschreibt.

(iv) Es existiert ein $d \in [0, \infty[$, so daß gilt:

$$\forall v \in V\colon f(v) = \langle v - v_0, v - v_0\rangle + d.$$

*Von den 25 zu erreichenden Punkten werden maximal 20 Punkte angerechnet.

(b) s. (5 Punkte) Folgere aus (a), daß die Optimierungsaufgabe genau eine Lösung $v_0 \in V$ besitzt. Geometer erkennen, daß v_0 die Orthogonalprojektion von b auf den Unterraum V ist.

(c) m. Zeige: Gilt $n := \dim V < \infty$ und ist $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} \langle b, a_i \rangle \cdot a_i.$$

236. m. Noch eine Optimierungsaufgabe. Es seien H ein Hilbertraum und b, b_1, …, b_m irgendwelche Vektoren aus H. Wir wollen die folgende Optimierungsaufgabe betrachten:

> Bestimme ein m-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m$, so daß die Linearkombination $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k b_k$ möglichst nahe bei b liegt, daß also
>
> $$E(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) := \left\langle b - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_k, b - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_k \right\rangle$$
>
> minimiert wird.

Man zeige, daß diese Optimierungsaufgabe Lösungen besitzt, und zwar sind diese gerade die Lösungen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \lambda_k = c_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

wobei $a_{ik} := \langle b_i, b_k \rangle$ und $c_i := \langle b_i, b \rangle$.

Falls die Vektoren b_1, …, b_m linear unabhängig sind, so ist die Lösung eindeutig bestimmt.

(Tip: Aufgabe 235. mit einem bestimmten V anwenden.)

237. m. Funktionen zu Feldern von Stützpunkten Seien die Punkte (x_1, y_1), …, $(x_n, y_n) \in \mathbf{R}^2$ ein Feld von Stützpunkten und g_1, …, $g_m\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ eine Liste von Funktionen; es gelte $a \leq x_j \leq b$ für $j = 1$, …, n. Gesucht sind Koeffizienten λ_1, …, $\lambda_m \in \mathbf{R}$, so daß der Graph der Linearkombination $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot g_k$ möglichst gut dem Stützpunktfeld angepaßt ist, d. h. genauer, daß das „Gaußsche Fehlerquadrat“

$$E(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) := \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot g_k(x_j) \right)^2$$

minimiert wird.

Zeige, daß diese Optimierungsaufgabe Lösungen besitzt, und zwar sind diese gerade die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \lambda_k = c_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

wobei $a_{ik} := \sum_{j=1}^{n} g_i(x_j) \cdot g_k(x_j)$ und $c_i := \sum_{j=1}^{n} g_i(x_j) \cdot y_j$.

(Tip: Aufgabe 236. mit $H = \mathbf{R}^n$ anwenden.)

238. s. (10 Punkte) Arithmetisches Mittel und lineare Regression. Es sei ein Stützpunktfeld (x_1, y_1), …, $(x_n, y_n) \in \mathbf{R}^2$ gegeben, in dem nicht alle x_j gleich sind.

(a) Das arithmetische Mittel $\overline{y}$ der „Meßwerte“ y_1, …, y_n ist die Zahl y, für welche die Funktion

$$y \mapsto \sum_{j=1}^{n} (y - y_j)^2$$

ihren minimalen Wert annimmt.

(Tip: Diese Aussage läßt sich sehr schnell aus Aufgabe 237. mit $m = 1$ und $g_1 \equiv 1$ herleiten. Es läßt sich aber auch ein direkter Beweis geben.)

(b) Als die *Regressionsgerade* des Stützpunktfeldes wird diejenige „Gerade“ $y(x) = \alpha x + \delta$ bezeichnet, die optimal zu dem Stützpunktfeld paßt, d. h. für welche der Ausdruck

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(y_j - y(x_j) \Big)^2$$

minimal wird.

Zeige: Die Regressionsgerade des Feldes (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) ist durch

$$\alpha = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \quad \text{und} \quad \delta = \overline{y} - \alpha \overline{x}$$

gegeben, wobei $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{xy}$ und $\overline{x^2}$ die folgenden arithmetischen Mittel sind:

$$\overline{x} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad \overline{y} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j,$$

$$\overline{x^2} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \qquad \overline{xy} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

(Tip: Aufgabe 237.)

239. **(a)** **m. Polarkoordinaten.** Die Einschränkung

$$f\colon \mathbf{R}_+ \times \,]-\pi,\pi[\, \to \mathbf{R}^2, (r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

der Polarkoordinaten-Abbildung (vgl. Abschnitt 7.19) ist ein C^∞-Diffeomorphismus auf die geschlitzte Ebene $\mathbf{R}^2 \setminus \{p \in \mathbf{R}^2 \mid y(p) = 0, x(p) \leq 0\}$. (Tip: Die Funktionaldeterminante von f ist $\det(J_{(r,\varphi)}f) = r$.)

(b) **s. (5 Punkte) Kugelkoordinaten.** Die Einschränkung $f := F|\mathbf{R}_+ \times \,]0,\pi[\, \times \,]-\pi,\pi[$ der *Kugelkoordinaten-Abbildung*

$$F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (r,\theta,\varphi) \mapsto (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))$$

ist ein C^∞-Diffeomorphismus auf

$$\mathbf{R}^3 \setminus \{p \in \mathbf{R}^3 \mid y(p) = 0, x(p) \leq 0\}.$$

(Tip: Die Funktionaldeterminante von f ist $\det(J_{(r,\theta,\varphi)}f) = r^2\sin(\theta)$.)

240. **m.** Es sei

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto \frac{1}{1+x^2+y^4}.$$

Berechne die infinitesimale Änderung von f in radialer Richtung, sowie in der dazu senkrechten Richtung; das soll heißen: Berechne für $\tilde{f} := f \circ h$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ und $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}$; dabei ist

$$h\colon \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, (r,\varphi) \mapsto r \cdot (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

die Polarkoordinatenabbildung (vgl. Abschnitt 7.19 und Aufgabe 239 (a)).

241. Es seien E und F Banachräume, G eine offene Teilmenge von E, $f\colon G \to F$ eine C^r-Abbildung mit $r \geq 1$ und $a \in G$. Zeige:

(a) **m.** Ist das Differential $D_af\colon E \to F$ eine surjektive Abbildung und besitzt sein Kern ein abgeschlossenes Komplement (d. h. existiert ein abgeschlossener Unterraum V von E mit $E = V \oplus \ker D_af$), so existiert ein $\rho \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $\varepsilon \in \,]0,\rho]$ gilt:

$$f(a) \in f(U_\varepsilon(a))^o.$$

Wir nennen diese Eigenschaft *lokale Surjektivität*.
(Tip: Betrachte $f \circ \varphi$ mit $\varphi\colon V \to E, p \mapsto a + p$ in der Nähe von 0.)

(b) **s. (5 Punkte)** Ist das Differential $D_af\colon E \to F$ eine injektive Abbildung und besitzt sein Bild ein abgeschlossenes Komplement (d. h. existiert ein abgeschlossener Unterraum W von F mit $F = W \oplus \operatorname{im} D_a f$, so existiert eine offene Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(a, G)$, so daß $f|U$ injektiv ist. Wir nennen diese Eigenschaft *lokale Injektivität*.

(Tip: Betrachte das Differential von $g\colon G \times W \to F, (p, q) \mapsto q + f(p)$ in $(a, 0)$.)

Natürlich (?) können wir im Falle $\dim E < \infty$ bzw. $\dim F < \infty$ ohne Einschränkung die Existenz abgeschlossener Komplemente annehmen. Das Gleiche gilt für (a), wenn E ein Hilbertraum ist.