5. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

17. November – 24. November 2022 *

242. s. (5 Punkte) Die Situation sei so wie im Theorem über implizit definierte Funktionen (vgl. Kapitel 14.4). Es sei weiterhin eine *stetige* Funktion $h\colon U \to E_2$ gegeben, wobei $U \in \mathfrak{U}^o(a, E_1)$ und $h(a) = b$ ist, so daß gilt:

$$\forall p \in U\colon \Big((p, h(p)) \in G \wedge g(p, h(p)) = 0\Big).$$

Dann existiert eine Umgebung $U' \in \mathfrak{U}^o(a, U)$, so daß $h|U'$ eine C^r-Funktion ist; und in der Nähe von a läßt sich ihr Differential durch

$$D_p h = -\left(\frac{\partial g}{\partial q}(p, h(p))\right)^{-1} \circ \left(\frac{\partial g}{\partial p}(p, h(p))\right)$$

ausdrücken.

243. **(a)** **m.** Zeige, daß die Gleichung

$$x \cdot \exp(y) - y \cdot \exp(x) + x = 0$$

in einer Umgebung von 0 nach y auflösbar ist, d. h. es existiert eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(0, \mathbf{R})$ und eine Funktion $f\colon U \to \mathbf{R}$, so daß $f(0) = 0$ und für alle $t \in U$ der Wert $(t, f(t))$ die obige Gleichung erfüllt. Bestimme $f'(0)$.

(b) **s. (5 Punkte)** Zeige, daß sich die Schnittmenge S der beiden Nullstellengebilde

$$-2x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

und

$$x^2 + e^{y-1} - 2y = 0$$

*Von den 30 zu erreichenden Punkten werden maximal 25 Punkte angerechnet.

in der Nähe von $(1,1,1)$ durch eine Kurve in Abhängigkeit von x parametrisieren läßt, d. h. es existieren eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(1,\mathbf{R})$, eine Umgebung $V \in \mathfrak{U}^o((1,1),\mathbf{R}^2)$ und eine Kurve $\alpha\colon U \to V$, so daß $S \cap (U \times V) = \{(t,\alpha(t)) \mid t \in U\}$. Berechne den Geschwindigkeitsvektor der Kurve α.

(Tip: Aufgabe 242. für die Berechnung der Ableitungen.)

244. m. Es sei V ein endlich-dimensionaler reeller Banachraum, $E := \mathrm{End}(V)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen $V \to V$, $A_0 \in E$ und $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ ein Eigenwert von A_0 der algebraischen Vielfachheit 1, d. h. λ_0 ist eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms P_{A_0} von A_0. Dann existiert eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^o(A_0,E)$ und eine C^∞-Funktion $f\colon U \to \mathbf{R}$ mit $f(A_0)=\lambda_0$, so daß für jedes $A \in U$ die Zahl $f(A)$ ein Eigenwert der Vielfachheit 1 von A ist.

(Tip: $g\colon (A,t) \mapsto P_A(t)$ ist eine C^∞-Funktion; vgl. Abschnitt 13.6.)

245. m. Sei H ein Hilbertraum mit $\dim H \geq m$. Dann ist die Menge $F(m)$ der linear unabhängigen m-Tupel von Vektoren $(v_1,\ldots,v_m) \in H^m$ eine offene Teilmenge von H^m. (Lineare Unabhängigkeit ist also gegenüber kleinen Störungen stabil.)

(Tip: Abschnitt 14.8.)

246. m. Untersuche die Niveauflächen von $f := x^2 - x^4 - y^2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ daraufhin, ob sie Untermannigfaltigkeiten des $\mathbf{R}^2$ sind.

247. Der Torus als Untermannigfaltigkeit von $\mathbf{R}^3$. Seien r, $R \in \mathbf{R}_+$ mit $r < R$ und

$$f := \Big((R + r\cdot\cos(x))\cdot\cos(y), (R + r\cdot\cos(x))\cdot\sin(y), r\cdot\sin(x)\Big)\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3.$$

(a) m. Mache Dir ein Bild von der durch f parametrisierten Fläche (schaue Dir den Verlauf der Parameterlinien $f_t\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ und $f^s\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ an!).

(b) s. (5 Punkte) Zeige: $T := \mathrm{im}\, f$ ist eine zwei-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbf{R}^3$.

(Tip: Betrachte die Nullstellenmenge von

$$g := \Big(x^2 + y^2 + z^2 - (R^2 + r^2)\Big)^2 + 4R^2(z^2 - r^2)\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}.)$$

248. Sei H ein reeller Hilbertraum.

(a) s. (5 Punkte) Zeige, daß die Abbildung

$$\Psi\colon \mathrm{L}(H,H) \to \mathrm{L}^2(H,\mathbf{R}), X \mapsto \Big((v,w) \mapsto \langle v, Xw\rangle\Big)$$

ein stetiger Isomorphismus von Banachräumen mit $\|\Psi\| = 1$ ist.
(Tip: Rieszscher Darstellungssatz.)

(b) **m.** Sei $A \in \mathrm{L}(H, H)$. Zeige, daß genau ein $A^* \in \mathrm{L}(H, H)$ existiert, so daß

$$\forall v, w \in H\colon\ \langle Av, w\rangle = \langle v, A^* w\rangle\ .$$

Wir nennen den Operator A^* den zu A *adjungierten Operator.*
(Tip: (a))

(c) **m.** Zeige, daß die Abbildung

$$\mathrm{L}(H, H) \to \mathrm{L}(H, H), A \mapsto A^*$$

ein Antiisomorphismus von Banachalgebren ist, also ein Isomorphismus von Banachräumen, welcher zusätzlich die Bedingungen

$$(A \circ B)^* = B^* \circ A^* \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_H^* = \mathrm{id}_H$$

erfüllt.
(Tip: $(A^*)^* = A$.)

249. s. (10 Punkte) Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(H)$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{L}(H, H)$. Sei H ein Hilbertraum. Mit

$$\mathrm{O}(H) := \{A \in \mathrm{GL}(H) \mid \forall v, w \in H\colon\ \langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle\}$$

bezeichnen wir die *orthogonale Gruppe* von H. Mit

$$\mathrm{End}^{\pm}(H) := \{A \in \mathrm{L}(H, H) \mid A^* = \pm A\}$$

bezeichnen wir den Untervektorraum der selbstadjungierten (bzw. schiefadjungierten) Operatoren.

Zeige, daß $\mathrm{O}(H)$ eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{L}(H, H)$ mit

$$T_{\mathrm{id}_H} \mathrm{O}(H) = \mathrm{End}^-(H)$$

ist.

Zeige im Falle, daß H ein euklidischer Vektorraum der Dimension n ist, ist die Dimension von $\mathrm{O}(H)$ gerade durch $\binom{n}{2}$ gegeben.

(Tip: Betrachte die C^∞-Abbildung $g\colon\ \mathrm{GL}(H) \to \mathrm{End}^+(H), A \mapsto A^* \circ A - \mathrm{id}_H$.)

250. m. Sei M eine *zusammenhängende* C^r-Untermannigfaltigkeit eines Banachraumes E.

Eine Kurve $\alpha\colon I \to E$ heißt *stückweise r-mal stetig differenzierbar*, wenn α stetig ist und eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ des Intervalls $I = [a, b]$ existiert, so daß für alle $i = 0, \dots, n-1$ die Kurve $\alpha|[a_i, a_{i+1}]$ eine C^r-Kurve ist.

(a) Zeige: Je zwei Punkte aus M sind durch eine stückweise r-mal stetig differenzierbare Kurve, die ganz in M läuft, verbindbar.

(Tip: Zeige zunächst, daß die Aussage für Punkte aus einer Planierungsumgebung von M richtig ist. Um dann das globale Ergebnis zu erhalten, fixiere einen Punkt $p \in M$ und betrachte die „Menge der guten Punkte“

$$A_p \coloneqq \{q \in M \mid p \text{ ist mit } q \text{ durch eine stückweise } C^r\text{-Kurve in } M \text{ verbindbar}\}.$$

Warum ist $A_p = M$?)

(b) Ist $\alpha\colon J \to E$ eine stückweise r-mal stetig differenzierbare Kurve, so existiert eine monoton wachsende, surjektive C^∞-Funktion $\varphi\colon \tilde{J} \to J$ auf einem abgeschlossenen Intervall $\tilde{J}$, so daß $\alpha \circ \varphi\colon \tilde{J} \to E$ eine C^r-Kurve ist.

(Tip: Es existieren monoton wachsende C^∞-Funktionen $\psi\colon [0, 3] \to \mathbf{R}$ mit $\psi|[0, 1] \equiv 0$, $\psi|[1, 2]$ streng monoton wachsend, $\psi|[2, 3] \equiv 1$.)

Also (?) sind in einer zusammenhängenden C^r-Untermannigfaltigkeit je zwei Punkte durch eine C^r-Kurve verbindbar. Insbesondere gilt: Jede zusammenhängende Untermannigfaltigkeit eines Banachraumes E ist wegzusammenhängend. (Für allgemeine topologische Räume ist diese Aussage, wie wir wissen, falsch. Sie gilt jedoch ebenfalls für „abstrakte“ Mannigfaltigkeiten, also für solche, die nicht als Untermannigfaltigkeit in einen Banachraum eingebettet sind.)