6. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

24. November – 01. Dezember 2022 *

251. s. (10 Punkte) Es seien E und F (reelle) Banachräume und G eine offene Teilmenge von E. Weiter sei $f\colon G \times [\alpha, \beta] \to F$ eine stetige Funktion, welche nach der ersten Variablen p stetig partiell differenzierbar sei. Beweise, daß die Funktion

$$I\colon G \to F, p \mapsto \int_\alpha^\beta f(p,t)\,dt$$

stetig differenzierbar ist, und in jedem Punkt $a \in G$ ihr Differential durch

$$\forall v \in E\colon\, D_a I(v) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial p}(a,t) \cdot v\,dt$$

gegeben ist.

(Tip: Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$. 1. Schritt: Es existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $U_\delta(a) \subseteq G$ und

$$\forall (p,t) \in U_\delta(a) \times [\alpha, \beta]\colon\, \left\| \frac{\partial f}{\partial p}(p,t) - \frac{\partial f}{\partial p}(a,t) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}.$$

Wieso gilt das? Tubenlemma! 2. Schritt:

$$\forall (v,t) \in U_\delta(0) \times [\alpha, \beta]\colon\, \left\| f(a+v,t) - f(a,t) - \frac{\partial f}{\partial p}(a,t) \cdot v \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \cdot \|v\|.$$

Wieso? Abschnitt 13.10, zweites Korollar. 3. Schritt:

$$\forall v \in U_\delta(0)\colon\, \left\| I(a+v) - I(a) - \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial p}(a,t) \cdot v\,dt \right\| \leq ?.)$$

252. m. Fundamentallemma der Variationsrechnung. Es seien $I = [a,b] \subseteq \mathbf{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und E ein (reeller) Banachraum. Weiter betrachten wir den Untervektorraum

$$\tilde{E} \coloneqq \{\xi \in C^2(I,E) \mid \xi(a) = 0 \wedge \xi(b) = 0\}$$

*Es sind maximal 20 Punkte zu erreichen.

von $C^2(I, E)$. Es sei

$$\omega\colon I \to \mathrm{L}(E, \mathbf{R}), t \mapsto \omega_t$$

eine stetige Funktion. Gilt dann

$$\forall \xi \in \tilde{E}\colon \int_a^b \omega_t(\xi(t))\, dt = 0,$$

so ist $\omega = 0$, also $\omega_t \equiv 0$ für alle $t \in I$.

(Tip: Angenommen $\omega_{t_0} \neq 0$ für ein $t_0 \in \,]a, b[$. Dann existiert ein $v \in E$ mit $\omega_{t_0}(v) > 0$. Dann existieren auch c, $d \in \mathbf{R}$ mit $a \leq c < t_0 < d \leq b$, so daß $\forall t \in [c, d]\colon \omega_t(v) > 0$. Nun erhältst Du einen Widerspruch zur Voraussetzung mit der zweimal stetig differenzierbaren (?) Funktion $\xi \in \tilde{E}$, die durch

$$\xi(t) := \begin{cases} (t-c)^3 \cdot (d-t)^3 \cdot v & \text{für } t \in [c, d], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist.)

253. m.

(a) Sei E ein reeller Banachraum, G eine offene Teilmenge von $\mathbf{R} \times E \times E$ und $I \subseteq \mathbf{R}$ ein kompaktes Intervall. Zeige: Für $r \geq 1$ ist

$$\Omega_r(G) := \{\alpha \in C^r(I, E) \mid \forall t \in I\colon \hat{\alpha}(t) := (t, \alpha(t), \alpha'(t)) \in G\}$$

eine offene Teilmenge von $C^r(I, E)$.

(Tip: $K := \hat{\alpha}(I)$, Aufgabe 1 aus Abschnitt 12.9.)

(b) Sei $G_0 \subseteq E$ eine nicht leere konvexe Teilmenge, $J \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $G := J \times G_0 \times E$. Zeige, daß $\Omega_r(G)$ eine zusammenhängende Teilmenge von $C^r(J, E)$ ist.

(Tip: Kommentar 13.10.)

254. (a) m. Seien $G := \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ und f, $g\colon G \to \mathbf{R}$ die Funktionen

$$f := x + y | G$$
$$g := x^3 + y^3 - 3xy | G.$$

Bestimme alle lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(p) = 0$.

(b) s. (5 Punkte) Bestimme den maximalen und den minimalen Wert der Funktion

$$f := 3x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy$$

auf der Menge $\{p \in \mathbf{R}^3 \mid x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2 \leq 4\}$.

255. m. Sei E ein euklidischer Vektorraum mit $\dim E \geq 1$. Weiter sei $A\colon E \to E$ ein selbstadjungierter Operator, also eine lineare Abbildung mit

$$\forall v, w \in E\colon \ \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle\,.$$

Definieren wir

$$\begin{aligned} f\colon E \to \mathbf{R}, v &\mapsto \langle Av, v\rangle\,, \\ g\colon E \to \mathbf{R}, v &\mapsto \langle v, v\rangle - 1, \\ \mathbf{S}(E) &:= \{v \in E \mid \langle v, v\rangle = 1\}, \end{aligned}$$

so gilt

(a) Für alle $a \in \mathbf{S}(E)$ ist $\operatorname{grad}_a g \neq 0$.

(b) Es ist a genau dann ein kritischer Punkt von f unter Nebenbedingung $g(p) = 0$, wenn a ein normierter Eigenvektor von A ist.

(c) Es ist $\max f(\mathbf{S}(E))$ der größte und $\min f(\mathbf{S}(E))$ der kleinste Eigenwert von A.

Insbesondere haben wir gezeigt, daß jeder selbstadjungierte Endomorphismus auf E reelle Eigenwerte besitzt.

256. s. (5 Punkte) Sei B eine nicht entartete symmetrische Bilinearform auf einem Vektorraum E der Dimension $n+1$. Zeige, daß die Quadrik

$$Q := \{p \in E \mid B(p,p) = 1\}$$

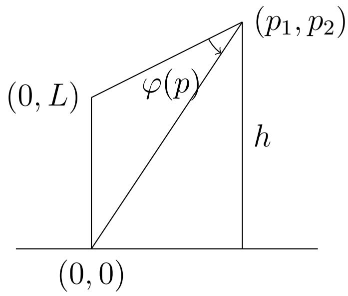
eine n-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von E ist, falls $Q \neq \emptyset$ und daß dann gilt:

$$\forall q \in Q\colon q + T_qQ = \{p \in E \mid B(p,q) = 1\};$$

dabei ist $q + T_qQ = \{q + v \mid v \in T_qQ\}$. (Wir „heften" also den Tangentialraum von Q in q am Punkt q an.) Man vergleiche dies mit der bekannten (?) Formel für die Tangente an die Ellipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

257. m. Über Egons schöne Beine. Es war an einem wunderschönen Sommernachmittag, von dem wir zur Zeit nur träumen können, als der italienische Mathematiker Joseph-Louis Lagrange sich auf den Weg zur Universität machte. Schon vor einiger Zeit war ihm zu Ohren gekommen, daß der schöne Egon wegen seiner langen Beine bei seinen Kommilitoninnen so beliebt war. Heute wollte er sich selbst davon überzeugen und stellte sich, am Hörsaal angekommen, in die Nähe von Egon, um seine Beine genauer zu betrachten. Dabei stellte er fest, daß es ungünstig war, zu weit von Egon entfernt zu sein, aber auch in der Nähe von Egon war es nicht so gut möglich, seine Beine genau zu erkennen.

Das brachte ihn auf die Idee, diejenige Entfernung zu ermitteln, bei der er Egons Beine möglichst groß sieht (d. h. bei der der Winkel, unter dem Egons Beine ihm erscheinen, am größten ist). Nach einem kurzen Blick in sein Analysis-Skript und sein Geometrie-Schulbuch hatte er eine einfache geometrische Lösung.



(Tip: In der Skizze bezeichnet $\varphi(p)$ für $p \in \mathbf{R}^2$ den Winkel, unter dem Egons Beine von p aus gesehen werden, L die Länge von Egons Beinen und h die Augenhöhe von Lagrange. Man skizziere $\{p \in \mathbf{R}^2 \mid \varphi(p) = c\}$ mit $c \in]0, \pi[$ und $\{p \in \mathbf{R}^2 \mid y(p) - h = 0\}$.)

258. m. Sei eine Abbildung $f\colon X \to Y$ gegeben. Zeige:

(a) Ist $\mathfrak{B}$ eine σ-Algebra auf Y, so ist $\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ eine σ-Algebra auf X.

(b) Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X, so ist $\{B \in \mathfrak{P}(Y) \mid f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\}$ eine σ-Algebra auf Y.

(c) Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\mathfrak{S}$ ein System von Teilmengen $B \subseteq Y$, so daß $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ für jedes $B \in \mathfrak{S}$ gilt. Dann gilt auch $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ für jedes $B \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$.

(Tip: Beachte (b) und Beispiel (f) aus Abschnitt 15.1.)