7. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

01. Dezember – 08. Dezember 2022 *

259. m. Beweise, daß für alle a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$ gilt:

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\quad \text{und} \quad]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}].$$

Folglich enthält jede σ-Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbf{R})$, welche alle offenen (bzw. alle abgeschlossenen) Intervalle enthält, auch alle abgeschlossenen (bzw. alle offenen) Intervalle.

260. m. Gib ein Beispiel einer nicht meßbaren Funktion $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ an, für die $|f|$ meßbar ist; es darf benutzt werden, daß $\mathfrak{B}(\mathbf{R}) \subsetneq \mathfrak{P}(\mathbf{R})$; vgl. Aufgabe 2 aus Abschnitt 15.7. (Vergleiche dies mit Proposition 3 aus Abschnitt 15.2.)

261. m. Zeige: Für jedes $R \in \mathbf{R}_+$ ist die Abschneide-Funktion

$$\chi_R \colon \widehat{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} R & \text{für } t \in]R, \infty], \\ t & \text{für } t \in [-R, R], \\ -R & \text{für } t \in [-\infty, -R[\end{cases}$$

Borel-meßbar. Daher (?) ist auch für jede Funktion $f \in \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A})$ die „abgeschnittene“ Funktion

$$f_R \colon X \to \mathbf{R}, p \mapsto \begin{cases} R & \text{für } f(p) \in]R, \infty], \\ f(p) & \text{für } f(p) \in [-R, R], \\ -R & \text{für } f(p) \in [-\infty, -R[\end{cases}$$

eine $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion.

*Von den 30 zu erreichenden Punkten werden maximal 25 Punkte angerechnet.

262. s. (5 Punkte) Es seien a, $b \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$. Zeige, dass jede Regelfunktion $f \in \mathrm{R}([a,b], \mathbf{R})$ Borel-meßbar ist, also

$$\mathrm{R}([a,b], \mathbf{R}) \subseteq \mathcal{M}([a,b], \mathfrak{B}([a,b])).$$

Zeige auch, daß $\mathrm{R}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{R}, \mathfrak{B}(\mathbf{R}))$.

263. m. Elementare Konstruktion von Maßen. Es sei Sei $(X, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum. Zeige:

(a) Seien μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$ und $A_0 \in \mathfrak{A}$. Dann ist

$$\mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}, A \mapsto \mu(A \cap A_0)$$

ebenfalls ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$.

(b) Sind $\mu_1, \ldots, \mu_n$ Maße auf $(X, \mathfrak{A})$ und sind $a_1, \ldots, a_n$ nicht negative reelle Zahlen, so ist

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mu_k$$

ebenfalls ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$.

(c) Ist $(\mu_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(X, \mathfrak{A})$, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \mu_n$$

ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(X, \mathfrak{A})$.

264. s. (10 Punkte) Seien $n \in \mathbf{N}_2$ und $\alpha\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg (vgl. Abschnitt 9.6). Zeige, daß seine Spur $\alpha([a,b])$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Folglich (?) sind Peano-Wege niemals rektifizierbar.

(Tip: Wähle einen α hinreichend gut approximierenden Streckenzug σ und skizziere die ε-Umgebung $U_\varepsilon(\sigma([a,b]))$; weiterhin benutze die Charakterisierung Lebesguescher Nullmengen aus Abschnitt 15.3.)

265. m. Es sei $(A_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Teilmengen einer Menge X. Zeige:

(a) Setzen wir $E_n := \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$ und $F_n := A_n \setminus E_n$ für $n \geq 0$, so ist (E_n) eine monoton wachsende Folge von Teilmengen (d. h. $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle $n \geq 0$) und (F_n) eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen (d. h. $F_n \cap F_m = \emptyset$ für $n \neq m$) mit

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

(b) Es gelten

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \{p \in X \mid |\{n \in \mathbf{N}_0 \mid p \in A_n\}| = \infty\}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n = \{p \in X \mid |\{n \in \mathbf{N}_0 \mid p \notin A_n\}| < \infty\}.$$

Es gilt weiter

$$\emptyset \subseteq \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq X.$$

Zeige außerdem: Sind die A_n Elemente einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$, so gilt auch

$$\liminf_{n\to\infty} A_n, \limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

Wie die Bezeichnungen schon andeuten, werden diese Mengen der *Limes inferior* bzw. der *Limes superior* der Folge (A_n) genannt.

(c) Ist (A_n) eine monoton wachsende Folge (vgl. (a)), so gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n;$$

ist (A_n) eine monoton fallende Folge (d. h. $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \geq 0$), so gilt

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Im Falle $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ nennen wir diese Menge den *Limes* der Folge (A_n), $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Zeige durch Angabe eines Beispieles einer Folge (A_n), daß $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ existieren kann, obwohl die Folge (A_n) weder monoton wächst noch fällt.

(d) Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$. Zeige:

$$\mu\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu\Big(A_n\Big).$$

266. s. (5 Punkte) Für jede Folge $(A_n)_{n\geq 0}$ von Teilmengen einer Menge X gilt

$$1_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n}.$$

267. s. (10 Punkte) Das Cantorsche Diskontinuum. Es sei

$$K := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} \in \mathbf{R} \;\middle|\; a_k \in \{0, 9\} \right\}.$$

Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, daß K eine überabzählbare, kompakte Lebesgue-Nullmenge ist. Dazu beweise folgende Schritte:

(a) Die Funktion

$$\varphi\colon K \to [0,1], a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} \mapsto \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 2^{-k}$$

ist wohldefiniert und surjektiv. Weiterhin gilt $|K| = |[0,1]|$.
(Tip: Abschnitte 5.14 und 7.10.)

(b) Für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ definieren wir kompakte Intervalle $I_{n,k} := [a_{n,k}, b_{n,k}] \subseteq \mathbf{R}$ für $k = 1, \ldots, 2^n$ rekursiv durch

$$I_{0,1} := [0, 1]$$

und

$$I_{n+1,2k-1} := [a_{n,k}, a_{n,k} + 10^{-(n+1)}]$$

und

$$I_{n+1,2k} := [b_{n,k} - 10^{-(n+1)}, b_{n,k}].$$

Schließlich sei

$$K_n := \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}.$$

(i) Berechne für alle $n \in \mathbf{N}_0$ das „Maß“ $L_n := \sum_{k=1}^{2^n} \lambda(I_{n,k})$ von K_n.

(ii) Zeige $K_n = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} \mid a_1, \ldots, a_n \in \{0, 9\} \wedge a_{n+1}, \ldots \in \{0, \ldots, 9\}\}$.

(iii) Zeige $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$.

Also (?) ist K eine Lebesguesche Nullmenge (und eine Borel-Menge).