8. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

08. Dezember – 15. Dezember 2022 *

268. s. (10 Punkte) Differenzierbare Bilder Lebesguescher Nullmengen. Ziel der Aufgabe ist der Beweis folgender Aussage:

> Ist G eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ eine C^1-Abbildung und $N \subseteq G$ eine λ^n-Nullmenge, so ist auch das Bild $f(N)$ eine λ^n-Nullmenge.

Da geschickterweise bei der Bearbeitung der Aufgabe die Charakterisierung Lebesguescher Nullmengen aus Theorem 2 aus Abschnitt 15.3 verwendet wird, ist es sinnvoll, im folgenden den $\mathbf{R}^n$ mit der Supremumsnorm zu versehen.

Der Beweis erfolgt unter Benutzung der in Abschnitt 15.3 eingeführten Bezeichnung $K_m(G)$ in folgenden Schritten:

(a) Es sei zunächst zusätzlich vorausgesetzt, daß es eine Konstante $c \in \mathbf{R}_+$ gibt, so daß $\forall p \in G\colon\ \|D_p f\| \leq c$ ist. Zeige:

- **(i)** Zu jedem abgeschlossenen Würfel $Q_0 \subseteq G$ mit Mittelpunkt $a \in \mathbf{R}^n$ existiert ein Würfel Q_0' mit Mittelpunkt $f(a)$, so daß

$$f(Q_0) \subseteq Q_0' \quad \text{und} \quad \lambda^n(Q_0') \leq c^n \cdot \lambda^n(Q_0).$$

- **(ii)** Ist $Q \subseteq G$ irgendein abgeschlossener Quader, so ist $f(N \cap Q)$ eine λ^n-Nullmenge.
- **(iii)** Für jedes $m \in \mathbf{N}_0$ ist $f(N \cap K_m(G))$ eine λ^n-Nullmenge, also (?) ist auch $f(N) = f(N \cap G)$ eine λ^n-Nullmenge.

(b) Nun beweise vermittels (a) in der allgemeinen Situation, daß für jedes $m \in \mathbf{N}_0$ das Bild $f(N \cap K_m(G)^o)$ eine λ^n-Nullmenge ist, und folgere daraus, daß auch $f(N)$ eine λ^n-Nullmenge ist.

*Es sind maximal 20 Punkte zu erreichen.

Gilt die Aussage auch noch, wenn f nur als stetig vorausgesetzt wird?

269. m. Bilder niederdimensionaler Teilmengen sind dünn.

(a) Seien G eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^k$ und $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Ist dann $k < n$, so ist das Bild $f(G)$ eine Lebesguesche Nullmenge.

Insbesondere (?) sind daher alle echten Untervektorräume des $\mathbf{R}^n$ Lebesguesche Nullmengen.

(Tip: $g\colon \mathbf{R}^{n-k} \times G \to \mathbf{R}^n, (p,q) \mapsto f(q)$.)

(b) Jede k-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit M von $\mathbf{R}^n$ ist eine Lebesguesche Nullmenge, wenn $k < n$.

270. s. (5 Punkte) Ist $g \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$, so wird durch

$$\mu_g\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}, A \mapsto \int_A g\,d\mu$$

ein Maß auf $\mathfrak{A}$ definiert; wir sagen, daß μ_g das Maß der *Dichte* g bezüglich μ ist. Dieses Maß ist *absolut stetig* bezüglich μ, d. h. $\mathfrak{N}(X, \mathfrak{A}, \mu) \subseteq \mathfrak{N}(X, \mathfrak{A}, \mu_g)$; weiterhin gilt:

$$\forall f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})\colon \int f\,d\mu_g = \int f \cdot g\,d\mu.$$

(Tip: Zum Beweis der σ-Additivität von μ_g beachte das Korollar 2 in Abschnitt 15.4. Zum Beweis der Integralgleichheit: 1. Schritt: $f = 1_A$ mit $A \in \mathfrak{A}$; 2. Schritt: $f \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$; 3. Schritt: $f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$.)

271. m. Sind φ, $\psi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$, so sind auch $\varphi \cdot \psi$, $\sup(\varphi, \psi)$, $\inf(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$.

272. m. Ist ν das Zählmaß auf $\mathbf{N}_0$, so ist jede nirgends negative Funktion $f\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$ ein Element von $\widehat{\mathcal{M}}^+(\mathbf{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbf{N}_0))$ und

$$\int f\,d\nu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

273. m. Sei $f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ eine Funktion, für welche $\int f\,d\mu < \infty$ ist. Dann gilt:

(a) Für jedes $a \in \mathbf{R}_+$ hat die Menge $M_a := \{p \in X \mid f(p) \geq a\}$ ein endliches μ-Maß.

(b) Die Menge $M_0 := \{p \in X \mid f(p) > 0\}$ ist σ-endlich, d. h. es existiert eine Folge (A_n) von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und $M_0 \subseteq \bigcup A_n$.

(c) Zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ derart, daß $\mu(A) < \infty$ und

$$\int f\,d\mu \leq \int_A f\,d\mu + \varepsilon.$$

(Tip: Arbeite mit einer Abbildung $\varphi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$, für welche $\varphi \leq f$ und $\int f\, d\mu \leq \int \varphi\, d\mu + \varepsilon$ gilt.)

274. m. Es sei λ das Lebesguesche Maß auf $\mathbf{R}$.

(a) Ist $f_n := \frac{1}{n} \cdot 1_{[n,\infty[}$, so ist $(f_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Folge, die gleichmäßig gegen $f \equiv 0$ konvergiert. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\lambda = 0?$$

Welche Schlüsse können wir aus diesem Beispiel für monoton fallende Folgen auf $\widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ ziehen?

(b) Modifiziere (a), indem Du die Folge $f_n := \frac{1}{n} \cdot 1_{[0,n]}$ betrachtest. Das Lemma von Fatou muß ja anwendbar sein; wie sehen da die Verhältnisse aus?

(c) Modifiziere (a), indem Du die Folge der Funktionen $f_n := n \cdot 1_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$ betrachtest. Ist die Konvergenz von (f_n) gegen $f \equiv 0$ gleichmäßig? Wie sehen die Verhältnisse beim Lemma von Fatou aus?

275. s. (5 Punkte) Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ zwei σ-Algebren über einer Menge X und $\mu\colon \mathfrak{A} \to \widehat{\mathbf{R}}$ und $\nu\colon \mathfrak{B} \to \widehat{\mathbf{R}}$ zwei Maße, und zwar sei ν eine Fortsetzung von μ, d. h.

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \mu = \nu|\mathfrak{A}.$$

Dann gilt:

(a) $\mathcal{M}(X, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}(X, \mathfrak{B})$, $\mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{B})$, $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{C}}(X, \mathfrak{B})$, $\widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{A}) \subseteq \widehat{\mathcal{M}}(X, \mathfrak{B})$ und $\widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A}) \subseteq \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{B})$.

(b) $\mathfrak{N}(X, \mathfrak{A}, \mu) \subseteq \mathfrak{N}(X, \mathfrak{B}, \nu)$.

(c) Für alle $\varphi \in \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A})$ gilt $\int \varphi\, d\mu = \int \varphi\, d\nu$.

(d) Für alle $f \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ gilt $\int f\, d\mu = \int f\, d\nu$. (Tip: Beachte Lemma 1 aus Abschnitt 15.4.)