9. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

15. Dezember – 22. Dezember 2022 *

276. s. (5 Punkte) Ist μ ein endliches Maß, also $\mu(X) < \infty$, und ist $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, welche *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$ konvergiert, so ist auch $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, und es gilt

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Natürlich (?) läßt sich diese Aussage auf den Spezialfall $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu) = \mathcal{L}(M, \lambda^n)$ anwenden, wobei M eine beschränkte Menge in $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$ ist.

277. s. (10 Punkte) Zusammenhang mit dem elementaren Integral aus Kapitel 8.

(a) Seien $-\infty < a < b < \infty$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\mathrm{R}([a,b], \mathbf{R}) \subseteq \mathcal{L}([a,b], \lambda) \quad \text{und} \quad \forall f \in \mathrm{R}([a,b], \mathbf{R})\colon \int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f\,dx.$$

(b) Seien $a, b \in \widehat{\mathbf{R}}$. Ist dann $-\infty < a < b \leq \infty$, so gilt für jede *nicht negative* Funktion $f \in \mathrm{R}([a,b[, \mathbf{R})$, daß $f \in \mathcal{L}([a,b[, \lambda)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_a^b f\,dx$ in $\mathbf{R}$ konvergiert; vgl. Abschnitt 10.6.

Entsprechende Aussagen gelten für uneigentliche Integrale, die an der unteren Grenze bzw. an beiden Grenzen „kritisch“ sind.

278. s. (5 Punkte) Sei $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

(a) Ist $g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ beschränkt, so ist auch $fg \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$.
(Tip: Korollar 1(b) aus Abschnitt 15.5.)

(b) Im allgemeinen gilt nicht $f^2 \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

*Von den 25 zu erreichenden Punkten werden maximal 20 Punkte angerechnet.

279. s. (5 Punkte) Integration bezüglich einer Dichte. Für das Integral bezüglich einer Dichte $g \in \widehat{\mathcal{M}}^+(X, \mathfrak{A})$ (vgl. Korollar 3 aus Abschnitt 15.4) gilt: Für alle Abbildungen $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ ist

$$f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu_g) \iff f \cdot g \underset{\mu}{\in} \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu);$$

und im Falle der μ_g-Integrierbarkeit von f gilt

$$\int f \, d\mu_g = \int f \cdot g \, d\mu.$$

Ist g beschränkt, so gilt daher (?) $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu) \subseteq \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu_g)$.

(Tip: $(fg)^+ = ?$.)

280. m. Mittelwertsatz der Integralrechnung. Es seien K eine kompakte zusammenhängende Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ und $f\colon K \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein Punkt $p \in K$, so daß

$$\int f \, d\lambda^n = f(p) \cdot \lambda^n(K).$$

(Tip: $\min f \leq f \leq \max f$. Beweise, die länger als 10 Zeilen sind, sind nicht akzeptabel.)

281. m. Ist ν das Zählmaß des meßbaren Raumes $(\mathbf{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbf{N}_0))$, so ist eine Funktion $f\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$ genau dann ν-integrierbar, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert. In diesem Falle gilt

$$\int f \, d\nu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

282. m. Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert eine Funktion $\varphi \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A})$ mit

$$\int |f - \varphi| \, d\mu < \varepsilon.$$

(Tip: Approximiere f^+ und f^- geeignet.)

283. m. Ist $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und ist $a \in \mathbf{R}_+$, so hat die Menge $\{p \in X \mid |f(p)| \geq a\}$ ein endliches μ-Maß und die Menge $\{p \in X \mid f(p) \neq 0\}$ ist σ-endlich.

(Tip: Vergleiche Aufgabe 3 aus Abschnitt 15.4.)

284. m. Sei $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$, und sei $(f_n)_{n \geq 0}$ die Folge der abgeschnittenen Funktionen $f_n := \chi_n \circ f$ (vgl. Aufgabe 3 in Abschnitt 15.2). Dann gilt:

(a) Ist $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, so auch $f_n \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ für alle $n \geq 0$, und es gilt dann

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

(b) Gilt

$$\sup_n \int |f_n| \, d\mu < \infty,$$

so ist $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

285. m. Ist $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in $\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < \infty,$$

so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ fast überall gegen ein $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$, und es gilt

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

286. m. In der Situation der Aufgabe 275 gilt

$$\mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu) = \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{L}(X, \mathfrak{B}, \nu) \quad \text{und} \quad \forall f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)\colon \int f \, d\mu = \int f \, d\nu.$$