4. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

9. November 2021*

16. s. Es seien $\mathbf{R}$ und $\mathbf{R}'$ zwei Körper, für welche neben den Körperaxiomen (R1)–(R9) auch die Anordnungsaxiome (R10)–(R12) gelten. Nach den Konstruktionsverfahren der Abschnitte 1.7–1.9 werden auch in $\mathbf{R}'$ die Mengen der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen konstruiert; diese Mengen seien mit $\mathbf{N}_0'$, $\mathbf{Z}'$ und $\mathbf{Q}'$ bezeichnet. Ziel der Aufgabe ist der Beweis des folgenden:

Satz: Es gibt genau einen *Körperisomorphismus* $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}'$; das ist eine Bijektion mit folgenden Eigenschaften für alle a, $b \in \mathbf{Q}$:

(a) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,

(b) $f(1) = 1'$,

(c) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Aus der Aussage (a) folgt, daß

(d) $f(0) = 0'$ und $f(-a) = -f(a)$.

Aus den Aussagen (a), (b) und (d) folgt

(e) $f(\mathbf{N}_0) = \mathbf{N}_0'$.

Aus den Aussagen (b) und (c) folgt

(f) $f(a) \neq 0'$ und $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, wenn jeweils $a \neq 0$.

Aus den Aussagen (a)–(c) folgt schließlich

(g) $a < b \implies f(a) < f(b)$.

Beweise dazu:

0. Beweisschritt. Zunächst beweise, daß aus der Gültigkeit von (a) die Aussage (d) folgt.

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 16. November 2021 zu bearbeiten.

1. Beweisschritt. Durch rekursive Definition definiere $f|\mathbf{N}_0$ durch $f(0) \coloneqq 0'$ und

$$f(n+1) \coloneqq f(n) + 1'$$

für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Dann beweise durch vollständige Induktion die Aussagen (a)–(c) für alle a, $b \in \mathbf{N}_0$, daß Du $f|\mathbf{N}_0$ so definieren mußt, wenn die Aussagen (d), (b) und (a) gelten sollen, und daß Aussage (e) gilt.

2. Beweisschritt: Erweitere die Definition von f auf $\mathbf{Z}$ durch

$$f(-n) \coloneqq -f(n)$$

für $n \in \mathbf{N}_1$. Dann beweise die Aussagen (a) und (c) für alle a, $b \in \mathbf{Z}$ und daß Du $f|\mathbf{Z}$ so definieren mußt, wenn die Aussage (d) gelten soll.

3. Beweisschritt: Sind n_1, $n_2 \in \mathbf{Z}$ und m_1, $m_2 \in \mathbf{N}_1$ und gilt $n_1/m_1 = n_2/m_2$, so zeige mit Aussage (c), daß auch $f(n_1)/f(m_1) = f(n_2)/f(m_2)$. Daher kannst Du eindeutig eine Funktion $\varphi \colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}'$ durch

$$\varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{f(n)}{f(m)}$$

für $n \in \mathbf{Z}$ und $m \in \mathbf{N}_1$ definieren. Für $a \in \mathbf{Z}$ gilt $\varphi(a) = f(a)$. Daher bezeichnen wir diese Funktion φ jetzt mit f. Für sie gelten die Aussagen (a)–(c). Weiterhin folgt aus der Gültigkeit von (c) die Aussage (f), und daher mußt Du f so definieren, wenn die Aussagen (a)–(c) gelten sollen.

4. Beweisschritt: Beweise jetzt $f(a) > 0'$ für alle $a \in \mathbf{Q}_+$ und folgere hieraus die Aussage (g), anschließend die Injektivität von f. Die Surjektivität ergibt sich schließlich aus (e) und der Konstruktion von f.

Bemerkung: Es gibt viele Körper, welche die Axiome (R1)–(R12) erfüllen. Jeder dieser Körper enthält gemäß der Abschnitte 1.7–1.9 einen Unterkörper der rationalen Zahlen. Der soeben angegebene Satz besagt gerade, daß alle diese Unterkörper bis auf eindeutige *Isomorphie* gleich sind.

17. **(a)** **m.** Zeige mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbf{N}_0$: Sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+$ positive reelle Zahlen mit $\prod_{i=1}^n x_i = 1$, so gilt $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $x_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(Tip: Sind beim Induktionsschritt nicht alle der Zahlen $x_1, \ldots, x_{n+1}$ gleich 1, so muß (?) mindestens eine der Zahlen kleiner als 1 und eine Zahl größer als 1 sein, etwa $x_1 > 1$ und $x_2 < 1$. Werte den Term $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1)$ aus, und wende die Induktionsvoraussetzung auf $(x_1 \cdot x_2)$, $x_3, \ldots, x_{n+1}$ an.)

(b) **s.** Folgere aus Teil (a), daß für alle $n \in \mathbf{N}_1$ und für beliebige positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+$ die folgenden Ungleichungen zwischen *arithmetischem*, *geometrischem* und *harmonischem* Mittel gelten:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n 1/a_i}.$$

18. Berechung von $\sqrt{a}$ zu einem Radikanden $a \in \mathbf{R}_+$.

(a) **m.** Bereits vor ca. 4000 Jahren war den Sumerern ein Iterationsprozeß bekannt, der bei Eingabe einer Zahl $a \in \mathbf{R}_+$ eine Näherung für $\sqrt{a}$ liefert. Zu beliebigem Startwert $x_0 \in \mathbf{R}_+$ ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$$

rekursiv definiert. Um das Fehlerverhalten bei der Iteration analysieren zu können, untersuchen wir die Folge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ mit

$$\varepsilon_n := \frac{x_n - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Es ist ε_n gerade der n-te *relative* Fehler des Iterationsverfahrens.
Sei nun $x_0 \neq \sqrt{a}$. (Was passiert sonst?)

(i) Zeige: $\varepsilon_0 > -1$ und für $n \in \mathbf{N}_0$ ist

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2(1+\varepsilon_n)}.$$

(ii) Zeige mit vollständiger Induktion für n, $m \in \mathbf{N}_1$:

A. $\varepsilon_n > 0$,

B. $\varepsilon_{n+m} < \varepsilon_n/2^m$.

(iii) Für $n \in \mathbf{N}_1$ gilt $x_n > x_{n+1} > \sqrt{a}$.

Bemerkung. Wegen B. liefern die x_n für große n tatsächlich eine Näherung für $\sqrt{a}$.

(b) **s.** Teste das Verfahren auf einem (Taschen-)Rechner mit dem Eingabewert $a = 2$ und dem Startwert $x_0 = 2$.

(c) **s.** Schreibe für das Verfahren ein (Scheme-)Programm, bei welchem der Radikand a eingelesen wird und die Iteration stoppt, wenn

$$(x_n^2 - a)/a < 10^{-8}.$$

19. s. Zeige:

(a) Für $a,\, b \in \mathbf{R}$ gilt: $|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$.
(Tip: $|a+b| + |a-b| \geq 2\,|a|$? Warum hilft das?)

(b) Für $a,\, b \in \mathbf{R}^*$ gilt: $\left|\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right| \geq 2$.

20. m. Ungleichung von Bernoulli. Beweise die Ungleichung von Bernoulli:

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

für $n \in \mathbf{N}_0$, $a \in \mathbf{R}$ mit $a > -1$.

21. m.

(a) Es sei $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ eine beliebige Teilmenge der reellen Zahlen. Wir definieren

$$-M := \{-a \in \mathbf{R} \mid a \in M\}.$$

Zeige: $-M$ hat genau dann ein Maximum (bzw. Supremum), wenn M ein Minimum (bzw. Infimum) hat. Im Falle der Existenz gilt

$$\max(-M) = -\min(M) \quad (\text{bzw. } \sup(-M) = -\inf(M)).$$

(b) Für $a,\, b \in \mathbf{R}$ definieren wir für das Maximum $\max(a,b) := \max(\{a,b\})$ und analog für das Minimum $\min(a,b) := \min(\{a,b\})$. Zeige

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a-b|)$$

und

$$\min(a,b) = \frac{1}{2}(a + b - |a-b|).$$