10. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

22. Dezember 2022 – 12. Januar 2023 *

287. s. (10 Punkte) Sei $K \subseteq \mathbf{R}^n$ eine kompakte Teilmenge, für die $\overline{K^o} = K$ gilt (z. B. ist jedes Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ eine derartige kompakte Teilmenge von $\mathbf{R}$). Zeige:

(a) Die Einschränkung der Pseudonorm $\|\cdot\|_1$ aus Abschnitt 15.6 auf den Untervektorraum $C^0(K, \mathbf{C}) \subseteq \mathcal{L}^1_{\mathbf{C}}(K, \lambda^n)$ ist eine Norm. Insbesondere gilt: Sind f, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbf{C}}(K, \lambda^n)$ stetige Funktionen, so folgt aus $[f] = [g]$ bereits $f = g$.

(b) Bezüglich der Norm aus (a) ist aber $C^0(K, \mathbf{C})$ nicht vollständig; beweise dies für $n = 1$ und $K = [-1, 1]$.

288. m. Konvergiert eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ im μ-Mittel gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$, so gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

289. m. Konvergiert eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ im μ-Mittel gegen ein $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$, so braucht sie dennoch nicht μ-fast überall gegen f zu konvergieren.

(Tip: $X = [0, 1]$, $\mu = \lambda_X$, $E = \mathbf{R}$, $f_0 = 1_{[0,1]}$, $f_1 = 1_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f_2 = 1_{[\frac{1}{2},1]}$, $f_3 = 1_{[0,\frac{1}{3}]}$, $f_4 = 1_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}$, $\ldots$.)

290. m. Es seien $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E)$ und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:

(a) Existiert ein $g \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ mit $f \underset{\mu}{=} g$, so ist auch $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

(b) Ist $\mu(X) < \infty$ und ist f beschränkt, so ist $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

*Von den 25 zu erreichenden Punkten werden maximal 20 Punkte angerechnet.

291. s. (10 Punkte) Sei $1 \leq p < \infty$. Es sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$, die punktweise gegen eine Funktion $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ konvergiert. Zeige in jeder der drei folgenden Situationen, daß auch $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ ist und daß $\lim \|f_n - f\|_p = 0$.

(a) Es existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ derart, daß

$$\|f_n\|^p \leq g.$$

für alle n.

(Tip: Beachte auch $\|f_n - f\|^p \leq 2^p \cdot g$.)

(b) Es ist $\mu(X) < \infty$, und es existiert eine Konstante $C \in \mathbf{R}_+$ mit

$$\|f_n\| \leq C$$

für alle n.

(c) Es ist $\mu(X) < \infty$ und die Konvergenz von (f_n) gegen f ist gleichmäßig.

292. s. (5 Punkte) Sei $1 \leq p < \infty$.

(a) Ist $\mu(X) < \infty$, so gilt $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

(b) Im allgemeinen gilt weder $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$ noch umgekehrt $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu; E) \subseteq \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

(Tip: $p = 2$, $X = \mathbf{R}$, $\mu = \lambda$, $E = \mathbf{R}$. Für $s \in \mathbf{R}_-$ sei $f_s\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ die triviale Fortsetzung von $x^s\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$; betrachte nun für geeignete Intervalle $I \subseteq \mathbf{R}_+$ die Funktion $f_s \cdot 1_I \in \mathcal{M}(\mathbf{R}, \mathfrak{B}(\mathbf{R}))$.)

293. m. In der Situation der Aufgabe 275 ist für alle $1 \leq p < \infty$

$$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E) = \mathcal{M}(X, \mathfrak{A}; E) \cap \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{B}, \nu; E),$$

und die Pseudonorm $\|\cdot\|_p$ von $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{B}, \nu; E)$ ist eine Fortsetzung der entsprechenden Pseudonorm von $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu; E)$.

(Tip: Beachte auch Aufgabe 286.)