11. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

12. Januar – 19. Januar 2023 *

294. m. Translationsinvarianz des Lebesgueschen Maßes. Das Lebesguesche Maß des $\mathbf{R}^n$ ist translationsinvariant, d. h.: Ist $v \in \mathbf{R}^n$ ein beliebiger Vektor, $T \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, p \mapsto p + v$ die Translation um v und $A \subseteq \mathbf{R}^n$ eine Borel-meßbare Menge A, so ist $T(A)$ Borel-meßbar mit $\lambda^n(T(A)) = \lambda^n(A)$.

(Tip: Translationsinvarianz von $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$; Translationsinvarianz des äußeren Lebesgueschen Maßes; Translationsinvarianz von $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R}^n)^*$; usw.)

295. s. (5 Punkte) Eine nicht-borelsche Teilmenge von R. Auf $\mathbf{R}$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$a \sim b :\Longleftrightarrow b - a \in \mathbf{Q}.$$

(Betrachten wir $\mathbf{R}$ als Vektorraum über dem Körper $\mathbf{Q}$, so sind die Äquivalenzklassen bezüglich der soeben definierten Äquivalenzrelation gerade die Elemente des Quotientenvektorraumes $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$, also die affinen Unterräume $a + \mathbf{Q}$, $a \in \mathbf{R}$.) Aufgrund des Auswahlaxioms existiert eine Teilmenge $E \subseteq [0, 1]$ mit

$$\forall a \in \mathbf{R}\, \exists! b \in E \colon a \sim b.$$

Die abzählbare Teilmenge $[-1, 1] \cap \mathbf{Q}$ werde vermittels einer (injektiven) Abzählung $n \mapsto r_n$ durchnummeriert, also

$$[-1, 1] \cap \mathbf{Q} = \{r_n \mid n \in \mathbf{N}_0\}.$$

Wir setzen $E_n := r_n + E$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ und $F := \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$.

Zeige:

(a) $\forall a, b \in E \colon (a \sim b \implies a = b)$.

*Es sind maximal 20 Punkte zu erreichen.

(b) $(E_n)_{n\geq 0}$ ist eine Folge paarweise disjunkter Mengen.

(c) $[0,1] \subseteq F \subseteq [-1,2]$.

(d) Für das äußere Lebesguesche Maß μ_0^* gilt $1 \leq \mu_0^*(F) \leq 3$.

Leite aus (b) und (d) her, daß E keine Borel-Menge sein kann. (Sie kann nicht einmal ein Element der Carathéodory-Fortsetzung $\mathfrak{A}_0(\mathbf{R})^*$ sein.)

296. m. Regularität des Lebesgueschen Maßes. Es sei $A \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$. Beweise:

(a) Es ist A *von außen regulär*, d. h. zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert eine offene Teilmenge $G \subseteq \mathbf{R}^n$, so daß

$$A \subseteq G \quad \text{und} \quad \lambda^n(G) \leq \lambda^n(A) + \varepsilon.$$

(Tip: Arbeite mit dem äußeren Maß μ_0^* und konstruiere G als Vereinigung vieler offener Quader.)

(b) Ist die Menge A beschränkt, so ist sie *von innen regulär*, d. h. zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbf{R}^n$, so daß

$$K \subseteq A \quad \text{und} \quad \lambda^n(A) \leq \lambda^n(K) + \varepsilon.$$

(Tip: Es sei $C \subseteq \mathbf{R}^n$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbf{R}^n$ mit $A \subseteq C$. Dann ist $B := C \setminus A$ eine beschränkte Menge, auf die sich (a) anwenden läßt; nun betrachte $K := C \setminus G$ und überlege $A \setminus K \subseteq G \setminus B$.)

297. s. (5 Punkte) Seien $K \subseteq \mathbf{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $G \in \mathfrak{U}^o(K, \mathbf{R}^n)$ eine offene Umgebung von K in $\mathbf{R}^n$. Dann existiert eine „Höckerfunktion“ $\varphi \in C_c^\infty(G, \mathbf{R})$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\varphi|K \equiv 1$. (Zur Definition von $C_c^\infty(G, \mathbf{R})$ siehe Aufgabe 298.(c).)

(Tip: Wir verwenden die euklidische Norm auf dem $\mathbf{R}^n$. Es existiert eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f|]-\infty, 0] \equiv 0$ und $f|]0,\infty[> 0$; vgl. die Aufgabe aus Abschnitt 9.5. Die Funktion

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

ist beliebig oft differenzierbar und erfüllt $0 \leq g \leq 1$, $g|]-\infty, 0] \equiv 0$ und $g|[1,\infty[\equiv 1$. Für $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ ist die Funktion

$$h_\varepsilon\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, p \mapsto g\Big(2 - \frac{\|p\|_2}{\varepsilon}\Big)$$

beliebig oft differenzierbar und erfüllt $0 \leq h_\varepsilon \leq 1$, $h_\varepsilon|(\mathbf{R}^n \setminus U_{2\varepsilon}(0)) \equiv 0$ und $h_\varepsilon|U_\varepsilon(0) \equiv 1$. Für jedes $p \in K$ wähle ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $U_{3\varepsilon}(p) \subseteq G$ und setze $U_p := U_\varepsilon(p)$ und $\psi_p := h_\varepsilon(x-p)$. Es existiert eine endliche Teilmenge $I \subseteq K$, so daß $K \subseteq \bigcup_{p\in I} U_p$. Schließlich setze $\psi := \sum_{p\in I} \psi_p$ und betrachte $\varphi := g \circ \psi|G$.)

298. s. (10 Punkte) Dichtesatz. Seien $G \subseteq \mathbf{R}^n$ eine offene Teilmenge und E ein $\mathbf{K}$-Banachraum. Wir bezeichnen mit $C_c^\infty(G, E)$ den $\mathbf{K}$-Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f\colon G \to E$ mit *kompaktem Träger*. Dabei hat eine Funktion $f\colon G \to E$ kompakten Träger, wenn eine kompakte Teilmenge $K \subseteq G$ mit $f|(G \setminus K) \equiv 0$ existiert. Zeige:

(a) Für jedes $p \in [1, \infty[$ ist $C_c^\infty(G, E)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(G, \lambda^n; E)$. (Insbesondere ist zu zeigen, dass jedes $f \in C_c^\infty(G, E)$ *stark* messbar ist!)

(b) Sei $\varphi \in \mathcal{E}_0(G, \mathfrak{B}(G), \lambda^n; E)$ eine einfache Funktion mit $\varphi|(G \setminus A) \equiv 0$ für eine beschränkte meßbare Teilmenge A. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ ein $f \in C_c^\infty(G; E)$ mit kompaktem Träger und $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$.

(Tip: Aufgabe 296.(b).)

(c) Für jedes $p \in [1, \infty[$ liegt $C_c^\infty(G, E)$ in $\mathcal{L}^p(G, \lambda^n; E)$ dicht, d. h. zu jeder beliebigen Funktion $f \in \mathcal{L}^p(G, \lambda^n; E)$ existiert eine Folge (f_k) von Funktionen $f_k \in C_c^\infty(G, E)$, so daß $\lim \|f_k - f\|_p = 0$.

Infolgedessen kann jeweils $\mathrm{L}^p(G, \lambda^n; E)$ als die Vervollständigung des normierten Raumes $(C_c^\infty(G, E), \|\cdot\|_p)$ betrachtet werden.

(Tip: Sei $f \in \mathcal{L}^p(G, \mathfrak{B}(G), \lambda^n; E)$. Sei $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{E}_0(G, \mathfrak{B}(G), \lambda^n; E)$ mit Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \|\varphi_n - f\|_p = 0$. Dann gilt auch $\lim\limits_{n \to \infty} \|\varphi_n \cdot 1_{K_n} - f\|_p = 0$, wenn $(K_n)_{n \geq 0}$ eine monotone Folge kompakter Teilmengen $K_n \subseteq \mathbf{R}^n$ mit $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n = \mathbf{R}^n$ ist.)