12. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

19. Januar – 26. Januar 2023 *

299. m. Berechne mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips:

(a) Die Fläche einer Kreisscheibe um Null mit Radius $r \in \mathbf{R}_+$.

(b) Das Volumen desjenigen Teils des einschaligen Hyperboloids

$$\{p \in \mathbf{R}^3 \mid x(p)^2 + y(p)^2 - z(p)^2 \leq 1\},$$

der zwischen den Ebenen $z = -1$ und $z = 1$ liegt.

300. s. (5 Punkte) Faltung. Es seien E_1, E_2, E Banachräume und $B : E_1 \times E_2 \to E$ eine stetige bilineare Abbildung. Für Abbildungen $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}, \lambda; E_1)$, $g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}, \lambda; E_2)$,definieren wir

$$F\colon \mathbf{R}^2 \to E, (t, s) \mapsto B(f(t - s), g(s)).$$

Zeige:

(a) Es ist $F \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \lambda^2; E)$. Genauer gilt $\int \|F\| \, d\lambda^2 \leq \|B\| \, \|f\|_1 \, \|g\|_1$.
(Tip: Nimm zunächst an, dass $f = 1_A \cdot v$, $g = 1_B \cdot w$ für gewisse $A, B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$, $v \in E_1$, $w \in E_2$ und verallgemeinere auf integrierbare einfache Funktionen. Verallgemeinere dann auf integrierbare einfache und anschließend auf stark meßbare Abbildungen. Für den stark integrierbaren Fall verwende den Satz von Tonelli und beachte Korollar 2 in Abschnitt 15.9.)

(b) Es existiert eine Nullmenge N, sodass $F_t \in \mathcal{L}(\mathbf{R}, \lambda; E)$ für alle $t \in \mathbf{R} \setminus N$. Definieren wir die *Faltung* $f * g$ von f und g bezüglich B als

$$f * g\colon \mathbf{R} \to E, t \mapsto \begin{cases} \int_{\mathbf{R}} F(t, s) \, d\lambda(s) & \text{für } t \in \mathbf{R} \setminus N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

*Von den 25 zu erreichenden Punkten werden maximal 20 Punkte angerechnet.

so ist $f * g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}, \lambda; E)$ und es gilt $\|f * g\|_1 \le \|B\| \, \|f\|_1 \, \|g\|_1$.

(Tip: Im Theorem von FUBINI läßt sich wählen, bezüglich welcher Variablen zuerst integriert wird.)

Hinweis: Die Faltung $f * g$ ist nur bis auf eine Nullmenge definiert, sollte also sinnvollerweise als Element des Raums $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}, \lambda; E)$ aufgefasst werden.

301. m. Es sei $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$ eine streng monoton wachsende C^1-Funktion. Zeige, daß sich die Substitutionsmethode auf jede λ-integrierbare Funktion $f\colon \varphi([a,b]) \to \mathbf{R}$ anwenden läßt. (Vorsicht! $[a,b]$ ist nicht offen.)

302. s. (5 Punkte) Zeige ausführlich, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}.$$

303. Berechne mit Hilfe des Transformationssatzes:

(a) m. $\displaystyle\int_M \exp\Big(\frac{y-x}{y+x}\Big)\, d\lambda^2$, wobei $M := \{p \in \mathbf{R}^2 \mid x(p), y(p) > 0, x(p) + y(p) \le 2\}$.

(b) s. (2 Punkte) $\displaystyle\int_M (a^2 + x^2 + y^2)^t \, d\lambda^2$, wobei a, $t \in \mathbf{R}$, $t \ge 0$ und $M := \{p \in \mathbf{R}^2 \mid x(p)^2 + y(p)^2 \le 1\}$.

(c) s. (3 Punkte) Sei $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ stetig. Zeige

$$\int_M f(x \cdot y)\, d\lambda^2 = \ln(2) \cdot \int_1^2 f \, d\lambda,$$

wobei M die Menge derjenigen Punkte ist, die im ersten Quadranten $Q_1 := \{p \in \mathbf{R}^2 \mid x(p), y(p) \ge 0\}$ liegen und von den Kurven $xy = 1$, $xy = 2$, $x = y$ und $x = 4y$ eingeschlossen werden.

304. s. (10 Punkte) Schwerpunkt- und Trägheitsmoment. Sei μ das Maß einer Massenverteilung im $\mathbf{R}^3$. Ferner sei $K \subseteq \mathbf{R}^3$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist $\mu(K)$ die *Gesamtmasse* von K,

$$S(K) := \frac{1}{\mu(K)} \cdot \int_K (x, y, z)\, d\mu$$

der *Schwerpunkt* von K und

$$T(K)\colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, (u,v) \mapsto \int_K \langle r \times u, r \times v \rangle \, d\mu$$

mit $r \coloneqq (x, y, z)$ der *Trägheitstensor* von K.

(a) Berechne den Schwerpunkt der Halbkugel

$$B \coloneqq \{p \in \mathbf{R}^3 \mid x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2 \leq r^2 \wedge z(p) \geq 0\}$$

vom Radius $r \in \mathbf{R}^+$. (D.h. $\mu = \lambda^3$. Die Formel $\lambda^3(B) = \frac{2}{3}\pi r^3$ muß nicht hergeleitet werden.)

(b) Sei $K \coloneqq \{p \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{1}{4}x(p)^2 \leq y(p) \leq x(p) \wedge z(p) = 0\}$. Skizziere K. Wir fassen K als „unendlich dünne" Scheibe mit homogener Masse auf; daher ist $\mu \coloneqq \lambda^2 \otimes \delta_0^1$ das „richtige" Maß für K, wobei δ_0^1 das Dirac-Maß auf $\mathbf{R}^1$ am Punkt 0 bezeichne (vgl. Beispiel (b) in Abschnitt 15.3). Berechne $\mu(K), S(K)$ und $T_i(K) \coloneqq T(K)(e_i, e_i)$, wobei $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ die Standard-Orthonormalbasis von $\mathbf{R}^3$ ist.