13. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

26. Januar – 02. Februar 2023 *

305. m. Guldinsche Regel für das Volumen eines Rotationskörpers. Es seien $K \subseteq [0, \infty[\times \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^2$ eine kompakte Menge (in der (x, z)-Ebene) und R die x-Koordinate des Schwerpunktes von K (vgl. Aufgabe 304).

Dann hat der *Rotationskörper*

$$K^* := \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), t) \in \mathbf{R}^3 \mid (r, t) \in K \wedge \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

das Volumen

$$\lambda^3(K^*) = 2\pi \cdot R \cdot \lambda^2(K).$$

306. **(a)** **m.** Sei M das Segment des Einheitskreises im $\mathbf{R}^2$, welches von der Sehne von $(1, 0)$ nach $(0, 1)$ begrenzt wird. Berechne $\int\limits_M xy\, d\lambda^2$.

(b) **m.** Auf dem Effelsberg regnet es und der Abfluß in der Parabolantenne des Radioteleskops ist verstopft. Wie hoch steht das Wasser im Spiegel, wenn n mm Niederschlag fallen? Der maximale Durchmesser der Antenne beträgt 100 m; die Antenne wird durch die Parabel $f = a \cdot x^2$ mit $a = 8{,}336 \cdot 10^{-3}/\mathrm{m}$ parametrisiert.

(c) **s. (5 Punkte)** Holzwurm Woody frißt zentral mitten durch eine kleine Holzkugel von zwei Zentimetern Durchmesser ein zylindrisches Loch von zwei Millimetern Durchmesser. Wieviel Gramm Holz verspeist er dabei, wenn die Dichte ρ des Holzes genau $0{,}7\,\mathrm{g/cm^3}$ beträgt?

307. s. (10 Punkte) Approximation des Dirac-Maßes. Es seien

$$\rho := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-x^2)$$

*Von den 35 zu erreichenden Punkten werden maximal 25 Punkte angerechnet.

und

$$\rho_n := n \cdot \rho(n \cdot x)$$

für alle $n \in \mathbf{N}_1$. Weiter sei μ_n das Maß auf $\mathbf{R}$ mit der Dichtefunktion ρ_n bezüglich des Längenmaßes λ. Zeige:

(a) Für alle $n \in \mathbf{N}_1$ ist $\int \rho_n \, d\lambda = 1$; daher (?) ist jede stetige beschränkte Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine μ_n-integrierbare Funktion.

(Tip: Beispiel 15.10.)

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0, \\ \infty & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

(c) Für jede stetige beschränkte Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist

$$\int f \, d\delta^1 = \lim_{n\to\infty} \int f \, d\mu_n.$$

Im Sinne dieser Aussage können wir also sagen, daß die Maße μ_n gegen das Dirac-Maß $\delta^1 := \delta_0$ konvergieren.

308. m. Seien G eine offene Teilmenge eines Hilbertraumes H und $f\colon G \to \mathbf{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige: Ist $\alpha\colon J \to G$ eine Integralkurve des Gradientenfeldes $\operatorname{grad} f$ und existiert ein $t_0 \in J$ mit $\operatorname{grad}_{\alpha(t_0)} f \neq 0$, so ist $f \circ \alpha$ eine streng monoton wachsende Funktion.

309. m. Sei $X := (1, 1 + y^2)\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Berechne den maximalen Fluß $\Phi\colon D \to \mathbf{R}^2$ von X. Gib im Falle der Existenz ein *Potential* von X an; das ist eine Funktion $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ mit $X = \operatorname{grad} f$.

310. m. Das Flächenelement einer Graphenfläche. Es sei $K \subseteq \mathbf{R}^n$ kompakt mit $\overline{K^o} = K$. Weiter sei $f\colon K \to \mathbf{R}$ eine C^1-Funktion und

$$F\colon K \to \mathbf{R}^{n+1}, p \mapsto (p, f(p))$$

ihr Graph. Dann ist das Flächenelement von F durch

$$\rho_F(p) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\right)^2}$$

gegeben. (Dies kann als pythagoräische Darstellung des Flächenelementes bezeichnet werden.)

311. s. (5 Punkte) Berechne den Flächeninhalt desjenigen Teils des hyperbolischen Paraboloids

$$\{p \in \mathbf{R}^3 \mid z(p) = x(p) \cdot y(p)\},$$

der über

$$\{p \in \mathbf{R}^2 \mid x(p)^2 + y(p)^2 \leq 1, x(p), y(p) \geq 0\}$$

liegt.

312. s. (10 Punkte) Guldinsche Regel für die Oberfläche eines Rotationskörpers. Ist $c = (c_1, \ldots, c_n)\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ eine λ-fast überall reguläre Kurve, so definieren wir den *Schwerpunkt* von c als

$$S(c) \coloneqq \frac{1}{L(c)} \cdot \int_c (x_1, \ldots, x_n)\, d\lambda.$$

Sei jetzt $c = (c_1, c_2)\colon [a, b] \to \mathbf{R}^2$ eine λ-fast überall injektive solche Kurve mit λ-fast überall $c_2 > 0$, und sei $s = (s_1, s_2)$ der Schwerpunkt von c. Zeige:

(a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon [a, b] \times [0, 2\pi] &\to \mathbf{R}^3, \\ (t, \varphi) &\mapsto (c_1(t), c_2(t) \cdot \cos(\varphi), c_2(t) \cdot \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

ist ein 2-dimensionales Pflaster im $\mathbf{R}^3$. Es heißt F das von c erzeugte *Rotationsflächenstück*.

(b) Es gilt $\lambda^2(F) = 2\pi s_2 L(c)$. (Dabei ist $2\pi s_2$ die Länge des Weges, den der Schwerpunkt von c bei einmaliger Rotation um die x-Achse zurücklegt.)

313. s. (5 Punkte) Finde 2-dimensionale Flächenstücke F wie in Aufgabe 312., welche auf dem Inneren des Definitionsbereiches injektiv sind, deren Bild

(a) die Sphäre vom Radius r in $\mathbf{R}^3$ bzw.

(b) der Torus mit Seelenradius R und Wulstradius r

ist, und berechne jeweils $\lambda^2(F)$.

(Tip: Kugelkoordinaten und Aufgabe 247.)