14. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

02. Februar – 09. Februar 2023 *

314. s. (5 Punkte) Sei $X \coloneqq (x, y^2, z^3)\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Berechne den Fluß des Vektorfeldes X durch die Oberfläche des Würfels $[-1,1]^3$ ohne Rückgriff auf die Integralsätze aus Abschnitt 16.13.

315. **(a)** **m.** Unter der Wirkung des Kraftfeldes $F \coloneqq (2xy, x^2 + y^2)\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ bewege sich ein Massenpunkt auf der Parabel $y = x^2$ vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt $(2,4)$. Welche Arbeit wird hierbei geleistet?

(b) **s. (5 Punkte)** Berechne

$$\int_\alpha ((y - x)\, dx - y\, dy + dz)$$

für

$$\alpha\colon [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3, t \mapsto (-\sin(t), \cos(t), 0).$$

(c) **m.** Berechne

$$\int_\alpha (x\, dy + y\, dx),$$

wobei α eine Parametrisierung einer einmaligen Durchlaufung der Kardioide bezeichnet (vgl. Aufgabe 159; $t \mapsto (1 + \cos(t)) \cdot e^{it}$).

316. **m.** Wir definieren auf $G \coloneqq \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Pfaffsche Form ω durch

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy - \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx.$$

Zeige:

(a) Schreiben wir ω in der Form $a\, dx + b\, dy$, so gilt

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}.$$

*Von den 30 zu erreichenden Punkten werden maximal 25 Punkte angerechnet.

(b) Sei $\alpha\colon [a,b] \to G$ und

$$\alpha = r_\alpha \cdot (\cos\circ\theta_\alpha, \sin\circ\theta_\alpha)$$

ihre Polarkoordinatendarstellung. Dabei ist $r_\alpha \coloneqq \|\alpha\|_2$ und θ_α eine geeignete C^1-Funktion. Dann gilt:

$$\int_\alpha \omega = \theta_\alpha(b) - \theta_\alpha(a).$$

Ist insbesondere α eine geschlossene Kurve, so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \cdot (\theta_\alpha(b) - \theta_\alpha(a)) \in \mathbf{Z},$$

ist die Anzahl der Windungen von α um den Nullpunkt. Daher (?) ist ω kein totales Differential, d. h. es existiert keine C^1-Funktion $f\colon G \to \mathbf{R}$ mit $\omega = df$.

317. s. (10 Punkte) Es sei $\omega = P\,dx + R\,dy$ eine stetige Differentialform auf einem offenen Quader $Q \subseteq \mathbf{R}^2$, von der wir voraussetzen, daß sie ein totales Differential ist. Zeige: Ist $p_0 \coloneqq (a,b) \in Q$, so wird durch

$$f(p) \coloneqq \int_a^{x(p)} P(t, y(p))\,dt + c(y(p)) \quad \text{mit} \quad c(y) \coloneqq \int_b^y R(a,s)\,ds$$

ein Potential von ω beschrieben. Dies ist ein merkenswertes Verfahren zur Bestimmung von Potentialen in der 2-dimensionalen Situation. Entwickle mit diesen Ideen ebenfalls ein Verfahren für die 3-dimensionale Situation.

(Tip: Benutze den Ansatz $f(p) \coloneqq \int_{\alpha_p} \omega$ aus dem Beweis des Theorems aus Abschnitt 16.7, und wähle als α_p die „Hakenkurve“, die erst in vertikaler Richtung von p_0 nach $(a, y(p))$ und dann in horizontaler Richtung von $(a, y(p))$ nach p verläuft.)

318. m. Sei $G \subseteq \mathbf{R}^m$ offen. Zeige: Jede C^r-Differentialform $\omega\colon G \to \mathrm{Alt}^{m-1}(\mathbf{R}^m)$ vom Grad $m-1$ ist von der Form

$$\omega = \det(X, \dots), \quad \text{also} \quad \forall p \in G\colon \omega_p = \det(X_p, \dots)$$

mit einem C^r-Vektorfeld $X\colon G \to \mathbf{R}^m$. Dieses Vektorfeld ist durch

$$X_p = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \cdot \omega_p(e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_m) \cdot e_i$$

gegeben, wobei die Schreibweise $\widehat{e_i}$ signalisieren soll, daß der Eintrag e_i zu streichen ist.

319. **m.** Zeige in der Situation von Abschnitt 16.10: Für jede C^r-Differentialform $\omega\colon G \to \mathrm{Alt}^n(\mathbf{R}^n)$ vom Grad n ist

$$F^*\omega = f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad \text{mit} \quad f\colon K \to \mathbf{R}, p \mapsto \omega_{F(p)}\Big(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)\Big)$$

und

$$\int_F \omega = \int_K F^*\omega = \int_K f \, d\lambda^n.$$

320. **s. (5 Punkte)** In der Situation von Abschnitt 16.10 sei $E = \mathbf{R}^{n+1}$ und $\omega = \det(X, \ldots)$ mit einem C^r-Vektorfeld $X\colon G \to \mathbf{R}^{n+1}$ (vgl. Aufgabe 318.). Zeige, daß dann

$$\int_F \omega = \int_F \langle X, N_F \rangle \; d\lambda^n$$

gilt.

321. Berechne die Cartansche Ableitung der folgenden Differentialformen im $\mathbf{R}^3$:

(a) **m.** $\exp(xy)\, dx - \sin(y) dy + x\, dz$,

(b) **s. (5 Punkte)** $(x + \sin(z))\, dx \wedge dy + y\, dx \wedge dz + xyz\, dy \wedge dz$.