15. Übung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

09. Februar – 20. Februar 2023 *

322. s. (10 Punkte) Seien G eine offene Teilmenge eines Banachraums E. Zeige:

(a) Ist ω eine C^2-Form vom Grade n, so gilt

$$d^2\omega \coloneqq d(d\omega) = 0.$$

(b) Ist $E = \mathbf{R}^n$, $X\colon G \to \mathbf{R}^n$ ein C^{r+1}-Vektorfeld und ω die C^{r+1}-Form

$$\omega = \det(X, \dots)$$

vom Grade $n-1$, so hat $d\omega$ als C^r-Form vom Grad n die Gestalt $f \cdot \det$ mit einer Funktion $f \in C^r(G, \mathbf{R})$. Diese Funktion heißt die *Divergenz* oder *Quellstärke* von X und wird mit $\operatorname{div} X$ bezeichnet. Sie erfüllt also die charakteristische Gleichung

$$d \det(X, \dots) = (\operatorname{div} X) \cdot \det.$$

Ist $X = \sum_{i=1}^n X_i \cdot e_i$ mit Funktionen $X_i \in C^{r+1}(G, \mathbf{R})$, so ist

$$\operatorname{div}_p X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(p) = \operatorname{tr}(J_p X) = \operatorname{tr}(D_p X).$$

(c) Ist $E = \mathbf{R}^3$, $X\colon G \to \mathbf{R}^3$ ein C^{r+1}-Vektorfeld und ω die C^{r+1}-Form

$$\omega = \langle X, \cdot \rangle,$$

so hat $d\omega$ als C^r-Form vom Grad 2 die Gestalt $\det(Y, \cdot, \cdot)$ mit einem geeigneten C^r-Vektorfeld $Y\colon G \to \mathbf{R}^3$. Dieses Vektorfeld Y heißt die

*Es sind maximal 35 Bonuspunkte zu erreichen.

Rotation oder *Wirbelstärke* von X und wird mit $\operatorname{rot} X$ bezeichnet. Es erfüllt also die charakteristische Gleichung

$$d\,\langle X,\cdot\rangle = \det(\operatorname{rot} X,\cdot,\cdot);$$

vgl. auch Beispiel (a) aus Abschnitt 16.11. Ist $X = \sum_{i=1}^{3} X_i \cdot e_i$ mit Funktionen $X_i \in C^{r+1}(G,\mathbf{R})$, so ist

$$\operatorname{rot} X = \Big(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\Big).$$

(d) Sei $E = \mathbf{R}^3$. Zeige:

(i) Für jede C^2-Funktion $f\colon G \to \mathbf{R}$ ist

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0.$$

(ii) Für jedes C^2-Vektorfeld $X\colon G \to \mathbf{R}^3$ ist

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0.$$

(Tip: (a).)

323. s. (5 Punkte) Sei $X := (x, y^2, z^3)\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Berechne erneut den Fluß des Vektorfeldes X durch die Oberfläche des Würfels; dieses Mal mit Hilfe des Satzes von Gauss. Vergleiche das Ergebnis mit dem Ergebnis von Aufgabe 314.

324. s. (10 Punkte) Berechne

(a) $\int_S ((x-y)^3\,dx + x^3\,dy)$ mittels des Satzes von Green, wobei S die (mathematisch positiv orientierte) Kreislinie um 0 mit dem Radius 1 in $\mathbf{R}^2$ ist;

(b) $\int_S (xy + yz + zx)\,d\lambda^3$ mittels des Satzes von Gauss, wobei $S := \{p \in \mathbf{R}^3 \mid x(p), y(p), z(p) \geq 0, x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2 \leq 1\}$;

(c) $\int_S (yz^2\,dx + (xz^2 - 2x)\,dy + 2xyz\,dz)$ mittels des Satzes von Stokes, wobei $S := \{p \in \mathbf{R}^3 \mid x(p) = \cos(t), y(p) = \sin(t), z(p) = \cos(t), t \in [0, 2\pi]\}$.

325. s. (5 Punkte) Eine Formel für den Flächeninhalt einer ebenen Figur. Sei ein positiv orientiertes C^2-Pflaster $F\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbf{R}^2$ im $\mathbf{R}^2$ gegeben; sei weiter $\alpha\colon [0,4] \to \mathbf{R}^2$ seine „Randkurve“, welche durch

$$\alpha(t) := \begin{cases} F(t,0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1,\\ F(1,t-1) & \text{für } 1 \leq t \leq 2,\\ F(3-t,1) & \text{für } 2 \leq t \leq 3,\\ F(0,4-t) & \text{für } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

definiert ist. Zeige:

$$\lambda^2(F) = \int_\alpha x\,dy.$$

326. s. (5 Punkte) Abschmelzen eines Schneeballs. Das Volumen V eines kugelförmigen Schneeballs vermindere sich durch Abschmelzen mit einer zeitlichen Rate, die proportional zur jeweils vorhandenen Oberfläche F ist, also

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha \cdot F,$$

wobei α die bekannte „Schmelzkonstante" ist. Sei r_0 der Radius des Schneeballs zu Beginn des Abschmelzvorgangs; $r(t)$ sein Radius nach Ablauf der Zeit t. Nach einer Zeiteinheit möge sich das ursprüngliche Volumen $V_0 := V(0)$ um p Prozent vermindert haben. Zeige, daß $r(t) = r_0 - \alpha t$ ist und daß die gesamte Schmelzzeit T durch

$$T = \frac{1}{1 - (1 - \frac{p}{100})^{\frac{1}{3}}}$$

gegeben ist. Wähle als Zeiteinheit 1 Stunde, gib Dir einige p-Werte vor, und berechne die zugehörigen Schmelzzeiten.

Das obige mathematische Modell kann auch für das Lutschen eines runden Bonbons verwendet werden. Allerletzte Übungsaufgabe: Verifiziere das obige Ergebnis experimentell.

Wir wünschen Euch allen ein erfolgreiches weiteres Studium!
Marc Nieper-Wißkirchen und Lukas Stoll