5. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

16. November 2021*

22. s. Wir setzen jetzt die Untersuchung von Aufgabe 16 fort. Die Bezeichnungen seien wie dort. Insbesondere sei f der dort definierte Körperisomorphismus $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}'$. Zusätzlich setzen wir aber voraus, daß die Körper $\mathbf{R}$ und $\mathbf{R}'$ auch noch das Axiom (R13) erfüllen. Dann gilt:

Satz: Es gibt genau einen *Isomorphismus angeordneter Körper* $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$; also eine Bijektion mit folgenden Eigenschaften für alle a, $b \in \mathbf{R}$:

(a) $g(a + b) = g(a) + g(b)$,

(b) $g(1) = 1'$,

(c) $g(a \cdot b) = g(a) \cdot g(b)$,

welche *streng monoton wachsend* ist, also

(d) $a < b \implies g(a) < g(b)$.

(Tip: Natürlich werden im folgenden die Eigenschaften der Abbildung f aus dem Satz aus Aufgabe 16 vollumfänglich ausgenutzt. Zur Konstruktion von g definieren wir für jedes $a \in \mathbf{R}$ die Mengen

$$M(a) \coloneqq \{q \in \mathbf{Q} \mid q \leq a\} \qquad \text{und} \qquad N(a) \coloneqq \{q \in \mathbf{Q} \mid q \geq a\}.$$

Nun zeigt man, daß

$$g(a) \coloneqq \sup f(M(a)) \qquad \text{und} \qquad h(a) \coloneqq \inf f(N(a))$$

dieselbe Zahl aus $\mathbf{R}'$ sind. Warum dann die unterschiedlichen Definitionen für diese Zahl? Weil Du damit leicht (?) zeigen kannst:

- $g(a) = h(a) = f(a)$ für alle $a \in \mathbf{Q}$,
- $g(a) + g(b) \leq g(a + b)$ und $h(a + b) \leq h(a) + h(b)$ für alle a, $b \in \mathbf{R}$,

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 23. November 2021 zu bearbeiten.

- $g(a) \cdot g(b) \leq g(a \cdot b)$ und $h(a \cdot b) \leq h(a) \cdot h(b)$ für alle a, $b \in \mathbf{R}_+$,
- $h(a) < g(b)$ für alle a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$.

Aus diesen Eigenschaften folgen unmittelbar die Eigenschaften (a)–(d) des Satzes. Da nach dem Satz aus Aufgabe 16 die Abbildung $g|\mathbf{Q} = f$ durch die Bedingungen (a)–(c) eindeutig festgelegt ist, siehst Du leicht (?), daß nur die von uns definierte Funktion g auch noch die Bedingung (d) erfüllt. Es bleibt also nur noch die Bijektivität von g zu beweisen. Die Injektivität von g folgt natürlich sofort (?) aus (d). Mehr Arbeit hast Du mit der Surjektivität. Oder doch nicht? Hier ein einfaches, wenn auch abstraktes Argument. Entsprechend zur Konstruktion von g konstruieren wir *die* Abbildung $g'\colon \mathbf{R}' \to \mathbf{R}$, welche mutatis mutandis die Bedingungen (a)–(d) erfüllt. Dann besitzt (?) neben $\mathrm{id}_{\mathbf{R}'}$ auch die Komposition $g \circ g'\colon \mathbf{R}' \to \mathbf{R}'$ die Eigenschaften (a)–(d). Da es aber nur eine Abbildung $\mathbf{R}' \to \mathbf{R}'$ gibt, welche die Bedingungen (a)–(d) erfüllt, ist (?) $g \circ g' = \mathrm{id}_{\mathbf{R}'}$. Hieraus folgt die Surjektivität von g nach dem Kriterium aus Abschnitt 0.5.)

23. m. Zeige:

(a) Sind s_1, $s_2 \in \mathbf{R}$ mit $s_1 < s_2$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\varepsilon(s_1) \cap U_\varepsilon(s_2) = \emptyset$, so gilt

$$\forall t_1 \in U_\varepsilon(s_1), t_2 \in U_\varepsilon(s_2)\colon t_1 < t_2.$$

(b) **(i)** $\forall a \in \widehat{\mathbf{R}}, \varepsilon \in \mathbf{R}_+\colon U_\varepsilon(-a) = -U_\varepsilon(a)$.

(ii) Sind $m \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$ und $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ die durch $f(t) \coloneqq mt + b$ definierte Funktion, so gilt

$$\forall a \in \mathbf{R}\colon f(U_\varepsilon(a)) = U_{|m|\varepsilon}(f(a)).$$

24. Eine andere Beschreibung des Supremums.

(a) **s.** Es sei Σ die Menge aller oberen Schranken einer beliebigen Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ von $\mathbf{R}$ ($M = \emptyset$ ist ausdrücklich zugelassen). Dann besitzt Σ ein Minimum, und zwar ist $\min(\Sigma) = \sup(M)$. Eine entsprechende Aussage gilt für das Infimum. Also ist $\sup(M)$ die kleinste obere Schranke und $\inf(M)$ die größte untere Schranke von M.

(b) **m.** Eine nicht leere Menge $M \subseteq \mathbf{R}$ ist genau dann nach oben beschränkt, wenn $\sup(M) < \infty$ ist.

25. s. Seien A und B nicht leere Teilmengen von $\mathbf{R}$. Zeige:

(a) $A \subseteq B \implies \sup(A) \leq \sup(B)$.

(b) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

26. **m.** Bestimme Supremum und Infimum der folgenden Teilmengen von $\mathbf{R}$:

(a) $A_1 := \left\{ \frac{1}{1+t} \middle| t \in \mathbf{R}_+ \right\}$,

(b) $A_2 := \left\{ (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \middle| n \in \mathbf{N}_1 \right\}$,

(c) $A_3 := \{t^2 - t - 2 \mid t \in \mathbf{R} \wedge t^2 - t - 2 < 0\}$.

Welche der angegebenen Mengen A_1, A_2 und A_3 besitzen ein Maximum, welche ein Minimum?

27. **(a)** **m.** Seien A und B nicht leere Teilmengen von $\mathbf{R}$ und gelte $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$. Beweise $\sup(A) \leq \inf(B)$.

(b) **s.** Beweise für $\mathbf{R}$ das *Axiom von den Dedekindschen Schnitten*: Seien A und B nicht leere Teilmengen von $\mathbf{R}$ mit den Eigenschaften

(i) $A \cup B = \mathbf{R}$,

(ii) $\forall a \in A, b \in B\colon a < b$.

Dann existiert genau ein $s \in \mathbf{R}$, so daß

$$\forall t \in \mathbf{R}\colon \big(t < s \implies t \in A\big) \wedge \big(t > s \implies t \in B\big).$$

28. **m.** Es seien E' und E'' metrische Räume, $E := E' \times E''$ ihr metrischer Produktraum und $q \in E''$ ein fester Punkt. Zeige, daß dann die Abbildung

$$i^q\colon E' \to E, p \mapsto (p, q)$$

stetig ist.

29. **m.** Zeige, daß für jeden metrischen Raum (E, d) gilt:

(a) Für jedes Quadrupel (p, q, p_0, q_0) von Punkten aus E gilt

$$|d(p,q) - d(p_0, q_0)| \leq d(p, p_0) + d(q, q_0).$$

Daher (?) ist $d\colon E \times E \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion.

(b) Es sei $A \in \mathfrak{P}(E)$ eine nicht leere Teilmenge. Für jedes $p \in E$ sei

$$\operatorname{dist}(p, A) := \inf\{d(p,q) \mid q \in A\}$$

die sogenannte *Distanz* von p zu A. Zeige, daß die Funktion

$$f\colon E \to \mathbf{R}, p \mapsto \operatorname{dist}(p, A)$$

stetig ist. (Tip: Überlege Dir, daß $\forall a \in A\colon \operatorname{dist}(q, A) \leq d(q,p) + d(p,a)$ und $\operatorname{dist}(q, A) - \operatorname{dist}(p, A) \leq d(p,q)$.)