6. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

23. November 2021*

30. Für $v = (v_i) \in \mathbf{R}^n$ definieren wir

$$\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\} \quad \text{und} \quad \|v\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

Offenbar ist dann

$$d(u, v) := \|v - u\|_\infty$$

die in Abschnitt 3.3 eingeführte Metrik des $\mathbf{R}^n$. Durch

$$\tilde{d}(u, v) := \|v - u\|_2$$

wird eine weitere Metrik des $\mathbf{R}^n$, die sogenannte *euklidische* Metrik definiert. Die ε-Umgebungen bezüglich d und $\tilde{d}$ werden im folgenden mit $U_\varepsilon(p)$ bzw. $\tilde{U}_\varepsilon(p)$ bezeichnet. Zeige:

(a) **m.** $\forall v \in \mathbf{R}^n \colon c\,\|v\|_2 \leq \|v\|_\infty \leq C\,\|v\|_2$ mit $c := 1/\sqrt{n}$ und $C := 1$.
Sind die beiden Abschätzungen scharf, d. h. wird die Aussage falsch, wenn Du c durch eine größere bzw. C durch eine kleinere Konstante ersetzt?

(b) **s.** $\forall v \in \mathbf{R}^n\, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon \tilde{U}_\varepsilon(v) \subseteq U_\varepsilon(v) \subseteq \tilde{U}_{\varepsilon\sqrt{n}}(v)$.

(c) **s.** Sei E ein weiterer metrischer Raum. Dann gilt:

- **(i)** Eine Abbildung $f \colon E \to \mathbf{R}^n$ ist genau dann in $p_0 \in E$ bezüglich d stetig, wenn f in p_0 bezüglich $\tilde{d}$ stetig ist.
- **(ii)** Eine Abbildung $g \colon \mathbf{R}^n \to E$ ist genau dann in $v_0 \in \mathbf{R}^n$ bezüglich d stetig, wenn g in v_0 bezüglich $\tilde{d}$ stetig ist.

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 30. November 2021 zu bearbeiten

31. m. Seien M eine nicht leere Menge und

$$B(M) := \{f\colon M \to \mathbf{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\}.$$

Dabei heißt f *beschränkt*, wenn eine Konstante $C \geq 0$ mit $|f(p)| \leq C$ für alle $p \in M$ existiert.

Für f, $g \in B(M)$ und $\alpha \in \mathbf{R}$ definieren wir $f + g\colon M \to \mathbf{R}$ und $\alpha f\colon M \to \mathbf{R}$ durch

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p) \quad \text{und} \quad (\alpha f)(p) = \alpha \cdot f(p)$$

für alle $p \in M$. Dadurch wird $B(M)$ offenbar zu einem reellen Vektorraum.

Weiterhin definieren wir für jedes $f \in B(M)$:

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(p)| \mid p \in M\}.$$

Zeige, daß $\|\cdot\|_\infty$ eine *Norm* auf $B(M)$ ist, das heißt, es gelten die folgenden „Axiome“:

(N0) $\forall f \in B(M)\colon\ \|f\|_\infty \geq 0$,

(N1) $\forall f \in B(M)\colon\ (f = 0 \iff \|f\|_\infty = 0)$,

(N2) $\forall \alpha \in \mathbf{R}\, \forall f \in B(M)\colon\ \|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$,

(N3) $\forall f, g \in B(M)\colon\ \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Daher (?) ist $d\colon B(M) \times B(M) \to \mathbf{R}, (f, g) \mapsto \|f - g\|_\infty$ eine Metrik auf $B(M)$.

32. s.

(a) Sei E eine Menge. Eine Funktion $d\colon E \times E \to \widehat{\mathbf{R}}$ heißt eine *Fastmetrik* auf E, wenn für d die vier Axiome (M0)–(M3) aus Abschnitt 3.1 gelten. Eine Fastmetrik d auf E ist offenbar genau dann eine Metrik auf E, wenn $d(p, q) < \infty$ für alle p, $q \in E$ gilt. Sei weiter Φ die Funktion

$$\Phi\colon [0, \infty] \to [0, 1], t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{1+t} & \text{für } t \in [0, \infty[\,, \\ 1 & \text{für } t = \infty. \end{cases}$$

Zeige: Ist $d\colon E \times E \to \widehat{\mathbf{R}}$ eine Fastmetrik auf E, so ist $\Phi \circ d$ eine Metrik auf E.

(b) Sei M eine nicht leere Menge und

$$A(M) := \{f\colon M \to \mathbf{R}\}.$$

Beweise: Die Abbildung

$$d\colon A(M) \times A(M) \to \widehat{\mathbf{R}}, (f, g) \mapsto \sup\{|f(p) - g(p)| \mid p \in M\}$$

ist eine Fastmetrik auf $A(M)$.

33. **(a)** **m.** Zeige: Die Funktion

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} \sin(1/t) & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

ist in 0 nicht stetig. Ist $x \cdot f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ in 0 stetig?

(b) **s.** In welchen Punkten ist die Funktion

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} t & \text{für } t \in \mathbf{Q} \\ t^2 & \text{für } t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

stetig?

34. **m. Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft.** Beweise: Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen E und E', $f\colon E \to E'$, ist in $p_0 \in E$ stetig, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ gibt, so daß $f|U_\varepsilon(p_0)$ in p_0 stetig ist.

35. **m. Aneinanderheften stetiger Funktionen.** Es seien a, b, $c \in \mathbf{R}$ Zahlen mit $a < b < c$, E ein metrischer Raum, sowie $f\colon [a,b] \to E$ und $g\colon [b,c] \to E$ stetige Abbildungen mit $f(b) = g(b)$. Zeige, daß dann genau eine stetige Abbildung $h\colon [a,c] \to E$ mit

$$h|[a,b] = f \quad \text{und} \quad h|[b,c] = g$$

existiert.