7. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

30. November 2021*

36. s. Horner-Algorithmus zur Berechnung der Funktionswerte eines Polynoms. Seien $n \in \mathbf{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen. Es sei P das Polynom $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Aus der rechten Seite der Gleichung

$$P(t) = ((\ldots(a_n t + a_{n-1})t + \ldots)t + a_1)t + a_0$$

ergibt sich ein Algorthmus zur Berechung von $P(t)$ für $t \in \mathbf{R}$, der sogenannte *Horner-Algorithmus*. Schreibe ein (Scheme-)Programm zur Berechnung von Funktionswerten von P in einem Intervall $t_0 < t_1$ nach dem Horner–Algorithmus. Genauer: Das Programm soll zu gegebenen n, $a_0, \ldots, a_n$ und $t_0 < t_1$ und der Anzahl $k \geq 2$ der Stellen das Polynom P an den Stellen t_0, $t_0 + \frac{1}{k-1}(t_1 - t_0)$, $t_0 + \frac{2}{k-1}(t_1 - t_0)$, $\ldots$, $t_0 + \frac{k-1}{k-1}(t_1 - t_0) = t_1$ auswerten.

37. m.

(a) Äquivalente Beschreibung von Intervallen. Sei $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}) \setminus \{\emptyset\}$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathbf{R}$, und seien $\alpha := \inf(M)$, $\beta := \sup(M)$. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\forall a, b \in M\colon (a < b \implies [a, b] \subseteq M)$.

(ii) $]\alpha, \beta[\subseteq M$.

(iii) M ist ein Intervall.

(Tip: (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (i); beachte Aufgabe 23 (a). Beachte, daß auf jeden Fall $M \subseteq [\alpha, \beta]$ gilt.)

(b) Intervalltreue stetiger Funktionen. Ist I ein Intervall von $\mathbf{R}$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion, so ist auch das Bild $f(I)$ von I ein Intervall.

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 7. Dezember 2021 zu bearbeiten.

38. m. Der eindimensionale Spezialfall des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Sei $n \in \mathbf{N}_1$, und sei $\mathbf{B}^n$ die *Einheitsvollkugel* des $\mathbf{R}^n$ mit Mittelpunkt 0, präzise $\mathbf{B}^n = \{p \in \mathbf{R}^n \mid \|p\|_2 \leq 1\}$. Der *Brouwersche Fixpunktsatz* besagt, daß jede stetige Abbildung $f\colon \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ mindestens einen *Fixpunkt* $p_0 \in \mathbf{B}^n$ besitzt, d. h. also, daß ein $p_0 \in \mathbf{B}^n$ mit $f(p_0) = p_0$ existiert. Für $n \geq 2$ ist der Beweis schwer; man benutzt Methoden der algebraischen Topologie. Für $n = 1$ kannst Du es!

(Tip: $g = x - f$.)

39. s. Sei (E, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $(\tilde{E}, \tilde{d})$ ein weiterer metrischer Raum. Sei $f\colon E \to \tilde{E}$ eine Abbildung. Zeige: Genügt f einer *Lipschitzbedingung* mit einer Zahl $L \in \mathbf{R}_+$, d. h. gilt $\forall p_1, p_2 \in E\colon \tilde{d}(f(p_1), f(p_2)) \leq L \cdot d(p_1, p_2)$, so ist f stetig.

(b) Zeige: Sind Funktionen $f,\ g\colon E \to \mathbf{R}$ in $p_0 \in E$ stetig, so sind auch die Funktionen

$$\max(f, g)\colon E \to \mathbf{R}, p \mapsto \max(f(p), g(p))$$

und

$$\min(f, g)\colon E \to \mathbf{R}, p \mapsto \min(f(p), g(p))$$

in p_0 stetig.

(Tip: Übungsaufgabe 21 (b).)

(c) Skizziere die Funktionen $\max(x, x^2 + 4x - 5)$ und $\min(x, x^2 + 4x - 5)$.

40. m.

(a) Bestimme den größtmöglichen Definitionsbereich $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ der Abbildung

$$\left(\sqrt[4]{x^2 - x - 2}, \sqrt[3]{x^2 + x + 2}\right)\colon D \to \mathbf{R}^2.$$

Ist die Abbildung stetig auf D?

(b) Es seien $a,\ b \in \mathbf{R}_+$. Weiter sei $f := ax^2 + by^2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Zeichne den *Graphen* von f in $\mathbf{R}^3$, d. h. die Menge $\{(t, s, f(t, s)) \mid (t, s) \in \mathbf{R}^2\}$ und die *Höhenlinien* von f in $\mathbf{R}^2$, d. h. die Mengen $f^{-1}(\{r\}) = \{(t, s) \in \mathbf{R}^2 \mid f(t, s) = r\}$ für $r \in f(\mathbf{R}^2)$.

41. s. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Für $n \in \mathbf{N}_0$ und $a \in \mathbf{R}$ gilt

$$x^{n+1} - a^{n+1} = (x - a) \cdot \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} x^k.$$

Insbesondere ist $x-a$ Teiler von $x^{n+1}-a^{n+1}$.

(b) Für ν, n, $m \in \mathbf{N}_0$ mit $\nu \leq n+m$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{\nu-k} = \binom{m+n}{\nu}.$$

(Tip: $(x+1)^{m+n} = (x+1)^m \cdot (x+1)^n$ und binomische Formel (vgl. Aufgabe 11 (a); Satz vom Koeffizientenvergleich.)

(c) Sei R die rationale Funktion

$$\frac{x^6-2x^5+4x^4-5x^3+3x^2-4x+6}{(x-1)^2(x^2+2)}.$$

Bestimme eine Polynomfunktion P und Zahlen a, b, c, $d \in \mathbf{R}$, so daß

$$R = P + \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+2}$$

gilt. Sind P, a, b, c und d eindeutig bestimmt?

42. m. Seien $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}) \setminus \{\emptyset\}$ eine nicht leere Teilmenge und $f\colon M \to \mathbf{R}$ eine Funktion. Beweise die folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist streng monoton wachsend} \iff \left(\forall a, b \in M\colon \left(a \neq b \implies \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0\right)\right).$$

Gilt eine entsprechende Aussage auch für „streng monoton fallend"?

43. s. Sei $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ die Funktion

$$t \mapsto \begin{cases} t^3-3t^2+3t-1 & \text{für } t \leq 0 \\ t^2+4t+1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

(a) Zeige, daß f streng monoton wachsend ist, und bestimme $f(\mathbf{R})$.

(b) Wie lautet die Umkehrfunktion $\check{f}$ von f?

(c) Wo sind f und $\check{f}$ stetig?