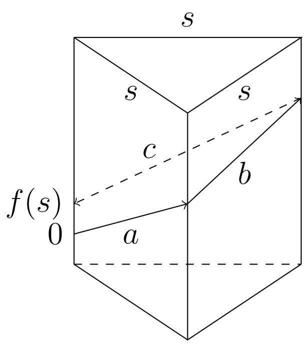
8. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

7. Dezember 2021*

44. s. Archimedes bei den Pyramiden. Anläßlich eines Forschungsaufenthaltes in Alexandria besuchte Archimedes auch die Pyramiden von Gizeh. Da er damals eingehende Untersuchungen an Dreiecken anstellte, trug er stets ein solches mit sich herum. Ganz zufällig bemerkte er, daß der Schatten seines Dreieckes auf einer der Pyramidenflächen gleichseitig war, obwohl sein Dreieck doch eine ganz andere Form hatte. Wie üblich setzte sich Archimedes in den Sand, um den Hintergrund dieses Phänomens zu ergründen. „Heureka! Ich kann jedes Dreieck so halten, daß sein Schatten auf der Pyramide gleichseitig ist." (Wir sollten hinzufügen, daß die Sonne zu diesem Zeitpunkt senkrecht zur Pyramidenfläche stand.) Später wurde im Sand eine Steinplatte mit dem folgenden Bild eines gleichseitigen Prismas ($s \leq a \leq b \leq c$) gefunden:



Beweise Archimedes' Aussage!

(Tip: Der Zwischenwertsatz ist nützlich. Wie lautet die Funktion f?)

45. m. Zeige, daß es keine surjektive stetige Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gibt, welche jeden Funktionswert genau zweimal annimmt.

*Die Übungsblätter sind bis zur Übung am 14. Dezember 2021 zu bearbeiten.

46. m. Sei M ein Teilraum eines metrischen Raumes E, $(p_n)_{n\geq m}$ eine Punktfolge in M und $q \in M$. Beweise: Die Folge $(p_n)_{n\geq m}$ konvergiert genau dann in dem Teilraum M gegen q, wenn sie in E gegen q konvergiert.

47. Weitere Rechenregeln für Zahlenfolgen. Seien $(a_n)_{n\geq m}$, $(b_n)_{n\geq m}$, sowie $(c_n)_{n\geq m}$ reelle Zahlenfolgen, $a, b \in \widehat{\mathbf{R}}$, und es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Zeige:

- **(a) m.** Ist $a = \infty$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = 0$.
- **(b) m.** Ist $a = 0$ und $(c_n)_{n\geq m}$ eine beschränkte Zahlenfolge, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot c_n) = 0$.
- **(c) s.** Ist $a = \infty$ und existiert ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, so daß $\forall n \geq m\colon c_n \geq \varepsilon$ gilt, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot c_n) = \infty$.
- **(d) s.** Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$, so gilt auch $a \leq b$.
- **(e) s.** Und schließlich:

  Das Sandwich-Theorem.

  - **(i)** Gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$ und ist $a = b$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.
  - **(ii)** Gilt $a_n \leq c_n$ für alle $n \geq m$ und ist $a = \infty$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.
  - **(iii)** Gilt $c_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$ und ist $b = -\infty$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

48. m. Sei (E, d) ein metrischer Raum, und seien $(p_n)_{n\geq m}$, $(q_n)_{n\geq m}$ zwei Punktfolgen in E. Zeige: Konvergiert $(p_n)_{n\geq m}$ gegen $p \in E$ und ist $(d(p_n, q_n))_{n\geq m}$ eine Nullfolge, so konvergiert auch $(q_n)_{n\geq m}$ gegen p.

49. m. Seien $q \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}_0$ und $s_n := \sum_{k=0}^{n} q^k$. Zeige: Ist $|q| < 1$, so konvergiert die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$. Wie lautet der Grenzwert? (Tip: Übungsaufgabe 41 (a).)

50. s. Die Funktion $f\colon\ ]0, \infty[\ \to \mathbf{R}$ sei definiert durch

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{für } t = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p,\, q \in \mathbf{N}_1. \end{cases}$$

Zeige, daß f an den irrationalen Stellen stetig und an den rationalen Stellen unstetig ist. (Tip zu irrationalem t: Zu $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ wähle $n \in \mathbf{N}_1$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wieviele rationale Zahlen p/q mit $q \leq n$ liegen in $]t-1, t+1[$?)

Fazit. Es gibt Funktionen, deren Stetigkeits- und Unstetigkeitsstellen jeweils dicht liegen.