9. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Dr. Ingo Blechschmidt

14. Dezember 2021*

51. Untersuche die folgenden reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ auf Konvergenz, und berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(a) **m.** $a_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n$,

(b) **s.** $a_n = \left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)^{2000}$,

(c) **s.** $a_n = n^{(-1)^n (1 + (-1)^{n+1})}$.

52. **m.** Seien a, $b \in \mathbf{R}$ mit $0 < a < b$. Wir setzen $a_0 \coloneqq a$ und $b_0 \coloneqq b$ und definieren rekursiv für $n \geq 0$:

$$a_{n+1} \coloneqq \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} \coloneqq \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

Beweise, daß die Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren. (Tip: Übungsaufgabe 17 (b); Monotonieverhalten der Folgen?)

53. Sei E ein metrischer Raum. Beweise:

(a) **m.** Jede Vereinigung endlich vieler folgenkompakter Mengen in E ist folgenkompakt.

(b) **m.** Jeder (nicht-triviale) Durchschnitt (beliebig vielen) folgenkompakten Mengen in E ist folgenkompakt.

(c) **s.** Es seien E' ein weiterer metrischer Raum und $f\colon E \to E'$ eine stetige Abbildung. Dann ist das Bild $f(K)$ einer jeden folgenkompakten Teilmenge $K \in \mathfrak{P}(E)$ wieder folgenkompakt. Gib weiter ein Beispiel dafür an, daß das Urbild $f^{-1}(B)$ einer folgenkompakten Teilmenge B von E' im allgemeinen *nicht* folgenkompakt ist.

(d) **m.** Bestimme alle folgenkompakten Intervalle von $\mathbf{R}$.

*Die bearbeiteten Übungsblätter sind bis zur Übung am 21. Dezember 2021 zu bearbeiten.

54. Bestimme den Limes inferior und den Limes superior der folgenden reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$:

(a) **m.** $a_n = (-1)^n \cdot n$,

(b) **m.** $a_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$,

(c) **s.** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$,

(d) **s.** $a_n = (-1)^n \cdot n^{(-1)^n}$.

55. Es sei E ein metrischer Raum. Beweise:

(a) **m.** Sind A, $B \in \mathfrak{P}(E)$ Teilmengen von E und gilt $A \subseteq B$, so gilt auch $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(b) **m.** Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(E)$, so gilt $\overline{\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu} = \bigcup_{\nu=1}^{n} \overline{A_\nu}$; insbesondere ist daher jede endliche Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen von E wieder eine abgeschlossene Teilmenge.

(c) **m.** Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen $A_i \in \mathfrak{P}(E)$ mit $I \neq \emptyset$, so gilt für den Durchschnitt $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$. Zeige an einem Beispiel, daß im allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Trotzdem ist der Durchschnitt von (beliebig vielen) abgeschlossenen Teilmengen von E wieder eine abgeschlossene Teilmenge von E.

(d) **s.** Es seien E' ein weiterer metrischer Raum und $f\colon E \to E'$ eine stetige Abbildung. Dann ist das Urbild $f^{-1}(B)$ einer jeden abgeschlossenen Teilmenge B von E' eine abgeschlossene Teilmenge von E. Zeige außerdem: Das Bild $f(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge A von E ist im allgemeinen nicht in E' abgeschlossen.

(e) **s.** Bestimme für alle Intervalle von $\mathbf{R}$ die abgeschlossene Hülle und entscheide damit, welche Intervalle im Sinne von Abschnitt 4.8 abgeschlossene Teilmengen von $\mathbf{R}$ sind.

56. **m.** Welche der folgenden Mengen A_1, A_2 und A_3 sind abgeschlossene Teilmengen von $\mathbf{R}$, welche sind folgenkompakt?

(a) $A_1 := \mathbf{N}_0$.

(b) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge, und sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbf{R}$.

- **(i)** $A_2 := \{a_n \mid n \in \mathbf{N}_0\}$,
- **(ii)** $A_3 := A_2 \cup \{a\}$.