Weihnachtsübung zur Analysis III

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Lukas Stoll, M. Sc.

06. Dezember 2022 – 12. Januar 2023 *

294. Es muß wohl kurz vor Weihnachten und nach einem sehr langen Arbeitstag gewesen sein, als die Oberbürgermeisterin der Stadt Augsburg beschloß: „Augsburg braucht ein neues Schwimmbad! Und zwar soll es die schnellste Rutschbahn haben, die möglich ist!“

Nun, als die Ingenieure der Stadt Augsburg über die Sache nachdachten, wurden sie gewahr, daß die Bürgermeisterin sie mit einer gar nicht so leichten Aufgabe konfrontiert hatte. Ihnen war nicht klar, wie eine Rutschbahn auszusehen hatte, damit man auf ihr möglichst schnell rutscht. Eine Gerade zwischen dem Start- und dem Endpunkt der Rutsche ist jedenfalls nicht die optimale Lösung (obwohl dies die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten ist). Ist die Rutschbahn nämlich in der Nähe des Startpunktes steiler, so nimmt zwar die Länge der Rutschbahn zu, aber sie wird in einem größeren Teilstück schneller durchrutscht. Wie nun mußte die genaue Form der Rutschbahn sein? Die Ingenieure wußten keinen Rat und wandten sich daher an die Hörer der Analysis III. Jetzt sind Sie dran!

Ein Abstecher in die Gefilde der Variationsrechnung: Das Brachistochronen-Problem. Im Jahre 1696 veröffentlichte Johann Bernoulli das Brachistochronen-Problem (griechisch für „kürzeste Zeit“): Es seien zwei Punkte A und B einer über dem Boden senkrechten Ebene vorgegeben, die nicht vertikal übereinander liegen. Man finde, falls möglich, diejenige Kurve, die die beiden Punkte A und B so verbindet, daß ein Massenpunkt, der in A mit Geschwindigkeit 0 startet und längs dieser Kurve unter dem Einfluß der Schwerkraft unter Vernachlässigung von Reibungskräften von A nach B gleitet, in der kürzest möglichen Zeit in B eintrifft.

Johann Bernoulli gab an, bereits eine Lösung zu kennen, forderte jedoch die großen Mathematiker seiner Zeit auf, ihrerseits das Problem zu lösen.

*Es sind maximal 25 Bonuspunkte zu erreichen.

Dieser neue Aufgabentypus führte zur Entwicklung einer neuen mathematischen Theorie: der Variationsrechnung.

Zur Formulierung und Lösung des Problems. Wir gehen davon aus, daß das Problem eine Lösung besitzt. Wir betrachten die Ebene $\mathbf{R}^2$ mit horizontaler x-Achse und vertikaler y-Achse, wobei die positive Richtung der y-Achse in Richtung des Erdmittelpunktes zeigt.

Es sei $A = (0,0)$ und $B = (a,b)$ mit $a > 0$ und $b \geq 0$ (Warum nicht $b < 0$?). Wir nehmen an, daß die Spur der gesuchten Kurve durch den Graphen einer stetigen Funktion $\varphi_0\colon [0,a] \to \mathbf{R}$ beschrieben wird, daß also $\gamma\colon [0,a] \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (t, \varphi_0(t))$ eine Parametrisierung der gesuchten Kurven ist, daß $\varphi_0|]0,a[\in C^2(]0,a[, \mathbf{R}_+)$ und $\varphi_0|[0,a] \geq 0$; somit befindet sich die Kurve abgesehen von Anfangs- und Endpunkt unterhalb des Niveaus von A.

Aus der Mechanik wissen wir, daß die „Gleitzeit" eines Massepunktes entlang einer Kurve $[0,a] \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (t, \varphi(t))$ durch

$$T(\varphi) = \int_0^a \left(\frac{1 + \varphi'^2(x)}{2g \cdot \varphi(x)} \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

gegeben ist, wobei $g = 9{,}81 m/s^2$ die Erdbeschleunigung ist. Hierbei handelt es sich um ein beiderseitig uneigentliches Integral.

Wir definieren nun

$$L\colon G \coloneqq \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, (t, q, \dot{q}) \mapsto \left(\frac{1 + \dot{q}^2}{q} \right)^{1/2}$$

und

$$\Omega_2(G) \coloneqq \{ \psi \in C^2([t_0, t_1], \mathbf{R}) \mid \psi > 0 \}$$

für alle t_0, $t_1 \in \mathbf{R}$ mit $t_0 < t_1$ und

$$S_2^{t_0,t_1}\colon \Omega_2(G) \to \mathbf{R}, \varphi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t_1} L(t, \varphi(t), \varphi'(t))\, dt.$$

Schließlich definieren wir für jede auf einem Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ definierte C^1-Funktion $\varphi\colon I \to \mathbf{R}$ ihre *Prolongation*

$$\hat{\varphi}\colon I \to I \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}, t \mapsto (t, \varphi(t), \varphi'(t)).$$

Zur Behandlung des Problems benötigen wir ein wesentliches Ergebnis aus der Variationsrechnung, das wir hier ohne Beweis angeben, welches sich aber ohne weiteres aus den Ergebnissen der Vorlesung herleiten läßt:

Die Euler–Lagrangesche Differentialgleichung. Die gesuchte Funktion φ_0 erfüllt die folgende implizite Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \circ \hat{\varphi}_0\Big) = \frac{\partial L}{\partial q} \circ \hat{\varphi}_0.$$

(Theoretischen Physikern ist diese Gleichung wohlvertraut. Sie ist eine der wichtigsten Hilfsmittel zur Beschreibung des Verhaltens physikalischer Systeme.)

Zeige nun:

(a) Zu jeder Wahl von s', $s'' \in \mathbf{R}$ und $r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ existieren eindeutig bestimmte Parameter c, $d \in \mathbf{R}$, so daß die Funktion $f = (x-r)\cdot(cx+d)\cdot x^3$ in r die Ableitungen

$$f'(r) = s' \quad \text{und} \quad f''(r) = s''$$

hat. Außerdem gilt für f, daß

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f(r) = 0$$

und für alle $t \in [0, r]$ gilt

$$|f'(t)| \leq M \cdot (|r| \cdot |s''| + |s'|)$$

mit $M = 19$, also (?)

$$|f(t)| \leq M \cdot |r| \cdot (|r| \cdot |s''| + |s'|).$$

(b) Für alle $t_0, t_1 \in \,]0, a[$ mit $t_0 < t_1$ ist die C^2-Funktion $\varphi_0|[t_0, t_1]$ ein Minimum von $S_2^{t_0,t_1}|\Omega_2(G; \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_1))$ mit

$$\Omega_2(G; h_0, h_1) := \{\psi \in \Omega_2(G) \mid \psi(t_0) = h_0 \wedge \psi(t_1) = h_1\}.$$

(Tip: Angenommen, $\varphi_0|[t_0, t_1]$ sei kein Minimum der Funktion. Also existiert ein $\psi \in \Omega_2(G; \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_1))$ mit $\delta := S_2^{t_0,t_1}(\varphi_0|[t_0, t_1]) - S_2^{t_0,t_1}(\psi) > 0$. Nun konstruiere (zu hinreichend kleinem $r \in \mathbf{R}_+$) eine Funktion $\varphi\colon [0, a] \to \mathbf{R}$, die auf $[t_0, t_1]$ mit ψ und auf $[0, t_0 - r] \cup [t_1 + r, a]$ mit φ_0 übereinstimmt, die auf $[t_0 - r, t_0]$ und $[t_1, t_1 + r]$ jeweils durch eine Summe von φ_0 mit einer Funktion f wie in (a) gegeben ist und deren Einschränkung $\varphi|]0, a[$ zweimal stetig differenzierbar ist. Für genügend kleines r ist (?) dann $T(\varphi) < T(\varphi_0)$. Widerspruch!)

(c) Für die Funktion

$$g\colon G \to \mathbf{R}, (t, q, \dot{q}) \mapsto \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, q, \dot{q}) \cdot \dot{q} - L(t, q, \dot{q})$$

ist $g \circ \hat{\varphi}_0$ konstant.

(Tip: Verwende die Euler–Lagrangesche Differentialgleichung und über L nur die Information, daß L nicht von t abhängt.)

Bemerkung. Dieser „Erhaltungssatz“ ist ein Spezialfall des noetherschen Theorems: Symmetrien von L bedingen Erhaltungssätze.

(d) Die Funktion $\varphi_0|]0,a[$ ist eine Lösung der expliziten Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{1+y'^2}{2y} \tag{1}$$

zweiter Ordnung; außerdem gibt es eine Konstante $c \in \mathbf{R}_+$, so daß $\varphi_0|]0,a[$ eine Lösung der impliziten Differentialgleichung

$$y \cdot (1+y'^2) = c \tag{2}$$

erster Ordnung ist. Im folgenden sei c die so festgelegte Konstante.

(Tip: Leite zunächst mit Hilfe des Erhaltungssatzes (2) her und folgere daraus mit Hilfe der Euler–Lagrangeschen Differentialgleichung (1).)

(e) Für jede Lösung $\varphi\colon J \to \mathbf{R}$ von (2) gilt:

(i) $\varphi(J) \subseteq]0,c]$ und $\varphi'(t) = 0 \iff \varphi(t) = c$.

(ii) Ist φ zweimal differenzierbar und $\varphi \not\equiv c$, so löst φ auch die Differentialgleichung (1) und nimmt c höchstens an einer Stelle $t \in J$ an.

(iii) Für alle $t_* \in \mathbf{R}$ ist auch $t_* + J \to \mathbf{R}, t \mapsto \varphi(t - t_*)$ eine Lösung von (2).

(f) Für die Funktionen

$$u_c := \frac{c}{2} \cdot (x - \sin) \quad \text{und} \quad v_c := \frac{c}{2} \cdot (1 - \cos)$$

gilt:

(i) u_c besitzt eine Umkehrfunktion $\check{u}_c\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(ii) Die Funktion $\psi_c := v_c \circ \check{u}_c\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist stetig und

$$\psi_c(0) = 0, \quad \psi_c(c\pi/2) = c, \quad \psi_c(c\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \psi_c|]0,c\pi[> 0.$$

(iii) $\psi_c|]0,c\pi[$ ist eine C^∞-Funktion mit Grenzwerten $\lim\limits_{t\to 0+} \psi_c'(t) = \infty$ und $\lim\limits_{t\to c\pi-} \psi_c'(t) = -\infty$.

(iv) $\psi_c|]0,c\pi[$ ist eine nicht weiter fortsetzbare Lösung von (2) und (1).

(v) Die Kurve $\alpha := (u_c, v_c)$ ist die kanonische Parametrisierung einer Zykloide und daher parametrisiert $t \mapsto (t, \psi_c(t))$ dieselbe Zykloide.

(g) Eine C^2-Funktion $\varphi\colon J \to \mathbf{R}$ mit $\varphi \not\equiv c$ ist genau dann eine Lösung von (2), wenn es ein $t_* \in \mathbf{R}$ gibt, so daß φ eine Einschränkung von $]t_*, t_* + c\pi[\to \mathbf{R}, t \mapsto \psi_c(t - t_*)$ ist.

(Tip: Zu einem beliebig vorgegebenem $s \in J$ existiert ein $\tilde{s} \in]0, c\pi[$, so daß $\varphi'(s) = \psi_c'(\tilde{s})$ ist; wegen (2) ist auch $\varphi(s) = \psi_c(\tilde{s})$. Daher (?) gilt die Behauptung wegen (1) mit $t_* := s - \tilde{s}$.)

(h) Es ist $\varphi_0 = \psi_c|[0, a]$. Daher ist die gesuchte Brachistochrone ein Teilbogen einer Zykloide.

(i) Für alle t_0, $t_1 \in]0, c\pi[$ mit $t_0 < t_1$ gilt

$$\int_{t_0}^{t_1} L \circ \hat{\psi}_c \, dx = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{c}}{\psi_c} \, dx = \sqrt{c} \cdot \Big(\check{u}_c(t_1) - \check{u}_c(t_0) \Big).$$

Daher beträgt die „Gleitzeit“ längs des vollständigen Zykloidenbogens $T(\psi_c) = \sqrt{2c/g} \cdot \pi$.

(j) Wie lange benötigt die Oberbürgermeisterin, wenn sie entlang eines vollständigen Zykloidenbogens rutscht, dessen Endpunkte A und B insgesamt $100\,m$ voneinander entfernt liegen; wie tief gerät sie dabei unter das „Nullniveau“; und wie groß ist die erreichte Maximalgeschwindigkeit? (Benutze den Energieerhaltungssatz.)

(k) Warum wurden die Pläne der Augsburger Oberbürgermeisterin trotz allem nicht realisiert?

- **(i)** Man kann sich am Anfang der Rutschbahn nicht hinsetzen.
- **(ii)** Rutschen macht Spaß; deshalb sollte es lange dauern.
- **(iii)** Die Stadt Augsburg spart, indem sie die Materialkosten minimiert.
- **(iv)** Um dafür Sorge zu tragen, daß die Reibungskräfte vernachlässigt werden können, wird zuviel Schmierseife benötigt.